FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ

CURSO: MATEMÁTICA 1º ANO do ENSINO MÉDIO
3º BIMESTRE DE 2013

Tarefa 2: Trigonometria no círculo

Cursista: Waine Vieira Junior
Tutor: Emilio Rubem Batista Junior

Rio de Janeiro
Setembro de 2013

Sumário

Introdução:

O intuito deste trabalho é apresentar as razões trigonométricas na circunferência.

Após uma rápida revisão das relações trigonométricas observadas no triângulo retângulo, onde trataremos das relações ditas fundamentais (seno, co-seno e tangente) proporemos uma pequena bateria de exercícios, ainda com a intenção de revisar este conteúdo, de modo a “preparar o terreno” para a trigonometria no contexto do círculo trigonométrico.

Em seguida, cabe definir conceitualmente o que é um círculo bem como o que são os arcos da circunferência. Isto será de enorme importância para a introdução das unidades de medida do arco, a saber: os graus e os radianos. Apresentadas as medidas, também trataremos de converter uma unidade na outra.

Para concluir este plano, iremos abordar a construção do círculo trigonométrico, de modo a preparar terreno para tratar as relações trigonométricas no círculo propriamente. Partindo de sua definição formal, proporemos que os alunos construam um círculo trigonométrico utilizando a ferramenta *GeoGebra*. Deste modo, utilizaremos para esta atividade, a base do Roteiro de ação 4, com algumas pequenas modificações.

Assim sendo, podemos notar basicamente 3 etapas para a elaboração deste plano: uma revisão da trigonometria no contexto do triângulo retângulo, a definição de círculo (e de arco do círculo) onde também apresentamos as unidades de medida em graus e em radianos. E uma terceira etapa, que objetiva construir as condições necessárias para tratar as relações trigonométricas observadas no triângulo retângulo, agora no círculo. Cabe ressaltar o uso do computador como ferramenta didática para este conteúdo específico, de modo a criar uma nova experiência de aprendizado deste conteúdo.

Assim imaginamos ser necessário, para uma boa implementação deste plano, 5 tempos de 50 minutos cada.

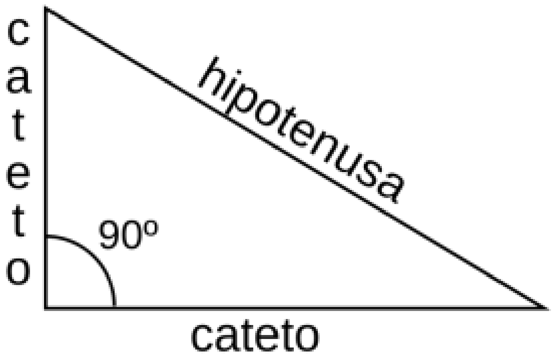
- **Habilidade Relacionada: H11** – Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos.
- **Pré-Requisitos:** Habilidades operatórias envolvendo frações, domínio operatório do Teorema de Pitágoras.
- **Tempo de duração:** 50 min.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Folha de exercícios.
- **Organização da turma:** Individual.
- **Objetivos:** Recapitular as razões trigonométricas no triângulo retângulo.
- **Metodologia:** Apresentação de breve revisão do conteúdo visto, seguida de resolução de folha de exercício.

Vamos Relembrar

Você se lembra da trigonometria que vimos anteriormente? Vamos lembrar os elementos mais importantes:

1. O triângulo retângulo:

Este é bastante simples: são todos os triângulos com um ângulo reto (90 graus). O maior lado deste triângulo (na verdade, em qualquer triângulo) é sempre o lado oposto ao maior ângulo – justamente o ângulo reto. Chamamos este lado de hipotenusa. Aos demais lados, damos o nome de catetos.



