Formação Continuada em Matemática
Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Tarefa 1 - Plano de Trabalho

Função Quadrática

Cursista: Jovani Melquiades da Silva
Tutor: Marcelo Rodrigues

Introdução

A Matemática, um conhecimento social e historicamente construído pela humanidade, auxilia na compreensão dos fenômenos naturais e no desenvolvimento científico e tecnológico, bem como no desenvolvimento de outras áreas do conhecimento, compartilhando linguagens para a representação e sistematização dos conhecimentos dessas áreas.

O objetivo desse trabalho é levar os alunos a reconhecer funções polinomiais do 2º grau, estimular o raciocínio através da interpretação de enunciados e generalização de situações para resolver problemas e reconhecer a representação algébrica e gráfica da função do 2º.

Este plano será aplicado em seis tempos de cinquenta minutos, sendo dividido da seguinte maneira: quatro tempos para aula expositiva e dois tempos reservados a avaliação dos alunos.

HABILIDADE RELACIONADA: H57 – Resolver problemas envolvendo função do 2º grau. H62 – Reconhecer a representação algébrica ou gráfica da função polinomial do 2º grau.

PRÉ-REQUISITOS: Conceito de Funções Quadráticas. Reconhecimento do gráfico da função quadrática e de suas propriedades.

TEMPO DE DURAÇÃO: 300 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático, quadro branco e exemplos adicionais.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: A turma será disposta em pequenos grupos (2 ou 3 alunos), propiciando trabalho organizado e cooperativo

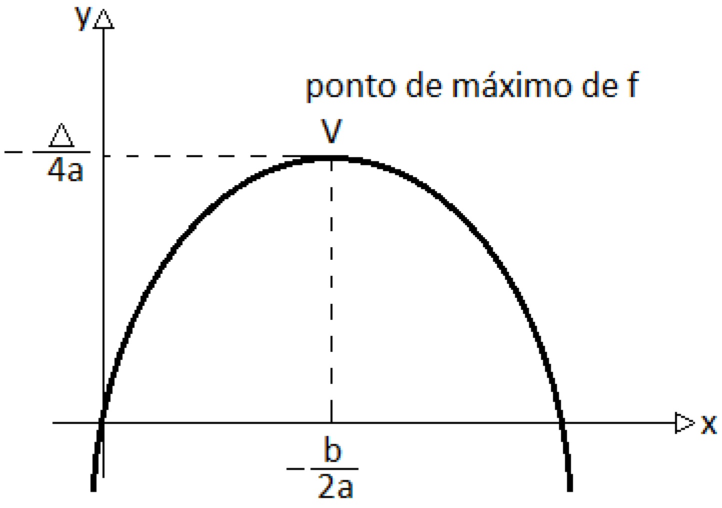
OBJETIVOS: Estimular o raciocínio através da interpretação de enunciados e generalização de situações para resolver problemas.

METODOLOGIA ADOTADA:

Aplicações de uma Função de 2º grau

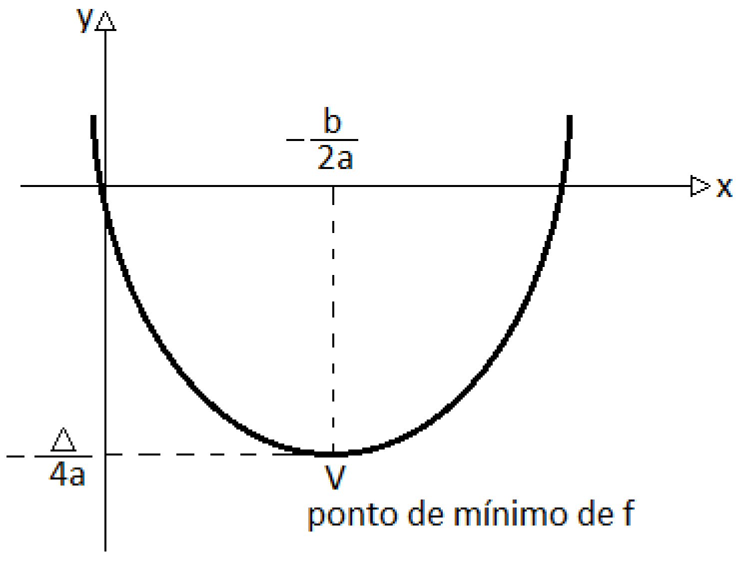
Valor máximo de uma função quadrática

Se V é o vértice da parábola que representa graficamente a função do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a < 0, então V é chamado de **ponto máximo** da função, sendo sua ordenada, $-\frac{\Delta}{4a}$, o **valor máximo** de f.



