JUSSARA RAMALHO DIAS DOS SANTOS

MATRIZES E DETERMINANTES

Rio de Janeiro, 2014.

SUMÁRIO

FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO: CIEP 359 – RAUL SEIXAS
PROFESSOR: JUSSARA RAMALHO DIAS DOS SANTOS
MATRÍCULA: 0913179-8
SÉRIE: 2º ANO DO ENSINO MÉDIO
GRUPO: 2
TUTOR: EDESON DOS ANJOS DA SILVA

PLANO DE TRABALHO SOBRE MATRIZES E DETERMINANTES

Jussara Ramalho Dias dos Santos
jusrds@ig.com.br

1. Introdução:

Esse Plano de Trabalho sobre o conteúdo de Matrizes e Determinantes destina-se atender ao currículo mínimo para o 3º bimestre do 2º ano do ensino médio.

Estudar Matrizes é muito importante na área da computação gráfica, onde freqüentemente a necessidade de alterar tamanho, posição ou forma de uma imagem computadorizada, e também nos circuitos elétricos, nas linhas de transmissão e nos modelos estatísticos.

O conteúdo de Matrizes enfatiza a aplicabilidade em transformações geométricas (translação, rotação e transformação por escala). No cálculo de área de polígonos situado no plano cartesiano, quando conhecidas às coordenadas dos vértices. E na resolução de alguns tipos de sistemas de equações lineares.

Além de ser um instrumento de solução de problemas do cotidiano exerce um caráter abstrato importante na formação do raciocino lógico do aluno.

Estratégias adotadas no Plano de Trabalho:

<u>Primeira semana</u>

OPERAÇÕES COM MATRIZES

- **Habilidade relacionada:**
  H33 – Efetuar cálculos envolvendo operações com matrizes.

- **Pré-requisitos:**
  Definição de matriz, operações elementares com números reais.
- **Tempo de Duração:**
  2 horas / aulas.

- **Recursos Educacionais Utilizados:**
  Lápis, papel, caneta, régua, quadro-branco, pilot, folha de atividade.

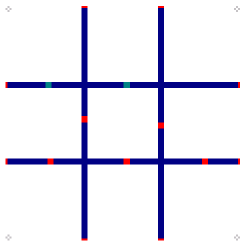
- **Organização da turma:**
  A tarefa deve ser realizada em grupo de 2 ou 3 alunos.

- **Objetivos:**
  Desenvolver as habilidades relacionadas às operações com matrizes.

- **Metodologia adotada:**
  Analisar situação-problema apresentada e associar jogo da velha, tabela ao conceito de matrizes.

Atividade 1

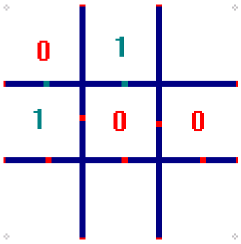
Dois amigos Isac e Pitágoras estavam disputando o jogo da velha. Isac escolheu o número zero e Pitágoras o número um. Os dois amigos começaram a analisar o formato do jogo.



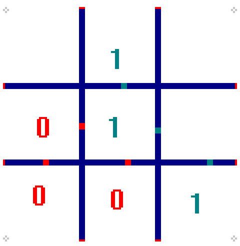
a)Diga você quantas linhas (horizontais) eles acharam?

b) E quantas colunas (verticais) eles acharam?

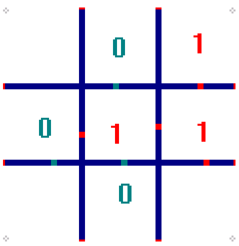
c)Para ganhar o jogo em qual linha e coluna Isac deve fazer a próxima jogada?



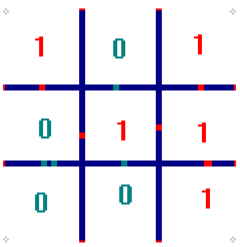
d)Para ganhar o jogo em qual linha e coluna Isac deve fazer a próxima jogada?



e) Agora Pitágoras reagiu, em qual linha e coluna deve fazer a próxima jogada?



f) Pitágoras ganhou novamente e empatou, agora escreva o jogo abaixo em forma de matriz.



Podemos identificar os elementos desta matriz pelo símbolo a_{ij}, onde i = linha e j = coluna.

a) Na matriz acima identifique o elemento a_{23}.

b) Na matriz acima o elemento a_{12}.

c) Na matriz acima o elemento a_{33}.

