Trabalho apresentado no Curso de Formação Continuada da Fundação CECIERJ – Consórcio CEDERJ

Orientador: Paulo Alexandre Alves de Carvalho

Grupo: 4

Série: 2ª série do Ensino Médio

Cursista: Jozilaine Moreira Franklin dos Santos

TEMA: PROGRESSÃO ARITMÉTCA

Rio de Janeiro 2013

PLANO DE AULA

Assunto: Sequências Numéricas Regulares

Tema: Progressão Aritmética

Professora: Jozilaine Moreira Franklin dos Santos

Duração estimada: 200 minutos

INTRODUÇÃO

Sequência numérica é um conjunto de números reais dispostos em determinada ordem, geralmente resultantes da observação de um determinado fenômeno ou fato. Essas sequências modelam fenômenos que sofrem variações iguais em intervalos de tempo iguais.

As sequências numéricas são muito comuns em nosso dia a dia, estando presentes, por exemplo, na organização dos dias do ano em um calendário e em situações que envolvem dinheiro.

No universo escolar do Ensino Médio são estudadas, principalmente, dois tipos de sequências numéricas: as progressões aritméticas (PA) e as progressões geométricas (PG).

Neste plano de aula focaremos no estudo de Progressão Aritmética, com o objetivo de dar subsídios aos alunos para que eles se tornem capazes de identificar e solucionar situações problema em que esse conteúdo esteja envolvido.

DESENVOLVIMENTO

Progressão Aritmética: Uma Progressão Aritmética (PA) é uma sequência de números onde cada termo (exceto o primeiro) é resultado da soma do termo anterior com uma constante, chamada de razão (r).

Exemplos:

1º) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8
Nessa sequência podemos observar que cada termo, exceto o primeiro é obtido ao

somarmos 1 (razão) ao seu termo anterior.

2º) 3, 1, -1, -3, -5, -7 e -9

Nessa sequência podemos observar que cada termo, exceto o primeiro é obtido ao somarmos -2 (razão) ao seu termo anterior.

Tipos de PA: Uma PA pode ser classificada de três formas:

- ✓ Crescente: quando sua razão é maior que zero ($r > 0$).
- ✓ Decrescente: quando sua razão é menor que zero ($r < 0$).
- ✓ Constante: quando sua razão é igual a zero ($r = 0$).

Dessa forma, temos que no 1º exemplo acima uma PA crescente (razão = 1 > 0) e no 2º exemplo uma PA decrescente (razão = -2 < 0).

Termos de uma PA: Seja a PA (0, 2, 4, 6,...). Chamamos de a_1, a_2, a_3,... a_n , o primeiro, o segundo, o terceiro, ..., o enésimo termo dessa PA.
No exemplo acima teremos:
$a_1 = 0$
$a_2 = 2$
$a_3 = 4$
$a_4 = 6$
a_n = qualquer termo que o problema quiser.
Já a razão (r) é o valor somado a cada termo anterior para obter o seu posterior. Nesse exemplo a razão é 2.

Fórmula do Termo Geral de uma PA: Seja a PA (0, 2, 4, 6,...). Note que a razão é 2 (como visto acima). Note também que:
$a_2 = a_1 + r$ (2 = 0 + 2)
$a_3 = a_1 + 2r$ (4 = 2.2)
$a_4 = a_1 + 3r$ (6 = 3.2)
$a_5 = a_1 + 4r$ (8 = 4.2)

Assim podemos deduzir que o termo geral de uma PA é dado por **$a_n = a_1 + (n – 1)·r$.**

Exemplo: Vamos encontrar o número de termos da PA (1, 4, 7, ... 109).
Temos: $a_1 = 1$, $r = 4 – 1 = 3$ e $a_n = 109$,
Aplicando a fórmula do termo geral, temos: $a_n = a_1 + (n - 1)·r$ -> $109 = 1 + (n - 1)·3$ -> $109 – 1 = (n - 1)·3$ -> $108 = (n - 1)·3$ -> $108/3 = n - 1$ -> $36 = n - 1$ -> $36 + 1 = n$ -> $n = 37$.
Logo essa PA tem 37 termos.

Propriedade de uma PA: O termo médio é a soma aritmética dos termos equidistantes.