Valor mínimo de uma função quadrática

Se V é o vértice da parábola que representa graficamente a função do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a > 0, então V é chamado de **ponto mínimo** da função, sendo sua ordenada, $-\frac{\Delta}{4a}$, o **valor mínimo** de f.



Exemplo 1: Sabe-se que, sob certo ângulo de lançamento, a altura h atingida por uma pedra, e metros, em função do tempo t, em décimo de segundos, é dada por $h(t) = -\frac{t^2}{60} + t$.

a) Construir o gráfico da altura atingida pela pedra em função do tempo.

b) Qual é a altura máxima atingida pela pedra em relação ao plano horizontal de onde foi lançada?

c) Em quanto tempo, após o lançamento, a pedra atinge a altura máxima?

d) Em quanto tempo, após o lançamento, a pedra atinge o solo, suposto no mesmo plano horizontal de onde ela foi lançada?

Resolução

a) Inicialmente obtemos os pontos notáveis da parábola.

- Intersecção com o eixo das abscissas:

$$-\frac{t^2}{60} + t = 0 \rightarrow t\left(-\frac{t}{60} + 1\right) = 0$$

$$\therefore t = 0 \; ou \; -\frac{t}{60} + 1 = 0$$

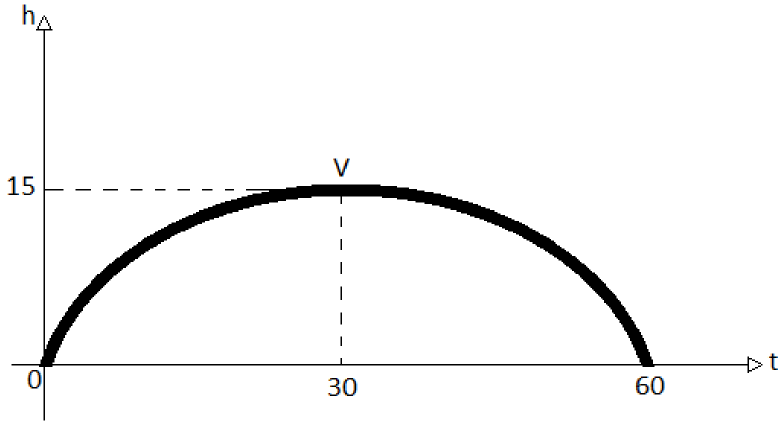
$$\therefore t = 0 \; ou \; t = 60$$

Logo, a parábola intercepta o eixo das abscissas nos pontos (0,0) e (60,0). Note, portanto, que a parábola intercepta o eixo das ordenadas também no ponto (0,0).

- Vértice

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{60}\right)} = 30 \quad e \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{\left(1^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{60} \cdot 0\right)\right)}{4 \cdot \left(-\frac{1}{60}\right)} = 15$$

Portanto, o gráfico da altura atingida em função do tempo é:



b) A altura máxima atingida pela pedra é a ordenada do vértice V do arco de parábola do item a, ou seja, 15 m.

c) O tempo para que a pedra atinja a altura máxima, após o lançamento, é a abscissa do vértice V do arco de parábola do item a, ou seja, 30 décimos de segundo.

d) A raiz positiva da função, obtida no item a, indica o tempo em que a pedra atinja o solo após o lançamento, ou seja, 60 décimos de segundo.