Atividade 2

O CIEP Raul Seixas vai fazer uma festa junina e cada turma vai contribuir com alguns itens. Veja a tabela.

Turno da manhã

	1001	2001	3001
Prendas	50	30	20
Refrigerantes	30	40	30
Salgados	70	60	50

Turno da tarde

	1002	2002	3002
Prendas	40	25	10
Refrigerantes	20	35	25
Salgados	50	60	50

a) Quantas linhas (horizontal) a tabela possuí?

b) Quantas colunas (vertical) a tabela possuí?

c) Escreva uma matriz correspondente a cada tabela.

d) Marque e indique as linhas na Matriz.

e) Marque e indique as colunas na Matriz.

f) Na tabela do turno da manhã identifique o valor da 1º linha e da 1ºcoluna.

g) Na tabela do turno da manhã identifique o valor da 3º linha e da 2ºcoluna.

h) Na tabela do turno da manhã identifique o elemento a_{23}.

i) Na tabela do turno da manhã identifique o elemento a_{12}.

j) Na tabela do turno da manhã identifique o elemento a_{33}.

l) Na tabela do turno da manhã identifique o elemento $a_{21.}$

Operações com Matrizes

a) Quanto de prendas a 1º série da manhã e da tarde contribuiu?

b) Quanto de refrigerantes a 2º série da manhã e da tarde contribuiu?

c) Quanto de salgados a 3º série da manhã e da tarde contribuiu?

d) Usando o mesmo procedimento escreva a matriz que representa o total de itens que os dois turnos contribuíram.

e) O item que não foram vendidos na festa foi à diferença dos itens do turno da manhã com o da noite, escreva essa matriz.

f) O coordenador estimava que o turno da manhã só vendesse a metade de seus itens, escreva essa matriz.

g) Quanto que o colégio conseguiu arrecadar se os preços foram:

Prenda	R$ 2,00
Refrigerante	R$ 3,50
Salgado	R$ 3,00

Escreva a matriz que representa a arrecadação.

MATRIZ INVERSA E CRIPTOGRAFIA

- **Habilidade relacionada:**
  H33 – Efetuar cálculos envolvendo operações com matrizes.

- **Pré-requisitos:**
  Conhecer operações com matrizes.

- **Tempo de Duração:**
  2 horas / aulas.

- **Recursos Educacionais Utilizados*:***
  Lápis, papel, caneta, régua, quadro-branco, pilot, folha de atividade.

- **Organização da turma:**
  A tarefa deve ser realizada em grupo de 2 ou 3 alunos.

- **Objetivos:**
  Utilizar operações e propriedades das matrizes associando a codificação e decodificação de mensagens.

- **Metodologia adotada:**
  Apresentar propriedade da matriz inversa e exemplificar com a criptografia.

Atividade 3

Consideremos **A** e **B** uma matriz **quadrada** de ordem n. Sendo **I** a matriz identidade de mesma ordem. Vamos verificar algumas propriedades efetuando as operações:

$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) A.I

b) B.I

c) I.A

d) I.B

e) O que você notou com essas operações?

f) Dada uma matriz qualquer $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Calcule AI e IA. Qual a sua conclusão?

Então qualquer matriz A_{mxn}:

$$\mathbf{A.I = I.A = A}$$

Uma matriz quadrada **A,** de ordem **n**, é invertível se existe a matriz **B** tal que:

$$\mathbf{A.B = B.A = I}$$

Se A é invertível, a matriz **B** (que é única) tal que **A.B = B.A = I** é denominada inversa de A e é indicada por $\mathbf{A^{-1}}$.

Vamos tentar encontrar a matriz $\mathbf{A^{-1}}$.

a)Calcule os valores a, b, c, d resolvendo o sistema. Sendo A. A^{-1} = I.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A^{-1}}. = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Verifique se A**.** A^{-1} = A^{-1} **.**A = I.

c)Usando o mesmo procedimento ache a matriz inversa.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

d)Verifique se **existe** a matriz inversa.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Conclusão:

Matrizes com determinante igual zero não é invertível.
Nenhuma matriz nula é invertível.
Toda matriz Identidade é invertível e igual a sua inversa.