Soma dos termos de uma PA: Vamos determinar a soma dos números naturais de 1 até 100.
Podemos escrever essa soma da seguinte forma: (1 + 2 + 3 + 4 + ... + 98 + 99 +100).
Note que se somarmos o primeiro termo com o último obtemos 101, se somarmos o segundo termo com o penúltimo obtemos 101, se somarmos o terceiro termo com o antepenúltimo também obtemos 101 e assim por diante. Isso significa que temos cinqüenta somas que terão esse resultado. Assim se pegarmos 50 e multiplicarmos por 101 teremos a soma desses números, ou seja, $S_n = 101 · 50 = 5050$.
Como 101 pode ser escrito através da soma do primeiro com o último termo (101 = 1 + 100) e 50 através da metade da quantidade de termos, temos $S_n = (1 + 100) ·100/2 = 5050$.
Generalizando, temos que a soma dos n termos de uma PA é dada por **$Sn = (a_1 + a_n)·n/2$**

Exemplo: Calcule a soma dos 20 primeiros números ímpares.
Temos $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $r = 3 -1 = 2$, $n = 20$, $a_{20} =?$
$a_{20} = a_1 + (n - 1)·r = 1 + (20 - 1)·2 = 1 + 19·2 = 1 + 38 = 39$
Aplicando a fórmula da soma dos n termos de uma PA, temos:
$S_n = (a_1 + a_n)·n/2 = (1 + 39)·20/2 = 40·10 = 400$.
Logo, a soma dos 20 primeiros ímpares é 400.

Conteúdos conceituais e atitudinais relacionados nesse plano de aula

Conceituais: Progressão Aritmética.

Atitudinais: Interesse pelo conhecimento e pela compreensão do conteúdo.

Conhecimentos prévios

Operações com números Reais e noções sobre Sequências.

Estratégias e recursos da aula

Essas três atividades podem ser propostas em grupos de até três alunos, visando à troca de informação entre eles. Como recurso pode-se utilizar o quadro branco, ou de giz e folha de atividades.

ATIVIDADES

Habilidades e Competências relacionadas ao currículo mínimo:

- Identificar sequências numéricas e obter a expressão algébrica do seu termo geral.
- Utilizar o conceito de sequência numérica para resolver problemas significativos.
- Utilizar as fórmulas do termo geral e da soma dos termos da PA na resolução de problemas significativos.

ATIVIDADE 1

O objetivo dessa atividade é fazer com que os alunos sejam capazes de formar uma PA após encontrar o valor de sua razão.

ENUNCIADO: No primeiro semestre de um dado ano, a produção mensal de uma montadora está em PA crescente. Em janeiro, a produção foi de 18000 carros e, em junho, foi de 78000 unidades. Qual foi a produção dessa montadora nos meses de fevereiro, março, abril e maio?

RESOLUÇÀO:

Nessas condições, o problema consiste em formar um PA na qual:

a_1 = produção de __________ = __________ carros

a_n = produção de __________ = __________ carros

n = _________

Devemos inicialmente calcular o valor da razão r. Para isso vamos utilizar a fórmula do termo geral da PA. $a_n = a_1 + (n – 1)\cdot r$,

Substituindo os valores temos _____ = _____ + (_____ - 1).r ->

_____ - _____ = (_____).r ->

_____ = (_____).r

_____ = r

Logo, a razão dessa PA é _____.

Assim, temos que: a_2 =_____, a_3 = _____, a_4 = _____ e a_5 = _____.

ATIVIDADE 2

O objetivo dessa atividade é fazer com que os alunos sejam capazes de formar uma PA que obedeça aos critérios determinados na questão.

ENUNCIADO: Três números estão em PA; o produto deles é 66 e a soma é 18. Vamos calcular esses números.

RESOLUÇÀO:

Vamos indicar essa PA por (x – r, x, x + r), em que r é a razão.

Como o produto desses termos é 66, podemos escrever: $(x - r) \cdot x \cdot (x + r)$ = _____.

(Vamos chamá-la de 1ª equação)

Como a soma desses termos é 18, podemos escrever $(x - r) + x + (x - r)$ = _____.

(Vamos chamá-la de 2ª equação)

Assim formamos um sistema.

Aplicando a propriedade da distributiva na 1ª equação, temos: $x \cdot (x^2 – \_\_\_\_) = 66$.

Adicionando os termos semelhantes na 2ª equação, temos: $\_\_\_\_\cdot x = 18$. Isolando x, temos: x = ____.

Substituindo esse valor de x na 1ª equação temos: $\_\_\_\_\cdot(\_\_\_^2 – r^2) = 66$ ->

$\_\_\_\_\_ - r^2 = 66$ -> $\_\_\_\_ - 66 = r^2$ -> $\_\_\_\_ = r^2$ -> r = _____ (positivo) ou _____ (negativo).

Sendo x = 6 e r = _____ (positivo), temos:

x – r = 6 - _____ = _____

x + r = 6 + _____ = _____

Sendo x = 6 e r = _____ (negativo), temos:

x – r = 6 - _____ = _____

x + r = 6 + _____ = _____

Portanto, os números encontrados são _____, 6 e _____, que estabelecem duas PA: (____, _____,_____) e (____, _____,_____)

ATIVIDADE 3

O objetivo dessa atividade é fazer com que os alunos sejam capazes de encontrar a razão de uma PA obedecendo aos critérios determinados na questão.

ENUNCIADO: A soma dos dez primeiros termos de uma PA é 200. Se o 1º termo é 2, determine a razão dessa PA.