Exemplo 2: Uma indústria produz diariamente x kl (quilolitro) de óleo de milho, com $2 \leq x \leq 7$. O custo y de produção diário, em real por quilolitro de óleo produzido, é dado pela função $y = 40x^2 - 400x + 2600$.

a) Se a indústria fabricar 2 kl de óleo em um dia, qual será o custo de produção por quilolitro de óleo produzido nesse dia?

b) E se a indústria fabricar 7 kl de óleo em um dia?

c) Qual deve ser a produção diária para que o custo de produção por quilolitro de óleo seja mínimo?

d) Qual é o custo diário mínimo por quilolitro de óleo produzido?

Resolução:

a) Para x = 2, temos: $y = 40 \cdot 2^2 - 400 \cdot 2 + 2600 \;\; \rightarrow \;\; y = 1960$

Logo, para cada 2 kl de óleo produzidos em um dia, o custo de produção por quilolitro será R$ 1960,00.

b) Para x = 7, temos: $y = 40 \cdot 7^2 - 400 \cdot 7 + 2600 \rightarrow y = 1760$

Logo, para cada 7 kl de óleo produzidos em um dia, o custo de produção por quilolitro será R$ 1760,00.

c) $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-400)}{2 \cdot 40} = 5$

Logo, a produção diária para que o custo de produção por quilolitro de óleo seja mínimo é dada pela abscissa do vértice V, isto é, 5 kl.

d) $y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{((-400)^2 - 4 \cdot 40 \cdot 2600)}{4 \cdot 40} = \frac{-256000}{1600} = 1600$

Logo, o custo diário, por quilômetro de óleo produzido, é dado pela ordenada do vértice V, isto é, R$ 1600,00.

Exemplo 3: Segundo informam os fisiologistas, o número N de batimentos cardíacos por minuto, para um indivíduo sadio e em repouso, varia em função da temperatura ambiente T, em grau Celsius, e é dado pela função $N(T) = (0{,}1) \cdot T^2 - 4T + 90$.

a) Essa função possui máximo ou mínimo?

b) A que temperatura o número de batimentos cardíacos por minuto de uma pessoa sadia e em repouso será 90?

c) Se uma pessoa sadia estiver dormindo em um quarto com refrigeração de 20ºC, qual será o número de seus batimentos cardíacos por minuto?

Resolução:

a) Como a = 0,1 > 0, então a parábola tem a concavidade voltada para cima, logo a função tem um ponto de
mínimo.

b) Para N(T) = 90, temos:

$90 = 0{,}1 \cdot T^2 - 4T + 90 \quad \rightarrow \quad 90 - 90 = 0{,}1 \cdot T^2 - 4T \quad \rightarrow \quad 0 = 0{,}1 \cdot T^2 - 4T$

$\rightarrow \quad T(0{,}1 \cdot T - 4) = 0$

$0{,}1 \cdot T - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad 0{,}1 \cdot T = 4 \quad \rightarrow T = \dfrac{4}{0{,}1} \quad \rightarrow \quad T = 40^0 C$

Logo, para 90 batimentos por minuto a temperatura da pessoa será de 40ºC.

c) Para T = 40ºC, temos:

$N(40) = 0{,}1 \cdot 20^2 - 4 \cdot 20 + 90 \quad \rightarrow \quad 0{,}1 \cdot 400 - 80 + 90 \quad \rightarrow \quad 40 - 80 + 90 = 50$

$N(40) = \ 50$

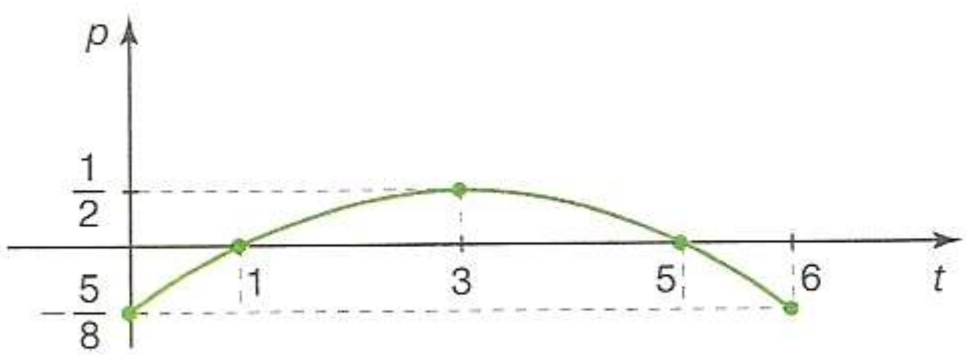
Logo, para uma temperatura de 40ºC o número de batimentos por minuto será igual a 50.