Atividade 4

Criptografia

É uma ciência muito rica e interessante que desenvolveu ao longo da história culminado na máquina enigma usado pelos nazistas durante a 2º guerra mundial e aos modernos computadores.

Primeiramente associam as letras do alfabeto aos números, segundo a correspondência:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	.	!	#	
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Isac e Pitágoras resolveram brincar de espião, combinaram enviar uma mensagem codificada entre si utilizando $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, como matriz chave.

a) Imagine que você fosse Isac o que ele teria codificado essa mensagem seguindo a tabela acima:

E	U	#	A	D	M	I	R	O	#	S	U	A	S	#	I	D	E	I	A	S	.

b) Organize a mensagem codificada na matriz M_{2x11}.

M= [ ]

c) Encontre a matriz $\mathbf{A}^{-1}$ inversa de A.

d) Obtenha a matriz codificada que Pedro deverá enviar Maria, ou seja, a matriz C= A.M.

e) Maria conseguiria decodificar a mensagem usando A^{-1}.C, tente você fazer.

f) Pedro e Maria enviou outra mensagem usando a matriz chave $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, o que você acha que aconteceu?

Atividade 5

a) Separar a turma em grupos de 2 ou 3 alunos e cada grupo vai escrever sua mensagem criptografada e escolher um grupo adversário para desafiar.

b) A equipe deverá encontrar a matriz inversa associada à matriz chave e decifrar a mensagem.

Segunda semana

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO

- **Habilidade relacionada:**
  H33 – Efetuar cálculos envolvendo operações com matrizes.

- **Pré-requisitos:**
  Conhecer Plano Cartesiano e Funções.
- **Tempo de Duração:**
  2 horas / aulas.

- **Recursos Educacionais Utilizados:**
  Lápis, papel, caneta, papel quadriculado, quadro-branco, pilot, régua, folha de atividade.

- **Organização da turma:**
  A tarefa deve ser realizada em grupos de 2 ou 3 alunos.

- **Objetivos:**
  Apresentar as Transformações geométricas no Plano Cartesiano.

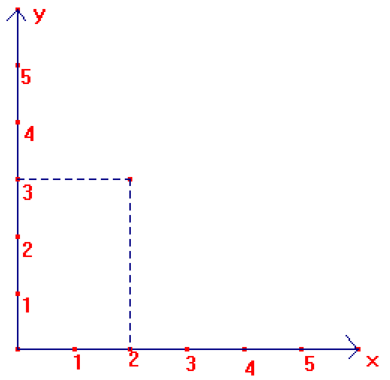
- **Metodologia adotada:**
  Desenhar no papel quadriculado o plano cartesiano e colocar figuras para sofrer transformações geométricas e depois aplicaremos o conceito de matriz para realizar essas transformações.

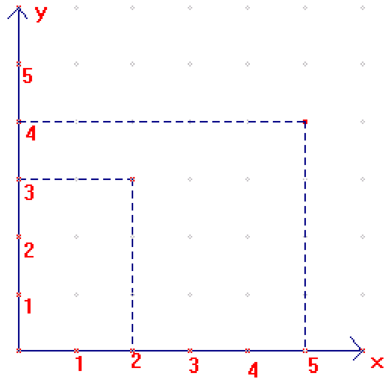
Atividade 6

Com o progresso da informática, a teoria das matrizes tornou-se ferramenta básica na área da computação gráfica, na qual é freqüente a necessidade de alterar tamanho, posição ou forma de uma imagem computadorizada. As alterações em uma imagem processada por computador são realizadas por meio de funções matemáticas chamadas de transformações geométricas.

Translação

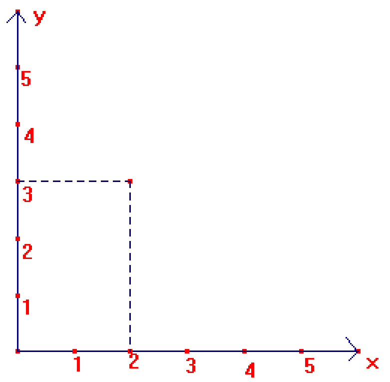
a) No papel quadriculado desenhe o plano cartesiano e marque o ponto P(2, 3) e translade 1 unidade para a direita e 2 unidades para cima. Qual o valor de a e b na operação.