Agora vamos nos lembrar que, para definir as relações trigonométricas de um ângulo não nulo α, considera-se um triângulo retângulo que possui um ângulo igual a α. As relações são definidas como:

a. **Seno:** É a razão entre o cateto **oposto** ao ângulo α e a **hipotenusa**.

b. **Co-seno:** É a razão entre o cateto **adjacente** ao ângulo α e a **hipotenusa**.

c. **Tangente:** É a razão entre o cateto **oposto** e o cateto **adjacente** ao ângulo α.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Agora que você já se recordou, resolva rapidamente os exercícios abaixo:

1) Dado o triângulo ABC, retângulo em A, calcule:

a) sen B

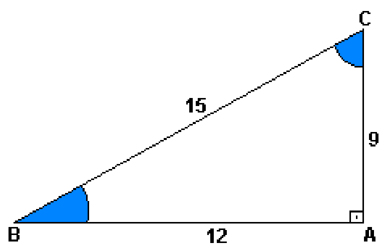
b) cos B

c) tg B

d) sen C

e) cos C

f) tg C



2) Dado o triângulo CDE, retângulo em C, calcule:

a) sen D

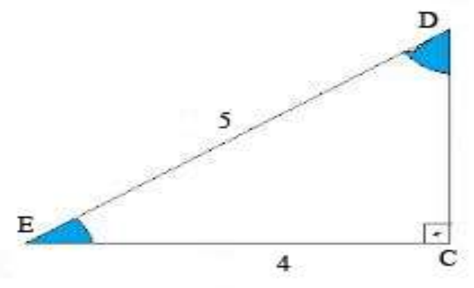
b) cos D

c) tg D

d) sen E

e) cos E

f) tg E



- **Habilidade Relacionada: H45** – Reconhecer/Identificar diferentes representações de um mesmo número racional.; **H21** – Transformar grau em radiano ou vice-versa;
- **Pré-Requisitos:** Habilidades operatórias envolvendo frações, regra de três.
- **Tempo de duração:** 100 min.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Folha de exercícios.
- **Organização da turma:** Individual.
- **Objetivos:** Definir círculo, circunferência e arco da circunferência, compreender os procedimentos necessários para a medida da amplitude de um arco, apresentar a conversão de unidades de medida de arcos (graus para radianos e vice-versa).
- **Metodologia:** Após uma pequena apresentação do conteúdo, preenchimento de folha de exercícios a ser entregue como parte da avaliação.

Ainda recordando: você se lembra o que é um círculo?

Antes de mais nada, vamos colocar os pingos nos is: qual a diferença entre **círculo** e **circunferência**?

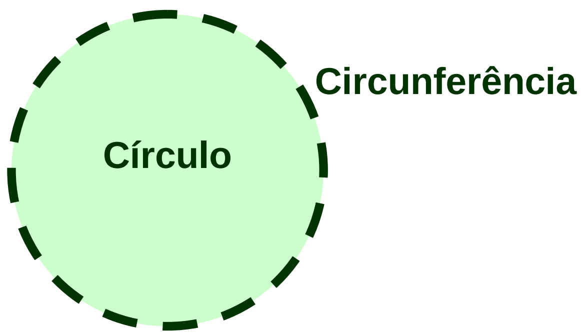
Para essa, podemos recorrer rapidamente ao bom e velho dicionário. Segundo o dicionário Houaiss, temos:

- **Círculo:** superfície plana limitada por uma linha curva -- a circunferência -- cujos pontos são eqüidistantes de um ponto fixo -- o centro;

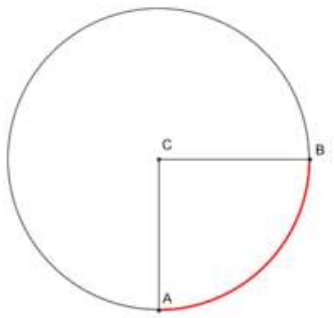
- **Circunferência:** Linha curva fechada, regular ou não, que limita um círculo.

De fato, se tomarmos a definição formal de circunferência, veremos que ela é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada. A esse ponto dado, chamaremos de ***centro***, e a distância dada é o chamado ***raio*** da circunferência.

Trocando em miúdos, poderíamos dizer que circunferência é *a borda*, e círculo, *o recheio*.



Indo um pouco mais adiante, iremos agora definir o que é um ***arco***:



Chamamos de arco a qualquer porção compreendida entre duas extremidades de uma *curva*. É o caso, por exemplo, do arco de uma circunferência, uma vez que, como acabamos de ver, uma circunferência constitui uma curva. Assim, o arco corresponde a uma "fatia" de uma curva. Consequentemente, o arco da circunferência corresponde a uma "fatia" da circunferência.