Variação de sinal da função quadrática

Quando a pressão interna de um recipiente fechado é maior que a externa, dizemos que a pressão interna no recipiente, em relação à externa, é **positiva**. Inversamente, quando a pressão interna é menor que a externa, dizemos que a externa, dizemos que a pressão interna é **negativa**, em relação à externa. Quando a pressão interna nesse recipiente é igual à externa, dizemos que essa pressão é **nula** em relação à externa. Por exemplo, quando respiramos, a pressão interna nos pulmões, em relação à externa, é negativa à expiração do ar e positiva à inspiração.

Define-se pressão relativa no interior de um recipiente fechado como a diferença entre a pressão interna e a pressão atmosférica local, nessa ordem.

Suponha que, em uma experiência, tenha-se variado a pressão interna de um recipiente, através da injeção e exaustão de ar, e que $p(t) = -\frac{t^2}{8} + \frac{3t}{4} - \frac{5}{8}$, cujo gráfico é apresentado a seguir, expressa a pressão relativa p, interna do recipiente, em atmosfera (atm), em função do tempo t, em minuto, durante o tempo que durou a experiência.



A interpretação desse gráfico permite concluir que, durante os 6 minutos que durou a experiência, a pressão relativa interna do recipiente:

- foi **positiva** para $1 < t < 5$ (isso significa que, intervalo aberto de 1 a 5 minutos, a pressão interna do recipiente foi maior que a pressão atmosférica local);
- **anulou-se** para $t = 1$ ou $t = 5$ (isso significa que, 1 minuto depois de iniciada a experiência, a pressão interna do recipiente igualou-se à pressão atmosférica local, o mesmo acontecendo 5 minutos depois de iniciada a experiência);
- foi **negativa** para $0 \leq t < 1$ ou $5 \leq t < 6$ (isso significa que, nos intervalos descritos, a pressão interna do recipiente foi menor que a pressão atmosférica local).

Nesse exemplo, estudamos a variação de sinal de uma função polinomial do 2º grau em um domínio limitado ($0 \leq t \leq 6$). Do mesmo modo, podemos estudar a variação de sinal de funções quadráticas de domínio real.

Como atividades extras serão realizados alguns exercícios do livro didático para uma melhor fixação dos conteúdos abordados em sala de aula.

Avaliação

Pensar a avaliação como uma das componentes das estratégias de ensino parte de uma concepção epistemológica construtivista, coerente com uma concepção de sujeito e, por acréscimo, com uma postura pedagógica. Avalia-se para se conhecer e só conhecendo o que o aluno sabe ou não sabe é que é possível realizar intervenções pedagógicas apropriadas, que tendam a gerar melhorias nas suas aprendizagens.

Em sala de aula os alunos em duplas irão representar graficamente, no plano cartesiano, a função quadrática, identificar o vértice e raízes da parábola, verificando as condições de existência das raízes. Deverão descrever situações do dia a dia em que esteja presente o conceito de valor mínimo e também o valor máximo de uma função quadrática.

Referência Bibliográfica

ROTEIROS DE AÇÃO – Função Polinomial do 2º Grau – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio – 3º bimestre/2013 – http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 27/08/2013.

MATEMÁTICA PAIVA, 1º Ano/Manoel PAIVA – 1ª Edição – São Paulo: Moderna, 2009.

MATEMÁTICA VOLUME ÚNICO, Dante, Luiz Roberto – 1ª Edição – São Paulo: Ática, 2005

Endereço eletrônico acessado de 20/08/2013 a 27/08/2013, citado ao longo do trabalho:

http://sisifo.fpce.ul.pt/pdfs/Revista%209%20PT%20d7.pdf