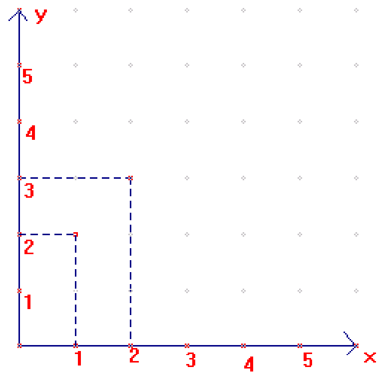




$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b)Observe o mesmo ponto (2, 3)sendo transladado 1 unidade para a esquerda e 2 unidades para baixo. Qual o valor de a e b na operação.





$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

c) Indicando cada ponto por (x,y) pela matriz $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ como podemos representar essa translação em adição de matrizes?

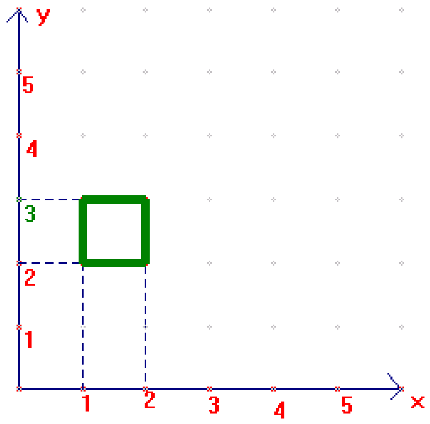
d) No papel quadriculado desenhe o plano cartesiano e marque o ponto P(-1, -2) e translade 1 unidade para a direita e 2 unidades para cima. Escreva você a matriz correspondente.

e) No papel quadriculado desenhe o plano cartesiano e marque o ponto P(-1, -2) e translade 1 unidade para a esquerda e 2 unidades para baixo. Escreva você a matriz correspondente.

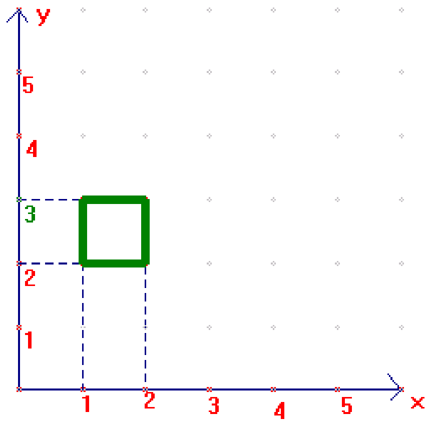
Atividade 7

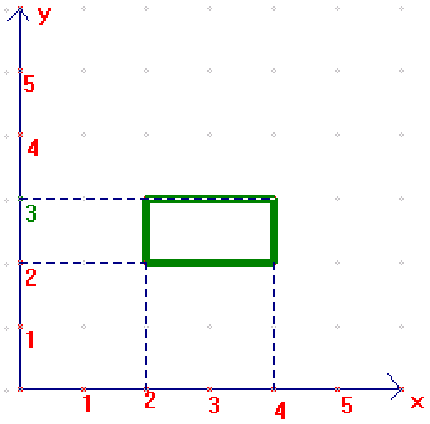
Escala

a) Observe o quadrado o que acontece se aplicarmos a transformação escalar a todos os pontos?



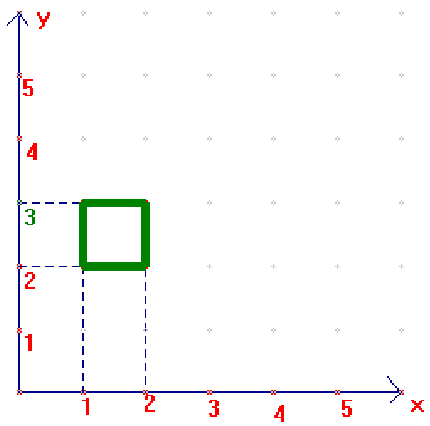
b)Observando a transformação do quadrado em retângulo, Qual o valor de a e b na operação.