Obs: Temos ainda que a metade de uma circunferência é chamada de *semi-circunferência*; e sua quarta parte é chamada *quadrante*.

Medindo os arcos de uma circunferência

Para medir o arco de uma circunferência, estaremos de fato buscando sua amplitude. A amplitude de um arco de circunferência é a medida do *ângulo* com vértice no *centro* da circunferência em questão, definido pelas extremidades do arco.

As unidades de medida de arco são:

- **Radiano**: Medida de um arco com comprimento igual ao raio da circunferência de onde estamos medindo o arco. Assim o arco tomado como unidade tem comprimento igual ao comprimento do raio ou um radiano, que denotaremos por "**1 rad**".
- **Grau**: Medida de um arco que corresponde a 1/360 do arco completo da circunferência de onde estamos medindo o arco.

Todos estamos cientes de que uma circunferência possui 360º. No entanto, quantos radianos há em uma circunferência? Podemos dizer um radiano (*1 rad.*) cabe 6 vezes em uma circunferência, e mais um restinho. Para ser mais preciso, uma circunferência equivale a 6,283184... rad. Este número foi rebatizado por **2π rad**.

Assim, podemos estabelecer a correspondência:

$$360^\circ \leftrightarrow 2\pi$$

$$180^\circ \leftrightarrow \pi$$

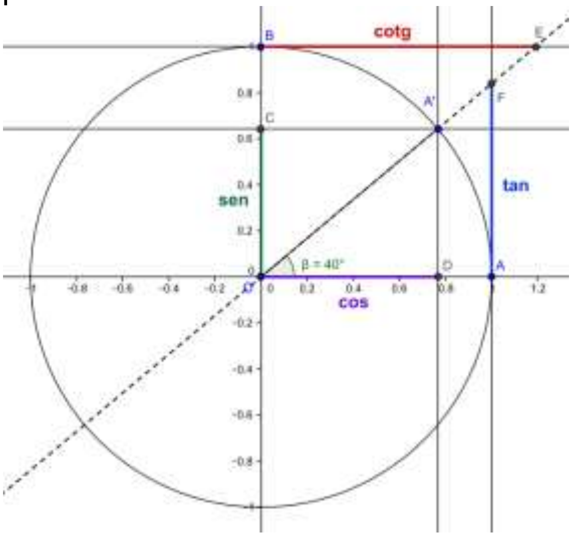
1) Utilizando a regra de três, exprima as medidas abaixo em radianos:	
a) 210º	b) 240º
c) 270º	d) 300º
e) 315º	f) 330º
2) Utilizando a regra de três, exprima as medidas abaixo em graus:	
a) $\frac{\pi}{6}$ rad	b) $\frac{\pi}{4}$ rad
c) $\frac{\pi}{3}$ rad	d) $\frac{2\pi}{3}$ rad
e) $\frac{3\pi}{4}$ rad	f) $\frac{5\pi}{6}$ rad

Atividade 3

- **Habilidade Relacionada: H02** – Associar pontos no plano cartesiano às suas coordenadas e vice-versa; **H46** – Reconhecer números reais em diferentes contextos.
- **Pré-Requisitos:** Habilidades operatórias envolvendo frações, regra de três, arcos e ângulos na circunferência; unidades de medida de arcos e ângulos (graus e radianos).
- **Tempo de duração:** 100 min.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Software GeoGebra; Folha de atividades; Laboratório de Informática / Projetor Multimídia.
- **Organização da turma:** trios.
- **Objetivos:** Conhecer a estrutura do ciclo trigonométrico; visualizar, de forma dinâmica, a representação dos arcos no ciclo trigonométrico.
- **Metodologia:** Após uma pequena apresentação do conteúdo, preenchimento de folha de exercícios a ser entregue como parte da avaliação.

Definindo o círculo trigonométrico

O Círculo Trigonométrico é um recurso criado para facilitar a visualização e operação das relações trigonométricas observadas entre os lados dos triângulos retângulos. Ele consiste em uma circunferência de raio unitário, centrada na origem dos eixos de um plano cartesiano. Há dois sentidos de marcação dos arcos no círculo: o anti-horário, que se dá a partir da origem dos arcos até o lado terminal do ângulo correspondente ao arco (positivo); e o horário, que se dá no sentido contrário ao anterior (negativo).

