Formação Continuada Nova EJA

Plano de Ação 29 e 30

Nome: Andréa Rodrigues de Alcântara

Tutora: André Gomes Cardoso

INTRODUÇÃO

Estes dois capítulos finais abordam os conceitos de matrizes, determinantes e sistemas lineares. São de grande importância, visto que diversas situações e problemas do dia a dia são resolvidos através destes conceitos.

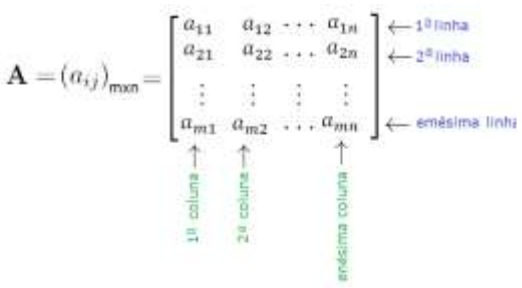
Escolhi uma atividade do Material do Professor no qual os alunos farão em duplas a atividade “Cooperativa de Leite”. Interessante pois faz um elo de ligação entre a teoria e os conceitos estudados. A atividade “Azul, Amarelo e Vermelho” fará com que ativem o raciocínio, para tirar as conclusões finais do exercício.

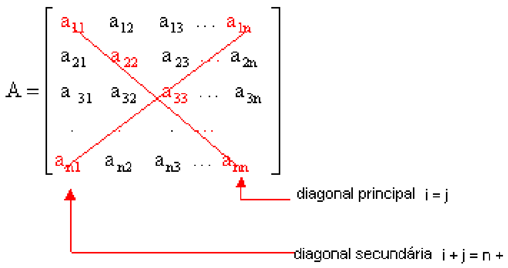
Utilizarei material complementar, contendo exercícios de matrizes e de sistemas lineares.

DESENVOLVIMENTO DA(S) AULA(S)

Capítulo 29:

Começarei este capítulo informando os elementos de uma matriz, e alguns conceitos iniciais:





Matriz quadrada: número de linhas igual ao número de colunas

Matriz identidade: matriz quadrada na qual a diagonal principal é igual a 1 e os demais elementos são todos iguais a zero. Veja abaixo:

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad I_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad I_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

... etc ...

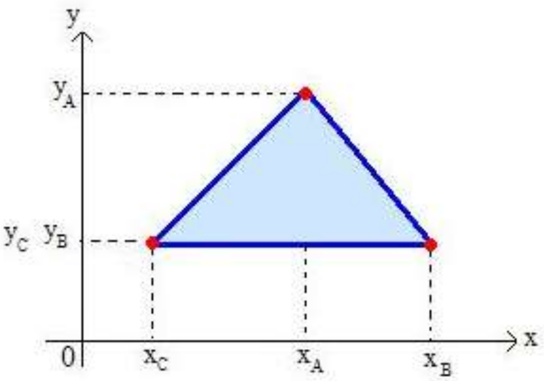
Introduzirei o capítulo utilizando o exemplo da Tabela 3 (quantidade de sapatos vendidos em 3 meses) e com a Atividade 1. Para o conceito de linha x coluna da nomenclatura a_{ij} eu farei uma adaptação para a_{LC} , a fim de facilitar (L=linha, C=coluna, ao invés de i, j).

Os exemplos do bolo e das faltas (Atividade 4) também serão utilizados. Completarei com os conceitos de multiplicação de um número real por uma matriz e entre matrizes.

No cálculo dos determinantes, farei uma breve explicação sobre a sua ligação com a geometria, para que eles entendam o que representa esse número que estamos calculando!

A geometria analítica também possui seus artifícios para o cálculo da área de um triângulo, nesse caso é necessário que saibamos as coordenadas de seus três vértices para que o triângulo possa ser representado em um plano cartesiano.