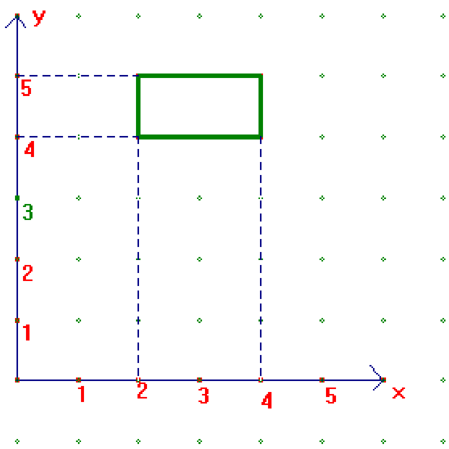




$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}$$

c)Observando a transformação abaixo, Qual o valor de a, b, c e d na operação.

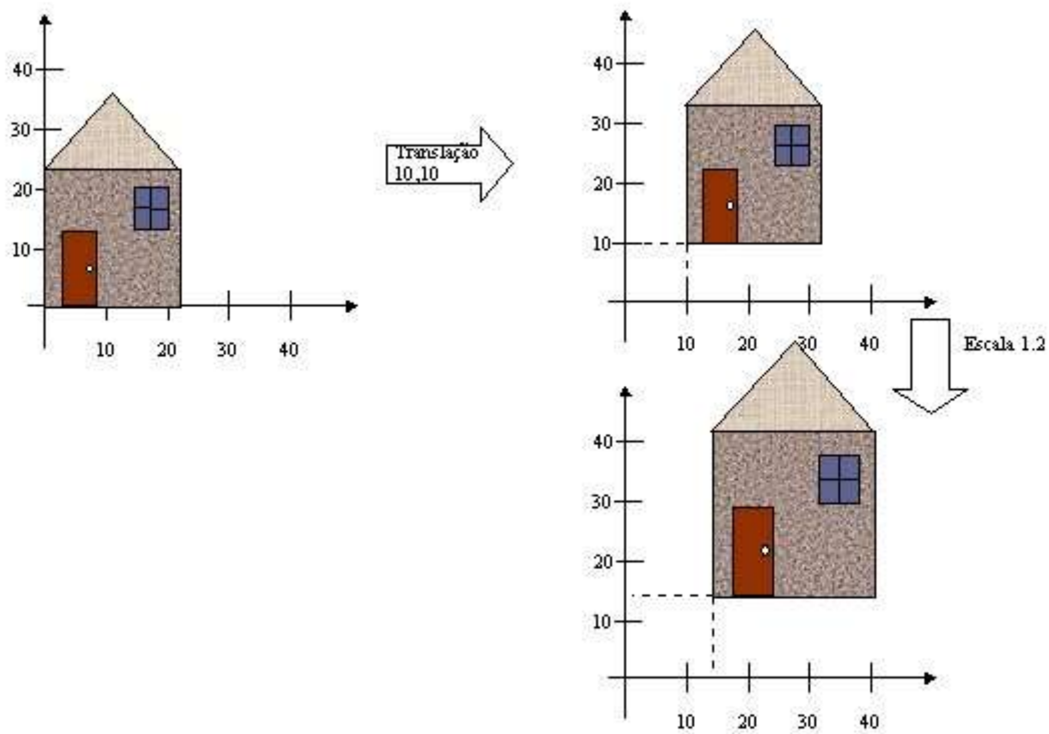




$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx \\ dy \end{bmatrix}$$

d) Indicando cada ponto por (x, y) pela matriz $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ como podemos representar essa transformação em escala pela multiplicação de matrizes?

Exemplo de Translação e Escala



Terceira semana

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO (ROTAÇÕES)

- **Habilidade relacionada:**
  H33 – Efetuar cálculos envolvendo operações com matrizes.

- **Pré-requisitos:**
  Conhecer Plano Cartesiano e Funções.
- **Tempo de Duração:**
  2 horas / aulas.

- **Recursos Educacionais Utilizados:**
  Lápis, papel, caneta, papel quadriculado, quadro-branco, pilot, régua, folha de atividade.

- **Organização da turma:**
  A tarefa deve ser realizada em grupos de 2 ou 3 alunos.

- **Objetivos:**
  Apresentar as Transformações geométricas no Plano Cartesiano.

- **Metodologia adotada:**
  Desenhar no papel quadriculado o plano cartesiano e colocar figuras para sofrer transformações geométricas e depois aplicaremos o conceito de matriz para realizar essas transformações.