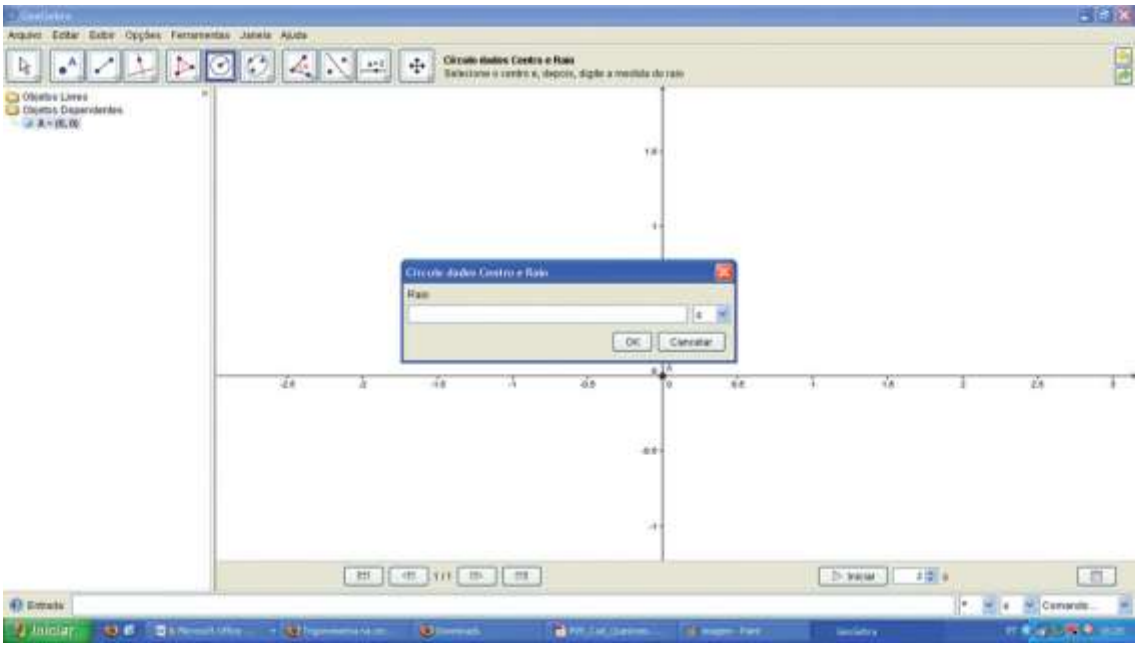


Construindo o ciclo trigonométrico

Siga as etapas abaixo, passo a passo:

a. Abra uma tela nova no *GeoGebra* e verifique se os eixos cartesianos estão aparecendo. Se não estiverem, acesse o menu: "Exibir/ Eixos" para que eles apareçam.

b. Agora, no 6º menu de botões, clique no botão – círculo dado centro e raio – e clique primeiro na origem do sistema de eixos cartesianos (0,0) e, na caixa de diálogo que aparece, digite 1 para medida do raio da circunferência.

