Planejamento sobre Sistemas Lineares.

Formação continuada para professores de matemática Fundação CECIERJ/SEEDUC-RJ

Colégio: E.E Lucas da Silva - 2°ano turma 2001

Prof: Heloiza Helena Rafael de Souza

Tutor:Edeson

Grupo:

Introdução

Este trabalho tem o objetivo de elucidar as questões que envolvem sistemas lineares. Ele está motivado em problemas concretos, para ser desenvolvido no período de 14 aulas de 50 minutos, por meio de aulas práticas e teóricas, utilizando durante sua execução vários recursos.

Deve-se observar que, em primeiro lugar, a equação linear é, necessariamente, uma equação polinomial. Em matemática pura, a teoria de sistemas lineares é um ramo da álgebra linear. Também na matemática aplicada, podemos encontrar vários usos dos sistemas lineares. Exemplos são a física, a economia, a engenharia, a biologia, a geografia, a navegação, a aviação, a cartografia, a demografia, a astronomia.

Atualmente sabemos que contextualizar o conteúdo é mais que necessário para que o aluno não simplesmente aprender a manusear algebricamente as operações matemática e sim possa entender o significado real de tal fato e qual influência isso tem em sua vida.

Deverá ser destinado 2 tempos para explicação desta parte teórica do conteúdo

Equação Linear

Toda equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ é denominada **equação linear**, em que:

- $a_1, a_2, ..., a_n$ são coeficientes
- $x_1, x_2, ..., x_n$ são as incógnitas
- b é um termo independente

Exemplos:

a) $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5$ é uma equação linear de três incógnitas.

b) $x + y - z + t = -1$ é uma equação linear de quatro incógnitas.

Sistema linear.

Denomina-se sistema linear de *m* equações nas *n* incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ todo sistema da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \quad \rightarrow a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, b_1, b_2, ..., b_n \text{ são números reais.}$$

Se o conjunto ordenado de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ satisfizer a todas as equações do sistema, será denominado solução do sistema linear.

Expressão matricial de um sistema de equações lineares.

Dentre suas variadas aplicações, as matrizes são utilizadas na resolução de um sistema de equações lineares.

Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Utilizando matrizes, podemos representar este sistema da seguinte forma:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{matriz constituída}}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}} . \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matriz coluna}}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matriz coluna}}}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ ... \\ b_n \end{bmatrix}}$$

pelos coeficientes das incógnitas | constituída pelas incógnitas | dos termos independentes

Observe que se você efetuar a multiplicação das matrizes indicadas irá obter o sistema dado.

Se a matriz constituída pelos coeficientes das incógnitas for quadrada, o seu determinante é dito determinante do sistema.

Exemplo:

Seja o sistema: $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -1. \\ 7x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$

Ele pode ser representado por meio de matrizes, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 6 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

.

Exercício de Verificação:

1-Seja o sistema $S_1 : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$.

a)Verifique se (2, -1, 1) é solução de S.

b)Verifique se (0,0,0) é solução de S

2-Expresse matricialmente os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2a + b + c = -1 \\ a \quad + c = 0 \\ -3a + 5b - c = 2 \end{cases}$

3- A expressão matricial de um sistema S é $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$. Determine as equações de S.

Método de resolução de sistema

Deverá ser destinado 3 tempos para explicação desta parte teórica do conteúdo

- Método da Adição
- Método da Substituição
- Regra de Cramer
- Escalonamento

Resolução de um sistema de equações por adição

Este método consiste em:

- Multiplicar cada equação pelo número que nos interessa de modo que uma incógnita tenha coeficientes opostos nas duas expressões.
- Somar as equações do sistema para obter uma outra equação com u
única incógnita.
- Resolver a equação de primeiro grau assim obtida.

$$\begin{cases} x+2y=17 \\ x-2y=-11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y=17 \\ x-2y=-11 \end{cases} +$$

$$2x-0y=6$$
$$2x=6$$
$$x=\frac{6}{2}$$
$$x=3$$

Substituindo, $x=3$

$$x+2y=17$$
$$3+2y=17$$
$$2y=17-3$$
$$2y=14$$
$$y=\frac{14}{2}$$
$$y=7$$

Resolução de um sistema de equações por substituição

Esse método consiste em:

- Isolar uma das incógnitas numa das equações.
- Substituir a expressão do valor desta incógnita na outra equação.
- Resolver a equação de primeiro grau assim obtida.