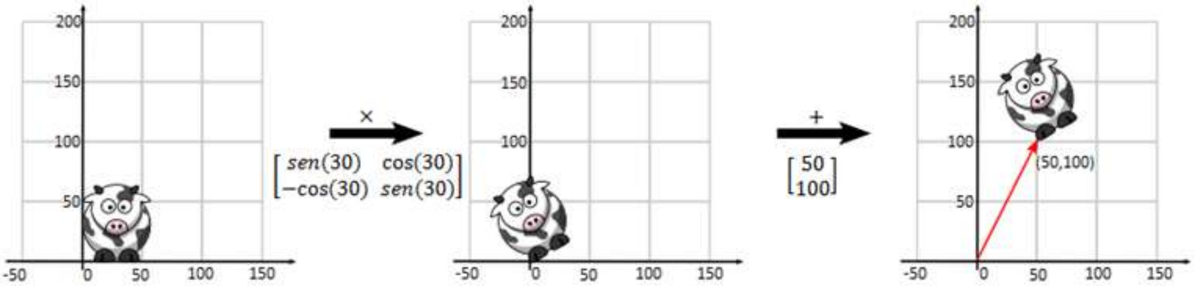
Atividade 8

Rotação

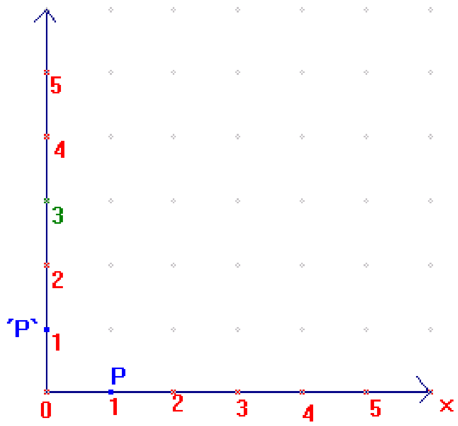
No papel quadriculado desenhe o plano cartesiano Para rotacionar um ponto P (x,y) de um ângulo α, no sentido anti-horário, em torno da origem 0,efetuamos a seguinte multiplicação:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo



a) Observe o ponto P, sabendo que sofreu uma rotação de 90º em torno da origem, no sentido anti-horário, como escrever essa matriz?



b) Se agora o ponto sofresse uma a rotação de 30º em torno da origem, no sentido anti-horário, como escrever essa matriz?

c) Se agora o ponto sofresse uma a rotação de 0º em torno da origem, no sentido anti-horário, como escrever essa matriz?

d) Se agora o ponto sofresse uma a rotação de 60º em torno da origem, no sentido anti-horário, como escrever essa matriz?

MATRIZES E DETERMINANTES

- **Habilidade relacionada:**
  H32 - Calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 ou 3.
  H33 – Efetuar cálculos envolvendo operações com matrizes.

- **Pré-requisitos:**
  Conhecer Plano Cartesiano, área do triângulo e determinante.
- **Tempo de Duração:**
  2 horas / aulas.

- **Recursos Educacionais Utilizados:**
  Lápis, papel, caneta, papel quadriculado, quadro-branco, pilot, régua, folha de atividade.

- **Organização da turma:**
  A tarefa deve ser realizada em grupos de 2 ou 3 alunos.

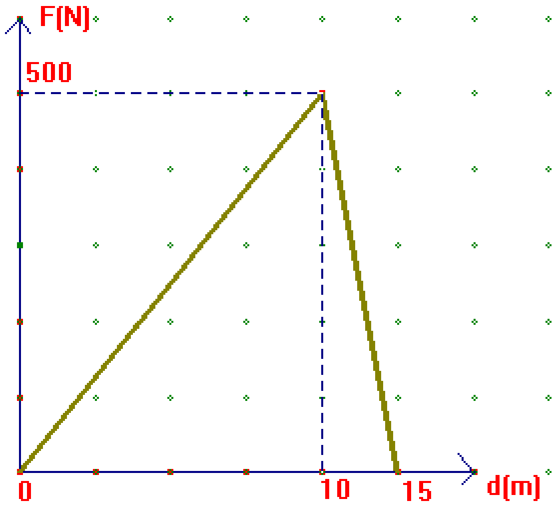
- **Objetivos:**
  Calcular por determinante a área do triângulo situado no plano cartesiano.