Considere o triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, veja a sua representação em um plano cartesiano:



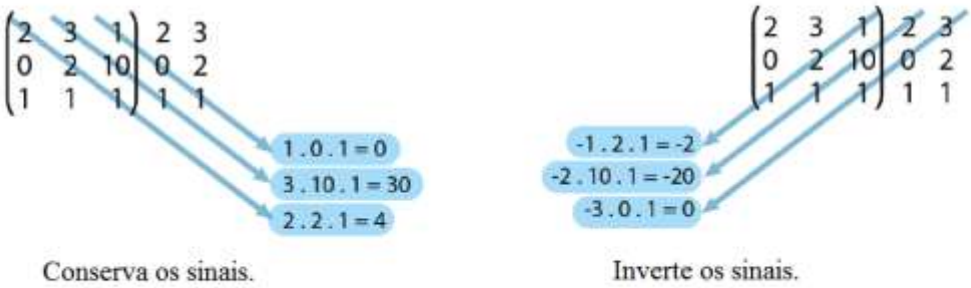
A partir dessa representação podemos dizer que o cálculo da área (A) de um triângulo através dos conhecimentos da geometria analítica é dado pelo determinante dos vértices dividido por dois.

$$A = \frac{|D|}{2}$$

$$\text{Onde } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

(*retirado do site http://www.mundoeducacao.com/matematica/area-um-triangulo-pela-geometria-analitica.htm*)

Depois utilizarei o exemplo do Material do Aluno:



$0 + 30 + 4 - 2 - 20 + 0 = 12$

Logo: det = 12

<u>Capítulo 30:</u>

Começarei este capítulo com o problema da Seção 1:

Miguel foi sacar R$ 70,00 em um caixa eletrônico que tinha apenas notas de R$ 10,00 e de R$ 20,00. Quantas notas de cada ele pode ter recebido do caixa eletrônico?

Construiremos a tabela com as possibilidades, para que percebam que existirá mais de uma solução para este problema. Faremos a Atividade 1.

Utilizarei o exemplo da Seção 2, para introduzir a ideia de como resolver sistemas lineares:

A população de uma cidade A é quatro vezes maior que a população da cidade B. Somando a população das duas cidades, temos o total de 250.000 habitantes. Qual a população da cidade B?

Tentaremos equacionar as duas situações:

População da cidade A = x

População da cidade B = y

População de A é 4 vezes maior que população de B => x = 4y

Somando população de A com B resulta 250.000 => x + y = 250.000

Farei com que eles cheguem ao raciocínio de substituir x por 4y, e assim resolver o problema. Ao final, faremos as substituições dos valores encontrados, para certificarmos a resposta. Faremos a Atividade 2.

Explicarei a eles que os sistemas podem ter mais de 2 situações (equações) e 2 incógnitas, e para isto haverá outros tipos de resoluções. Não utilizarei o que está no Material do Aluno, e sim uma apostila complementar (vide Outros materiais).

<u>Material do Professor</u>:

<u>Capítulo 29:</u>

Faremos em sala de aula a atividade “Cooperativa de Leite” em duplas. Achei esta atividade super interessante, pois ela proporciona ao aluno fazer uma ligação entre o estudo das matrizes com uma situação real.

Capítulo 30:

Faremos em sala de aula a atividade “Azul, Amarelo e Vermelho” em duplas. Será muito interessante que eles tirem as conclusões sobre sistemas possíveis e determinados, possíveis e indeterminados e impossíveis.

Outros materiais:

Para explicar os métodos de resolução de sistemas lineares, utilizarei uma apostila que fiz para o ensino EJA. Segue:

Podemos resolver sistemas lineares através de alguns métodos.

Método da substituição

Consiste em isolar uma das variáveis, substituindo-a na outra equação. Veja:

Ex6:

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 19 \end{cases}$$

Na primeira equação, vamos isolar o valor de x:

$x = -3 + y$ ou $x = y - 3$

Substituindo o valor de x na segunda equação temos:

$2.(y - 3) + 3y = 19$

Aplicando a propriedade distributiva, multiplicamos 2 por tudo que está dentro dos parênteses. Então:

$2y - 6 + 3y = 19$

$2y + 3y = 19 + 6$

$5y = 25$

$y = \frac{25}{5} = 5$

Já temos o valor de y = 5. Para encontrar o valor de x, basta substituir y em uma das equações (qualquer uma delas!) e encontrar x. Vamos substituir na primeira equação:

$x - y = -3$

$x - 5 = -3$

$x = -3 + 5$

$x = 2$

Logo: (2, 5) é a resposta para o exemplo 6.