$$\begin{cases} x+3y=34 & I \\ 2x-y=-2 & II \end{cases}$$

1ª equação:

isolando _x:

$$x+3y=34$$
$$x=34-3y$$

2ª equação

$$x=34-3y$$
$$2x-y=-2$$
$$2(34-3y)-y=-2$$
$$68-6y-y=-2$$
$$-6y-y=-2-68$$
$$-7y=-70*(-1)$$
$$7y=70$$
$$y=\frac{70}{7}$$
$$y=10$$

$$y=10$$
$$x=34-3y$$
$$x=34-3*10$$
$$x=34-30$$
$$x=4$$

Resolução de um sistema de equações por Cramer

É uma das maneiras de resolver um sistema linear, mas só poderá ser utilizada na resolução de sistemas que o número de equações e o número de incógnitas forem iguais. Portanto, ao resolvermos um sistema linear de n equações e n incógnitas para a sua resolução devemos calcular o determinante (D) da equação incompleta do sistema e depois substituirmos os termos independentes em cada coluna e calcular os seus respectivos determinantes e assim aplicar a regra de Cramer que diz:
Os valores das incógnitas são calculados da seguinte forma:

$$x=\frac{D_X}{D} \qquad y=\frac{D_y}{D}$$

$$\begin{cases} x+y=200 \\ 5x+10y=1400 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}=10-5=5$$

$$Dx=\begin{vmatrix} 200 & 1 \\ 1400 & 10 \end{vmatrix}=2000-1400=600$$

$$Dy=\begin{vmatrix} 1 & 200 \\ 5 & 1400 \end{vmatrix}=1400-1000=400$$

x = Dx / D = 600 / 5 = 120
y = Dy / D= 400 / 5 = 80

Roteiro de Ação 1 – Que método escolher?

- DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos
- ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática
- ASSUNTO: Sistemas de Equações Lineares
- OBJETIVOS: Resolver um sistema de equações lineares de 2 equações e 2 incógnitas algébrica e graficamente
- PRÉ-REQUISITOS: Equação do 1º grau, representação gráfica de uma equação do 1º grau com duas incógnitas
- MATERIAL NECESSÁRIO: folha de atividades, lápis, borracha, régua, papel quadriculado
- ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Individualmente ou em duplas
- DESCRITORES ASSOCIADOS:

 Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática

 Resolver problemas utilizando sistemas lineares

1-Para cada um dos sistemas a seguir diga qual o melhor método para resolvê-lo e por que (não é necessário resolver o sistema).

a) $\begin{cases} x-2y=0 \\ x+2y=12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y=5 \\ -2x+3y=-3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x-2y=8 \\ 3x-5y=1 \end{cases}$

2- Considere o seguinte sistema linear $\begin{cases} 4x-9y=1 \\ -5x+6y=4 \end{cases}$

O que você faria para eliminar uma das incógnitas do sistema usando o método da adição? Uma possibilidade é multiplicar a primeira equação por 2 e a segunda equação por ____ e somar as duas para eliminar os termos em y.

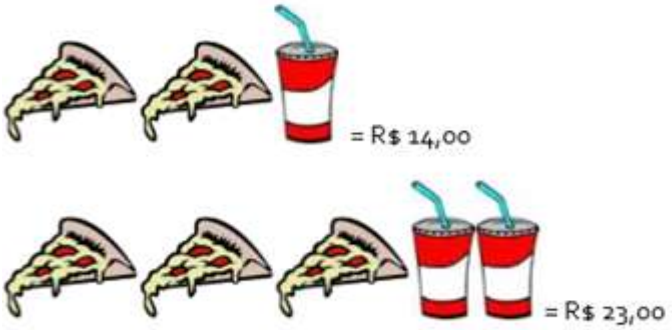
Uma outra possibilidade é multiplicar a primeira equação por ____ e a segunda equação por ____ e somar as duas para eliminar os termos em x.

Resolva o sistema das duas formas diferentes e verifique que em ambos os casos chega-se na resposta x = – 2 e y = – 1

3-

Observe os desenhos a seguir e responda o que se pede.

a) Invente um problema para a situação representada abaixo.



Nota ao DI: deixar quatro linhas para resposta.

b) Escreva um sistema para a situação. Lembre-se de indicar a letra que usou para a pizza e para o refrigerante.