- **Metodologia adotada:**
  Resolver um problema de física usando determinante. E Desenhar no papel quadriculado o plano cartesiano e o triângulo. Conhecidas as coordenadas dos seus vértices e calcular a área por determinante.

Atividade 9

Quando a força F age na mesma direção do deslocamento de um corpo, dizemos que essa força realiza um trabalho T sobre esse corpo. O valor desse trabalho pode ser obtido se multiplicado o módulo da força $|F|$ pelo valor do deslocamento d sofrido pelo corpo. No gráfico, o trabalho é numericamente igual à área do triângulo formado, que representa a variação da força em função do deslocamento.

A força que age em determinado corpo, produzindo um deslocamento, está representada no gráfico a seguir:



a)Calcule o trabalho em joule realizado pela força F durante o deslocamento de 0 a 10 metros usando a área do triângulo.

b)Calcule o trabalho em joule realizado pela força F durante o deslocamento de 0 a 15 metros usando a área do triângulo.

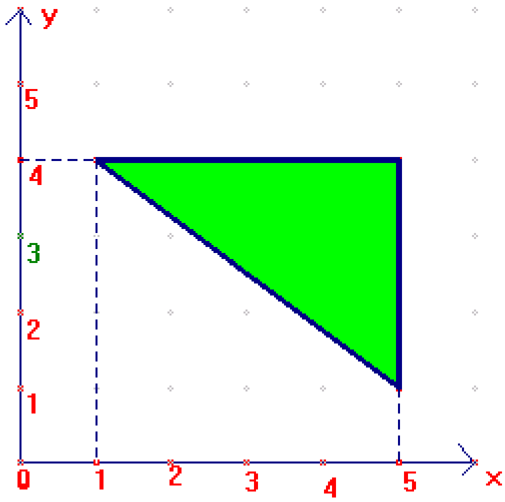
c)Calcule o trabalho em joule realizado pela força F durante o deslocamento de 0 a 10 metros usando determinante.

d)Calcule o trabalho em joule realizado pela força F durante o deslocamento de 0 a 15 metros usando determinante.

e)O que você observou?

Atividade 10

a)Desenhe o plano cartesiano no papel quadriculado e o triângulo da imagem abaixo e calcule a sua área.



b)Agora monte uma matriz M_{3x3} em que a primeira coluna seja composta pelas coordenadas x dos pontos A, B e C, a segunda coluna seja composta pelas coordenadas y dos pontos A, B e C, e a terceira coluna seja composta apenas por números 1. Como segue,

$$\begin{bmatrix} xa & ya & 1 \\ xb & yb & 1 \\ xc & yc & 1 \end{bmatrix}$$

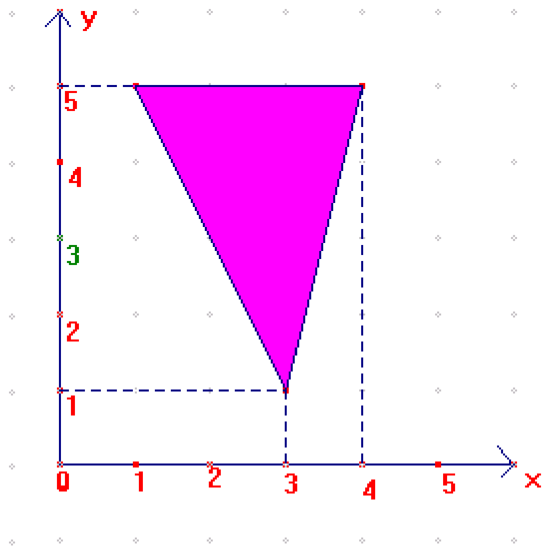
c)Feito isso calcule o determinante da matriz M.

d) Você consegue perceber alguma relação entre o determinante encontrado e a área do triângulo? Que relação é essa?