Método da adição

Este método deverá ser utilizado nos sistemas em que existe a oportunidade de zerar uma das incógnitas. Isto pode ser feito somando uma equação com outra, termo a termo (x com x, y com y, variável independente com variável independente). Podemos multiplicar ou dividir TODA a equação por um mesmo número se for preciso, pois isto não irá alterar em nada a equação original. Vejamos o mesmo exemplo anterior. Na primeira equação temos x e na segunda temos 2x. Se multiplicarmos toda a primeira equação por – 2, teremos – 2x e desta forma poderemos cancelar estas incógnitas ao somar as equações. Observe:

$$\begin{cases} x - y = -3 \quad \Rightarrow \text{multiplica TODA a primeira equação por } (-2) \\ 2x + 3y = 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\cancel{2x} + 2y = 6 \\ \cancel{2x} + 3y = 19 \end{cases}$$ => somando as duas equações termo a termo, cancelamos 2x com – 2x e ficamos só com y

$$0 + 5y = 25 \Rightarrow y = \frac{25}{5} \Rightarrow y = 5$$

Da mesma forma que o método anterior, devemos substituir o valor de y em uma das equações, para obter x = 2.

Método de escalonamento

A composição dos métodos acima corresponde na verdade ao método de escalonamento. As operações que utilizamos para resolução dos sistemas lineares através deste método são chamadas de transformações lineares. São elas:

- troca de posições entre duas equações do sistema;
- multiplicação ou divisão de uma equação do sistema por um número real não-nulo;
- soma entre duas equações do sistema.

Vejamos um exemplo de sistema 3x3.
Ex7:

$$\begin{cases} x + y - 2z = -1 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 4y - 6z = 4 \end{cases}$$ => multiplica por (–2) e soma com a 2ª eq. e por (–1) e soma com a 3ª eq.

$$\begin{array}{l} -\cancel{2x} - 2y + 4z = 2 \\ \cancel{2x} + y + z = 0 \\ \hline -y + 5z = 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} -\cancel{x} - y + 2z = 1 \\ \cancel{x} + 4y - 6z = 4 \\ \hline 3y - 4z = 5 \end{array}$$

Com estas duas equações, formamos um sistema 2x2:

$$\begin{cases} -y + 5z = 2 \\ 3y - 4z = 5 \end{cases}$$ => multiplica por 3 e soma com a outra equação

$$\begin{cases} -\cancel{3y} + 15z = 6 \\ \cancel{3y} - 4z = 5 \end{cases}$$

$$11z = 11 \Rightarrow z = 1$$

Substitui z = 1 em uma das equações acima, e acha o valor de y:

$3y - 4z = 5 \Rightarrow 3y - 4.1 = 5 \Rightarrow 3y - 4 = 5 \Rightarrow 3y = 5 + 4 \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{3} \Rightarrow y = 3$

Finalmente substitui y = 3 e z = 1 na 1ª equação e acha o valor de x:

$x + y - 2z = -1 \Rightarrow x + 3 - 2.1 = -1 \Rightarrow x + 3 - 2 = -1 \Rightarrow x + 1 = -1 \Rightarrow x = -1 - 1 \Rightarrow x = -2$

Resposta final: (– 2, 3, 1)

EXERCÍCIOS:

15 – Resolva os sistemas abaixo pelos dois métodos: substituição e adição.

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 4y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 4 \\ 3x + 2y - 2z = 5 \end{cases}$

Exemplo:

Podemos resolver muitos problemas do nosso dia a dia através de sistemas lineares. Vejamos o exemplo abaixo:

Ex8: Em uma padaria, D. Aparecida comprou 4 pãezinhos e 5 broas, pagando R$3,00. D. Dalila comprou 2 pãezinhos e 3 broas nesta mesma padaria, e pagou R$1,70. Qual é o preço de cada pãozinho e cada broa nesta padaria?