 ______________  ______________

c) Resolva o sistema

Roteiro de Ação 2 – Problema das Passagens

- DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos
- ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática
- ASSUNTO: Sistemas de Equações Lineares
- OBJETIVOS: Modelar e Resolver problemas envolvendo sistemas de equações lineares de 2 equações e 2 incógnitas
- PRÉ-REQUISITOS: Equação do 1º grau
- MATERIAL NECESSÁRIO: folha de atividades, lápis, borracha, calculadora
- ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Individualmente ou em duplas
- DESCRITORES ASSOCIADOS:

- Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática
- Resolver problemas utilizando sistemas lineares

Considere o problema a seguir, enfrentado por João. João é motorista em uma linha do chamado "transporte alternativo", que serve a moradores de um bairro. Esta linha admite dois tipos de passageiros, com dois valores de passagem distintos: os moradores que utilizam o transporte para circular dentro do próprio bairro, e moradores que utilizam o transporte para sair do bairro. Considere que a passagem dentro do bairro custa atualmente R$ 2,00 e a passagem para fora do bairro custa R$ 2,50. João não faz anotação de quantas passagens recebe de cada tipo, apenas realiza uma marcação para cada passageiro que embarca. Assim, no final do dia, possui apenas o total de passageiros transportados, bem como o valor total em dinheiro arrecadado. Entretanto, João precisa saber quantos passageiros transportou no último domingo em cada modalidade, pois ele gasta muito combustível ao sair do bairro e quer saber se o número de passageiros que transporta compensa a saída, ou se é melhor que no próximo domingo ele fique apenas dentro do bairro (o que também é uma possibilidade dentro de sua linha). Ao observar o faturamento do último domingo, João percebeu que transportou 51 passageiros, e arrecadou R$ 116,00 em passagens. E ficou a dúvida: quantos passageiros ele transportou em cada uma das modalidades?

Vamos analisar o problema do João?
Inicialmente temos que pensar... Como podemos representar o valor arrecadado por João em cada modalidade, dado o valor da passagem e a quantidade de passageiros transportados? Para isto, responda as perguntas a seguir:

1) Se tivéssemos apenas 3 passageiros, todos dentro do bairro, pagando o valor de passagem correspondente (R$ 2,00), qual seria o valor arrecadado ao final do percurso?

   a) Qual o valor arrecadado com o transporte de 10 passagens dentro do bairro? E se fossem 50?

   b) Escreva uma expressão algébrica que represente o valor arrecadado com x passageiros dentro do bairro.

2) Escreva uma expressão algébrica que represente o valor arrecadado com y passageiros para fora do bairro, da mesma forma que você fez no item anterior.

3) Considere que João transportou 3 passageiros para dentro do bairro e 4 para fora do bairro.
   a) Qual o total de passageiros transportados?

   b) Qual o valor arrecadado com cada modalidade de passageiro?

   c) Qual o valor total arrecadado?

Lembre-se que são desconhecidos o número de passageiros dentro do bairro (x) que pagam R$2,00 e o número de passageiros para fora do bairro (y), que pagam R$2,50.

4) Usando x e y, escreva uma equação que represente o total de passageiros transportados, lembrando que foram transportados 51 passageiros no total?

5) Usando x e y para a quantidade de passageiros fora do bairro, escreva uma equação que represente o valor arrecadado, lembrando que foram arrecadados R$116,00 no total? Você acha possível resolver esta equação isoladamente e encontrar uma única solução? Por quê?

6) Escreva o sistema de equações que permite a João saber quantos passageiros ele transportou em cada modalidade.

7) Resolva o sistema com o método que julgar mais conveniente. Não se esqueça de fornecer sua resposta na forma "___ passageiros dentro do bairro, e ___ passageiros para fora do bairro".

8) Agora que você sabe quantos passageiros foram transportados em cada modalidade, vamos descobrir quanto foi arrecadado por João em cada modalidade e ajudá-lo a decidir o que fazer.
a) Quanto João arrecadou com passagens dentro do bairro?

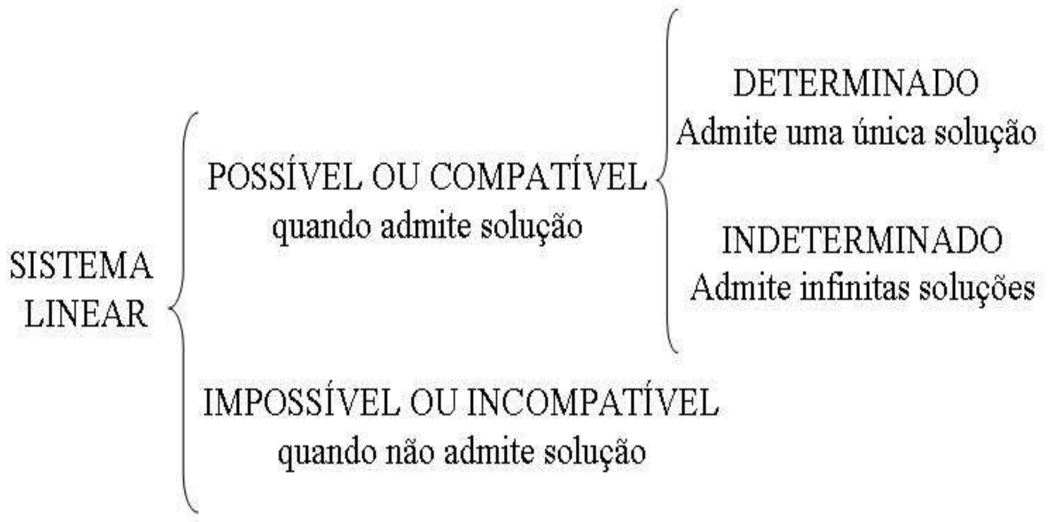
b) Quanto João arrecadou com passagens para fora do bairro?