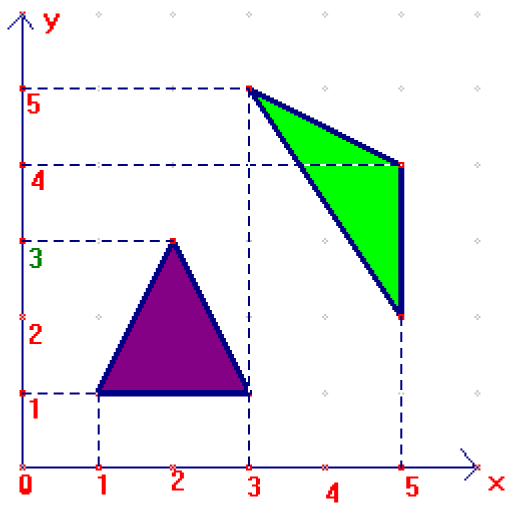
Conclusão

$$\text{Área do triângulo} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} xa & ya & 1 \\ xb & yb & 1 \\ xc & yc & 1 \end{bmatrix} = \frac{|\det(M)|}{2}$$

e) Calcule a área do triângulo por matrizes.



f) Calcule a área de cada um dos triângulos a seguir e diga qual é o triângulo que possui a maior área.



2. Avaliação:

a. Participação das atividades em sala de aula, resolução de exercícios do livro texto (Iezzi, Gelson. Matemática: ciência e aplicações, 2: ensino médio. São Paulo: Saraiva, 2010.). Realizar em grupo de dois ou três alunos para que as resoluções sejam trocadas e discutidas entre si promovendo um melhor entendimento.

b. Teste e prova.
Avaliar a evolução e crescimento do aluno, seus erros, suas dificuldades. Se necessário retomar e recuperar conceitos e promover maiores discussões em sala sobre o conteúdo.

<u>Modelo de Prova</u>:

1) Uma indústria de televisores possui duas filiais, A e B. Cada uma delas produz o modelo e o modelo 2. As tabelas abaixo apresentam as produções das filiais nos 3 primeiros dias do mês de fevereiro:

Filial A

	Dia1	Dia2	Dia3
Modelo 1	49	60	70
Modelo 2	90	48	73

	Dia1	Dia2	Dia3
Modelo 1	49	60	70
Modelo 2	90	48	73

	Preço em reais
Modelo 1	1.200
Modelo 2	3.500

a) Qual foi a produção total diária das duas filiais represente em matriz.

b) Qual foi o valor total obtido com a venda do modelo 1.

c) Qual foi o valor total obtido com a venda do modelo 2.

Descritor:
H33 – Efetuar cálculos envolvendo operações com matrizes.

2)Determine a matiz inversa:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

b) B= $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$

Descritor:
H33 – Efetuar cálculos envolvendo operações com matrizes.

3)Se M = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e N= $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, então calcule MN – NM .

Descritor:
H33 – Efetuar cálculos envolvendo operações com matrizes.

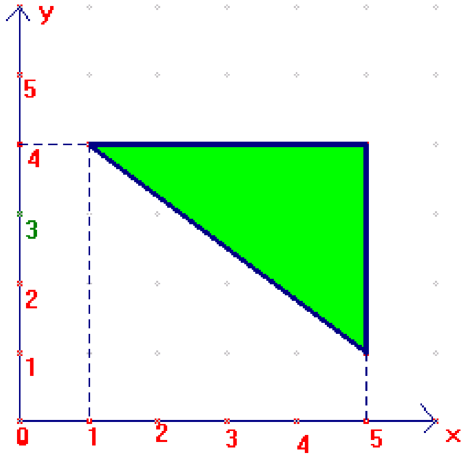
4)Calcule o determinante:

a)A = $\begin{bmatrix} -8 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

b)B = $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & -7 \\ 6 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

Descritor:
H32 - Calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 ou 3.
H33 – Efetuar cálculos envolvendo operações com matrizes.

5) Calcule a área do triangulo abaixo a por meio de matrizes.



Descritor:

H32 - Calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 ou 3.

H33 – Efetuar cálculos envolvendo operações com matrizes.

3. Referências:

Iezzi, Gelson. Matemática: ciência e aplicações, 2: ensino médio. São Paulo: Saraiva, 2010.

Paiva, Manoel. Matemática, 2: ensino médio. São Paulo: Moderna, 2010.

Smole, Kátia Cristina Stocco. Matemática, 2: ensino médio. São Paulo: Saraiva, 2010.

Roteiros de Ação sugeridos pelo Curso Formação Continuada Para Professores de Matemática

http://pontov.com.br/site/arquitetura/54-matematica-e-fisica/267-matrizes-e-transformacoes-parte-2

http://inf.pucrs.br/~pinho/CG/Aulas/Vis2D/Instanciamento/Insanciamento.htm