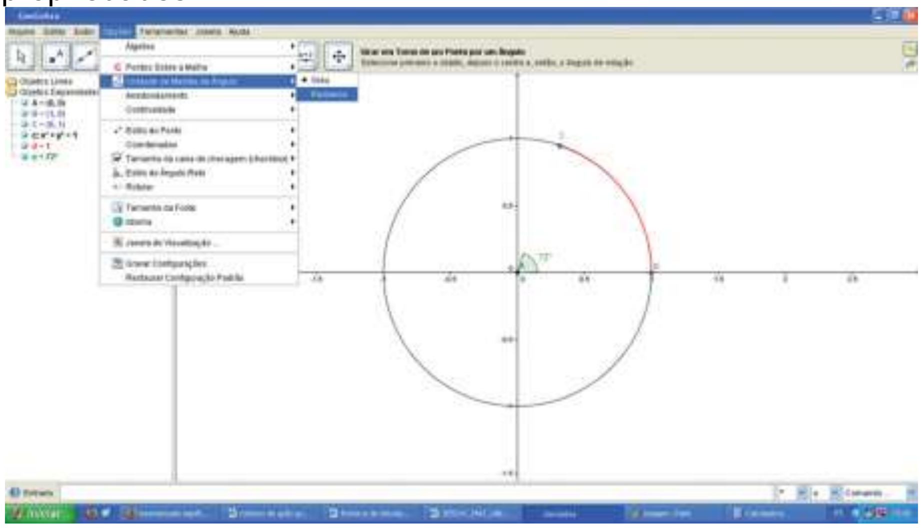


c. Os arcos no ciclo trigonométrico são orientados, ou seja, têm origem e extremidade. A origem desses arcos é no ponto (1,0) e a extremidade é em qualquer ponto do círculo trigonométrico.

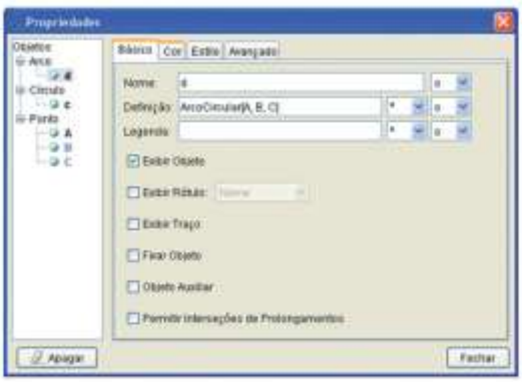
d. Para visualizar um arco no ciclo trigonométrico, vamos fazer o seguinte: Clique no botão – 2º menu de botões – e clique nos pontos (0,0) e (1,0) – o *GeoGebra* os nomeará como A e B, respectivamente – e em um outro ponto qualquer do círculo, que o software chamará de C. O arco *BC* é um arco no ciclo trigonométrico.

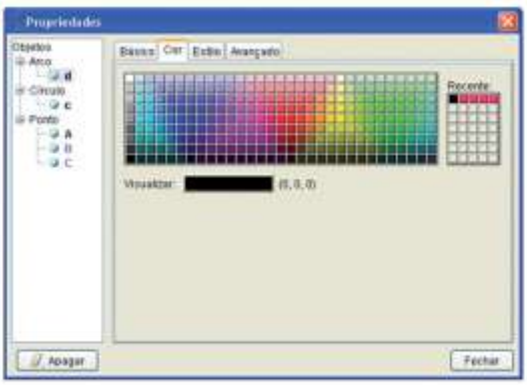
e. Para traçar este arco, clique no botão , disponível no 6º menu de botões, e sequencialmente nos pontos A, B e C – respectivamente centro, origem e extremidade do arco que desejamos traçar.

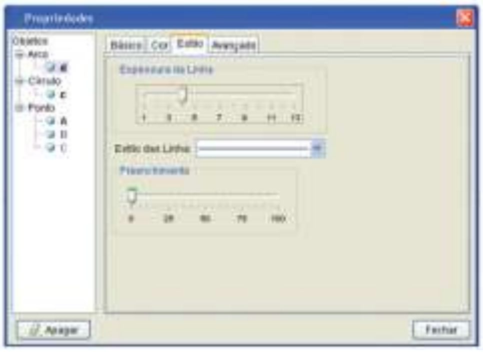
f. Observe que na Janela da Álgebra aparece um elemento novo *d* = ... Podemos ainda editar o arco *BC* , fazendo com que ele se torne mais visível... Para isso, clique com o botão direito do mouse em d. Vai abrir-se uma janela de opções; nela, selecione a opção "propriedades".



g. Aparece uma caixa de diálogo, mostrada na figura abaixo. Selecione a aba "cor" e escolha a cor vermelha; na aba "estilo", selecionando espessura da linha 3,5 e a seguir em fechar. Agora o arco *BC* aparece mais grosso e na cor vermelha, facilitando a visualização.