RESOLUÇÀO:

Nessa PA, temos que $S_{10} = 200$, a_1 = _____ e n = _____.

Vamos calcular a_{10} aplicando a fórmula da soma dos termos: $Sn = (a_1 + a_{10})\cdot n/2$

Substituindo os valores, temos -> $S_{10} = (\_\_\_\_ + a_{10})\cdot\_\_\_\_ / 2$ ->

$200 = (\_\_\_\_\_ + a_{10})\cdot\_\_\_\_$ ->

$200/\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ + a_{10}$ ->

$\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ + a_{10}$ ->

$\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_ = a_{10}$ ->

_____ = a_{10}
Assim, temos que a_{10} = _____.

Vamos calcular a razão dessa PA aplicando a fórmula do termo geral: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$
Substituindo os valores temos: a_{10} = _____ + (10 – 1)·r ->
_____ = _____ + _____·r ->
_____ - _____ = _____ ·r ->
_____ = _____·r ->
_____ = r
Assim temos que a razão dessa PA é _____.

AVALIAÇÃO

Habilidades e Competências relacionadas ao Currículo Mínimo:

- Identificar sequências numéricas e obter a expressão algébrica do seu termo geral.
- Utilizar o conceito de sequência numérica para resolver problemas significativos.
- Utilizar as fórmulas do termo geral e da soma dos termos da PA na resolução de problemas significativos.

- Realização de fichas de exercícios (Valendo 0.5 ponto).

Lista de exercícios de fixação
Observação: Essas atividades devem ser feitas em dupla ou trio.

1) Um ciclista percorre 40 km na primeira hora; 34 km na segunda hora, e assim por diante, formando uma progressão aritmética. Quantos quilômetros percorrerá em 6 horas?

2) Ao financiar uma casa no total de 20 anos, Carlos fechou o seguinte contrato com a financeira: para cada ano, o valor das 12 prestações deve ser igual e o valor da prestação mensal em um determinado ano é R$ 50,00 a mais que o valor pago, mensalmente, no ano anterior. Considerando que o valor da prestação no primeiro ano é de R$ 150,00, determine o valor da prestação no último ano.

3) (Fuvest – SP) Determine quantos múltiplos de 9 há entre 100 e 1 000.

4) Determine o 20º elemento e a soma dos termos da seguinte progressão aritmética: (2, 7, 12, 17,...).

5) (ENEM - 2011) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34500; em março, 36000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

6) Numa PA em que $a_1 = 2$ e $a_{20} = 10$. Qual é a soma dos 20 primeiros termos dessa PA?

7) Quantos termos tem a Progressão Aritmética (15, 5, ..., -5.005)?

8) Em uma Progressão Aritmética, em que o septuagésimo termo é 300 e o octingentésimo termo é 400, a razão desta PA vale quanto?

9) Se a seqüência (-8, a, 22, b, 52) é uma progressão aritmética, então o produto a.b é igual a quanto?

10) As idades inteiras de três irmãos formam uma PA, e a soma delas é igual a 15 anos. Qual é a idade máxima, em anos, que o irmão mais velho pode ter?

11) Determine quantos múltiplos de 6 há entre 10 e 1000?

12) Interpole 5 meios aritméticos entre 15 e 195.

13) O número 15 possui quantos múltiplos de dois dígitos?

14) Qual é o trigésimo múltiplo de 21?

15) Uma progressão aritmética finita possui 39 termos. O último é igual a 176 e o central é igual a 81. Qual é o primeiro termo dessa progressão?

16) Uma sucessão de números igualmente distantes um após o outro, tem como décimo e vigésimo termos, respectivamente os números 43 e 83. Qual é o trigésimo termo desta sucessão?

17) A soma dos dez termos de uma PA é igual a -35. O último termo é igual ao número de termos. Qual é o primeiro termo?

18) Há uma certa PA, que tanto o primeiro termo, quanto a razão são iguais ao número de termos. Sabe-se que a soma do primeiro com quarto termo é igual a 40. Qual é esta PA?

19) Se somarmos do quinto ao décimo nono termo de uma PA, quanto dará esta soma sabendo-se que o quinto termo é igual a 32 e o décimo nono é igual a 81?

20) A soma dos 3 termos de uma PA decrescente finita é igual a 21 e o seu produto é igual a 231. Qual é o valor do último termo?

- Realização de uma mini “feira”, onde os alunos através de cartazes e outros artifícios apresentarão o conteúdo assimilado a outras turmas (Valendo 1.0 ponto).

BIBLIOGRAFIA

- Secretaria de Estado de Educação. Disponível em <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br> Acessado em 09 de Junho de 2013 .
- DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações. Volume único. São Paulo: Ática, 2000.

- IEZZI, Gelson. Matemática: ciência e aplicações, 1 : ensino médio. São Paulo: Saraiva, 2010.