Vamos chamar o preço dos pães de p e o preço das broas de b. Então:

D. Aparecida comprou 4 pães + 5 broas, ou seja: $4p + 5b$. Como ela pagou R$3,00, então:

$4p + 5b = 3,00$

Da mesma forma, D. Dalila comprou 2 pães e 3 broas, e pagou R$1,70. Então:

$2p + 3b = 1,70$

Isto forma um sistema de 2 equações e 2 incógnitas. Resolvendo, teremos o valor de p (que é o preço dos pães) e de b (que é o preço das broas).

$\begin{cases} 4p + 5b = 3,00 \\ 2p + 3b = 1,70 \end{cases}$ => multiplica por (–2) e soma com a 1ª equação

$\begin{cases} \cancel{4p} + 5b = 3,00 \\ \cancel{-4p} - 6b = 3,40 \end{cases}$

$0 - 1b = -0,40 \Rightarrow -b = -0,40 \Rightarrow b = 0,40$

Logo cada broa custa R$0,40. Agora falta calcular p. Vamos substituir $b = 0,40$ na 1ª equação:

$4p + 5b = 3,00 \Rightarrow 4p + 5 \cdot 0,40 = 3,00 \Rightarrow 4p + 2,00 = 3,00 \Rightarrow 4p = 3,00 - 2,00 \Rightarrow 4p = 1,00 \Rightarrow p = 0,25$

Logo, cada pãozinho custa R$0,25.

MATERIAL DE APOIO

Papel, calculadora.

VERIFICAÇÃO DO APRENDIZADO

A verificação do aprendizado se dará através de exercícios complementares, constantes no final deste Plano de Ação.

BIBLIOGRAFIA UTILIZADA

Material do Professor e Material do Aluno, Matemática e suas Tecnologias, Módulo 3, Rio de Janeiro, Fundação CECIERJ, 2012.

Livro Matemática Ensino Médio Volume Único de Antonio Nicolau Youssef, Elizabeth Soares, Vicente Paz Fernandez, 1ª edição, SP, 2008, Editora Scipione

Apostila 2° Ano EJA, Capítulo 5 "Sistemas Lineares, Matrizes e Determinantes", 1º bimestre de 2013, por Andréa Rodrigues de Alcântara.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Determinante , consultado em 23/05/2014.

http://www.mundoeducacao.com/matematica/area-um-triangulo-pela-geometria-analitica.htm) , consultado em 23/05/2014.

Professora Andréa Colégio: ____

Nomes: ____

__________________________________ Turma: ____

Exercícios:

1 – Resolva os sistemas abaixo pelos dois métodos: substituição e adição.

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 4y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 4 \\ 3x + 2y - 2z = 5 \end{cases}$

2 – Um colecionador de selos quer aumentar sua coleção. Vai a uma loja com R$132,00 no bolso, e observa que pode comprar cartelas de selos de dois tipos: tipo A e tipo B. Conversando com o vendedor ele descobre o seguinte:

a) se ele comprar 7 cartelas do tipo A e 1 cartela do tipo B, irá faltar R$1,00
b) se ele comprar 3 cartelas do tipo A e 11 cartela do tipo B, irá sobrar R$1,00

Descubra os preços de cada cartela.

3 – A população de uma cidade X é quatro vezes maior que a população da cidade Y. Somando a população das duas cidades, temos o total de 250.000 habitantes. Qual a população da cidade Y?

4 – Dada as matrizes A, B e C abaixo, calcule:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -7 & -8 & 9 \\ 12 & 6 & 5 \\ 8 & 7 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 6 & 7 & 1 \\ 2 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

a) A + B + C
b) A – B
c) A + B – C

5 – Adicione as matrizes e ache os valores de a, b, c:

$$\begin{bmatrix} a & 8 \\ 4 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & b \\ 4 & -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 17 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

6 – Calcule o produto X . Y :

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

7 – Calcule os determinantes das seguintes matrizes:

a) $M = \begin{bmatrix} 10 & -12 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

b) $N = \begin{bmatrix} 26 & 21 \\ 18 & -44 \end{bmatrix}$

c) $O = [-1]$

d) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

8 – É possível calcular o produto abaixo? Por quê?

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$