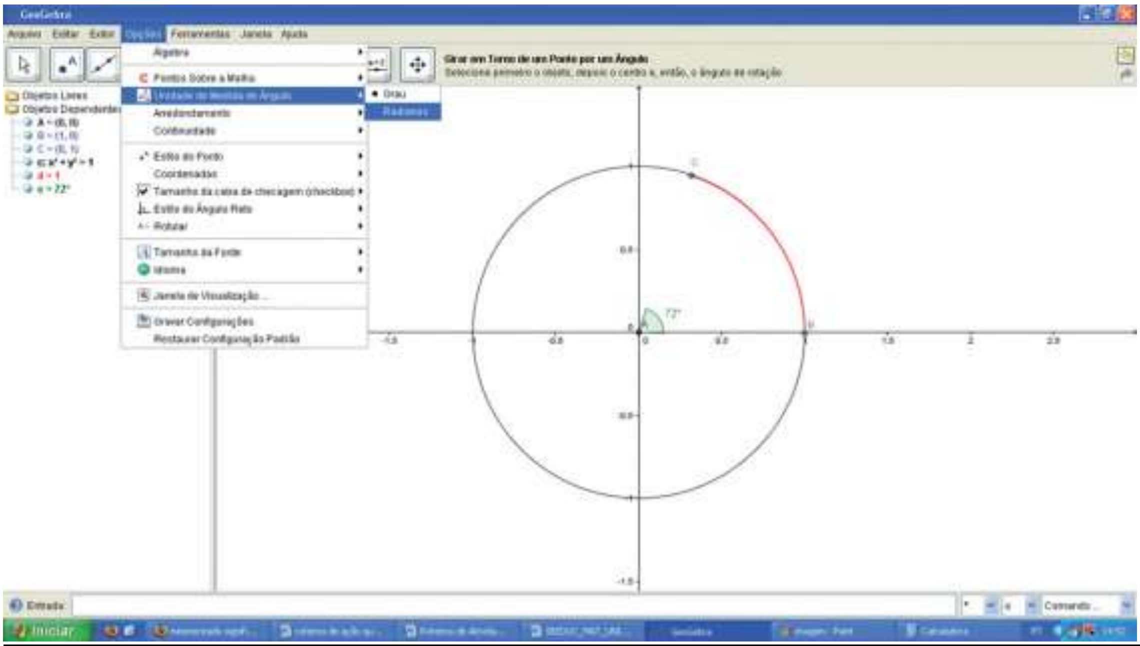




h. Posicione o ponto C de maneira que se tenha *d = 1*. Agora observe e responda: quais as coordenadas do ponto C?

i. Agora reposicione o ponto C de modo que suas coordenadas sejam *(-0,8 ; 0,6)*. Responda: qual o valor de *d*? E Quanto vale *d* quando C está sobre cada um dos pontos de intersecção do círculo com os eixos cartesianos?

j. Clique agora no botão  ,disponível no 8º menu de botões. Ele permite que determinemos a medida do ângulo $B\hat{A}C$. Clique, nesta ordem, nos pontos B, A e C e veja a medida desse ângulo. Ela provavelmente está dada em graus, que é a unidade de medida padrão para ângulos no *GeoGebra*. Converta essa medida para radianos.



Avaliação:

Para a avaliação deste plano de trabalho, temos como foco a familiarização do aluno com as relações trigonométricas fundamentais (seno, co-seno e tangente), bem como a medida da amplitude dos arcos de uma circunferência e a conversão entre as unidades de medida em questão; além de uma boa desenvoltura ao lidar com a circunferência trigonométrica. Nesse sentido, as duas primeiras atividades apresentam exercícios que irão guiar nossas avaliações a respeito do que nos propomos.

Para a terceira atividade, além dos exercícios propostos, devemos observar a maneira com que o aluno se apropria das informações e relações presentes na construção do círculo trigonométrico. Assim, a avaliação se dará em concomitância à execução das atividades propostas.

Bibliografia:

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática – Volume único*. São Paulo: Ática, 2010.

IEZZI, Gelson e MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de matemática elementar, vol. 3.* São Paulo: Atual, 2004.

ROTEIROS DE AÇÃO 4: *Trigonometria na Circunferência*. 1º Ano **|** 3º Bimestre **|** 2º Ciclo

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO. *Saerjinho 2012 – Matriz de Referência*. Rio de Janeiro, 2012.