c) Considerando que só vale a pena para João sair do bairro se o faturamento para fora do bairro for superior ao faturamento dentro do bairro em pelo menos R$ 20,00, decida se João deve ou não transportar passageiros para fora do bairro no próximo domingo.

Deverá ser destinado 3 tempos para explicação desta parte teórica do conteúdo

Classificação dos sistemas lineares

Os sistemas lineares são classificados, quanto ao número de soluções, da seguinte forma:

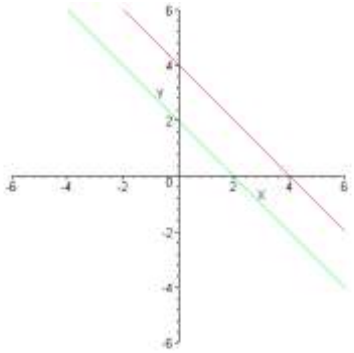


Representação gráfica dos Sistemas Lineares.

Os pares ordenados de números reais que são soluções de uma equação linear com duas incógnitas determinam, no gráfico, uma reta. A interseção das duas retas determinam sua solução, se existir.

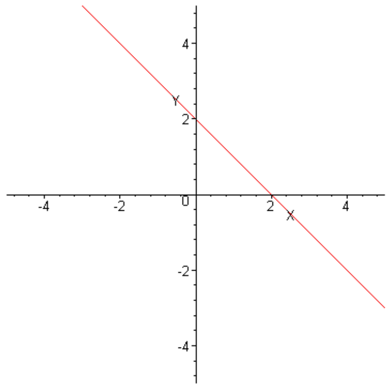
- ✓ Retas Concorrentes sistema possível e determinado
- ✓ Retas Coincidentes sistema possível e indeterminado.
- ✓ Retas Paralelas sistema impossível

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$$



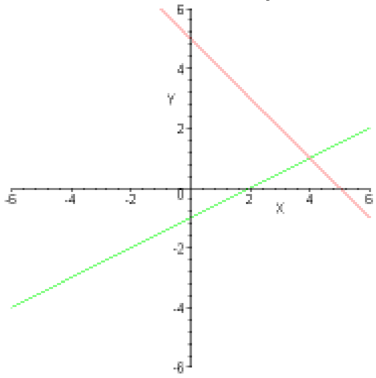
Retas Paralelas

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$



Retas Coincidentes

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$



Retas Concorrentes

Roteiro de Ação 4 – Gráficos e Sistemas

- DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos
- ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática
- ASSUNTO: Sistemas de Equações Lineares
- OBJETIVOS: Correlacionar a representação algébrica de um sistema com sua representação gráfica
- PRÉ-REQUISITOS: Equação do 1º grau com 2 variáveis, representação gráfica de uma equação do 1º grau com 2 variáveis
- MATERIAL NECESSÁRIO: folha de atividades, lápis, borracha
- ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: Individualmente ou em duplas
- DESCRITORES ASSOCIADOS:

□ Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática

□ Resolver problemas utilizando sistemas lineares

<u>Atividade</u>.

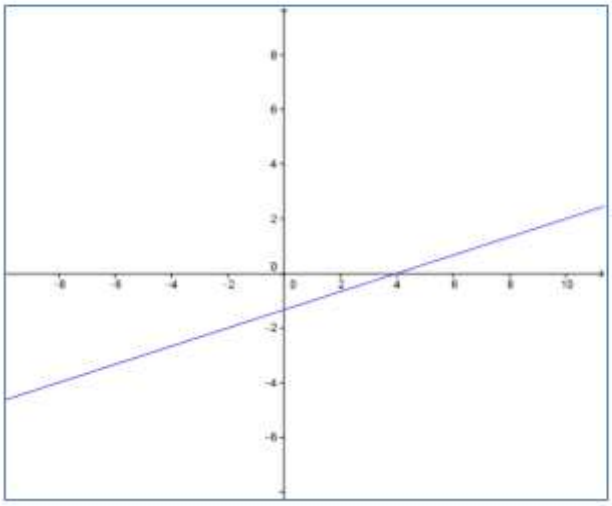
Associe cada sistema com seu o gráfico correspondente justificando sua resposta:

(A) $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$

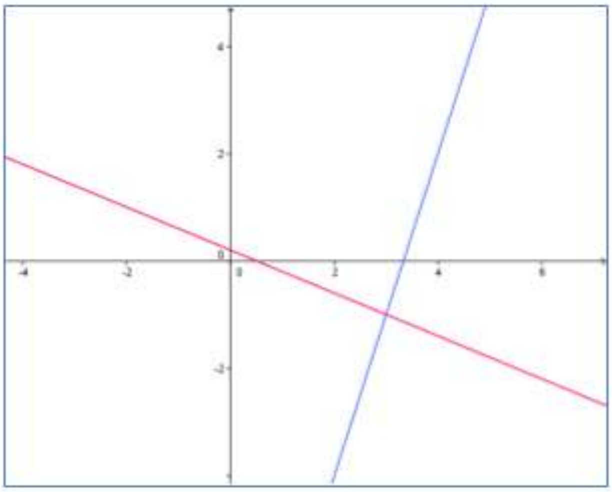
(C) $\begin{cases} 2x - 6y = 8 \\ 3x - 9y = 12 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$

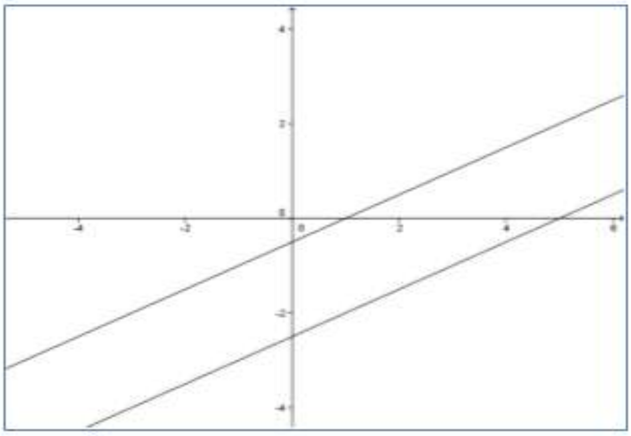
(D) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$



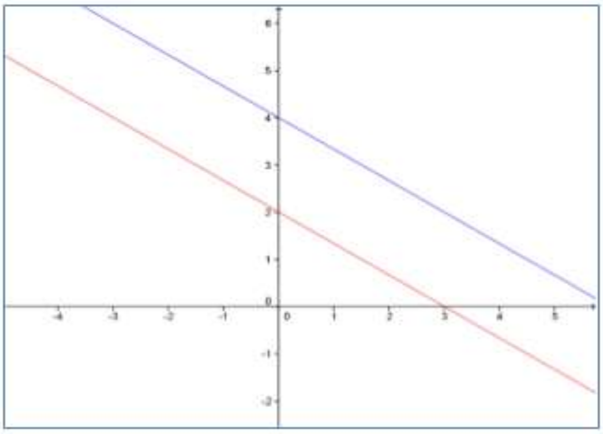
( )



( )



( )



( )

Use o Geogebra para verificar se o sistema a seguir são possíveis (determinados ou indeterminados) ou impossível.

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x + 3y = 6 \\ 8x - 12y = -24 \end{cases}$

Avaliação

Os discentes serão avaliados na execução das atividades dos roteiros de ação, juntamente com os trabalhos e provas executados durante o bimestre.

Referências bibliográficas

- Interpretação gráfica do sistema linear disponível em http://www.dm.ufscar.br/~yolanda/cursos/al1/maple/Esc_graf1.html Acesso 20/10/13

- Matemática: uma nova abordagem,vol.1/Giovanni,Bonjorno-São Paulo :FTD2000

- Regra de Cramer disponível em http://www.somatematica.com.br/emedio/sistemas/sistemas3.php Acesso15/10/13.

- Resolução de sistemas disponível em http://www.brasilescola.com/matematica/sistema-duas-equacoes.htm e http://exercicios.brasilescola.com/matematica/exercicios-sobre-regra-cramer.htm Aceso 11/10/13

- Roteiro de Ação 1 – Que método escolher?

- Roteiro de Ação 2 – Problema das Passagens

- Roteiro de Ação 4 – Gráficos e Sistemas

- Sistema de equações disponível em http://www.klickeducacao.com.br/materia/20/display/0,5912,POR-20-86-966-5855,00.html Acesso 12/10/13