FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ

COLÉGIO: Escola Estadual Marques Rebelo

MATRÍCULA: 0912761-4

SÉRIE: 1ª Série do Ensino médio .

TUTOR (A): ANTôNIO DE ALMEIDA FILHO

# Plano de trabalho : Trigonometria na Circunferência

[Nome do cursista **:Rogério de Oliveira**]

[teslaohm@ig.com.br ou rogerioo@prof.educacao.rj.gov.br]

**Introdução:** A abordagem conceitual se baseia em , reconhecer a existência de fenômenos que se repetem de forma periódica, identificar o radiano como unidade de medida de arco,transformar a medida de um arco de grau para radiano e vice-versa.

Para realização do mesmo, partiu-se do seguinte problema de pesquisa: Como pode estar organizado um plano de ensino, relativo ao ensino da trigonometria, de forma tornar a aprendizagem, por parte dos alunos, mais significativa? A partir do mesmo foram traçados os caminhos a serem seguidos, tendo como principal objetivos elaborar um plano de ensino, para os fundamentos da trigonometria, de forma fazer com que o aluno desperte curiosidade pela aprendizagem tornando-a mais significativa.

Para isso foi feito uso de pesquisa bibliográfica em diferentes instrumentos: livros, revistas, monografias e internet. O plano de ensino elaborado traz em sua abordagem dinâmicas de ensino que fogem do método tradicional, priorizando a busca histórica .

Por fim enfatizo que existe a necessidade de comprometimento de ambas as partes aluno e professor para que a atividade tenha sucesso, em relação aos assuntos propostos, pois a matemática é a construção permanente de conceitos, onde em cada um há uma maneira diferente de absorvê-los, basta apenas descobrir sua melhor maneira para que haja literalmente uma construção matemática, de forma competente, com curiosidade, interesse, desenvolvimento intelectual e lógico.

**Estratégias adotadas no Plano de Trabalho:**Recursos didático-pedagógicos:Uso de material concreto , propor ao aluno que traga para sala de aula tantas formas redondas quanto possível, barbante calculadora e fita métrica ou trena e uso do software geogebra , computador  mais projetor multimídia , uso ta internet como meio de pesquisa para Fenômenos Periódicos e aulas expositivas .

Desenvolvimento, dos alunos no sentido da compreensão do significado, da estrutura e função de conceitos matemáticos;  competência para construir abordagens matemáticas para problemas e situações; e a apreciação da atividade matemática enquanto prática cultural de ensino, para os fundamentos da trigonometria, de forma fazer com que o aluno desperte curiosidade pela aprendizagem tornando-a mais significativa.

Pratica: uso do laboratório de informática : pesquisa na internet , o que são Fenômenos Periódicos exemplos e abordagem matemática .

**Atividade 1:**

**Habilidade relacionada:** Reconhecer o Numero (PI ) $\pi$ .

**Pre-requisitos:** Reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas de suas relações. Conhecimentos básicos de informática e navegação na internet .

**Tempo de Duração:** 2 horas/aulas

**Recursos Educacionais Utilizados:** Material concreto , formas arredondadas , barbante , fita métrica calculadora e aula expositiva e projetor multimídia .

**Organização da turma**: Alunos organizados em grupo de por grupo de 4 .

**Objetivos:** Determinação o do $\pi$ , proporção numérica originada da relação entre as grandezas do perímetro de uma circunferência e seu diâmetro; por outras palavras, se uma circunferência tem perímetro $p$ e diâmetro $d$, então aquele número é igual a $p/d$.

**Metodologia adotada:**

Aulas expositivas , utilização de material concreto e calculadora na determinação do numero $\pi$.

No laboratório de informática com acesso a internet pesquisar o assunto, exemplo.

Vídeo : http://www.youtube.com/watch?v=igqzWUfu23s

**Atividade 2:**

**Habilidade relacionada:** Identificar radiano como unidade de arco , transformar a medida de um arco de grau para radiano e vice-versa.

**Pre-requisitos:** Noção de medida em graus , identificar uma equação do 1º grau que expressa um problema e conhecimentos básicos de informática e navegação na internet .

**Tempo de Duração:** 3 horas/aulas .

**Recursos Educacionais Utilizados:**

Projetor multimídia , quadro-Negro ou Lousa e livro didático .

**Organização da turma**:

Turma disposta de maneira individual mas disposta a troca de informação

**Objetivos:** Reavisar o conceito de arcos e medida de ângulos em graus e introdução da unidade de medida radiano para arcos e ângulos. Conversão de unidades graus para radianos e radianos para graus .

**Metodologia adotada:**

Revisar inicialmente o conceito de ângulos em graus ( medida em graus ) , visualizar arcos e ângulos na circunferência , inicialmente na lousa , introdução do conceito de radiano inicialmente na lousa depois com auxilio de vídeos .

Vídeos relativos a ângulos em graus .

Como usar o transferidor parte 1.

http://www.youtube.com/watch?v=Wqdu4e3_YzI

Como usar o transferidor parte 2 .

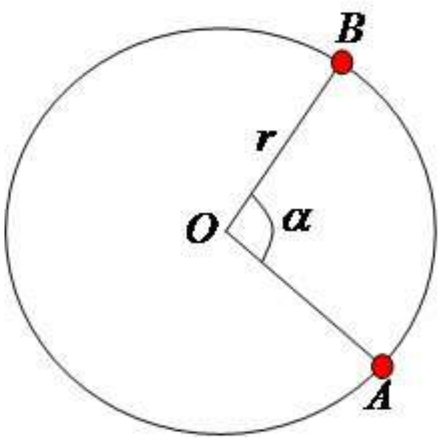
http://www.youtube.com/watch?v=wCCKUIlVgwk

Dai finalmente segue o vídeo bastante ilustrativo : Aula radiano .

http://www.youtube.com/watch?v=Iqk_Mq8sWmI

Transformar a medida de um arco de grau para radiano e vice-versa.

Dada uma circunferência qualquer de centro O e raio r, iremos marcar dois pontos A e B, os quais dividirão a circunferência em duas partes denominadas de arco de circunferência. Os pontos A e B são os extremos dos arcos. Caso as extremidades sejam coincidentes, temos um arco com uma volta completa. Observe a ilustração a seguir:




Nela podemos notar a existência do arco AB e de um ângulo central representado por α. Para cada arco existente na circunferência temos um ângulo central correspondente, ou seja: **med(AÔB) = med(AB)**. Portanto, o comprimento de um arco depende do valor do ângulo central.

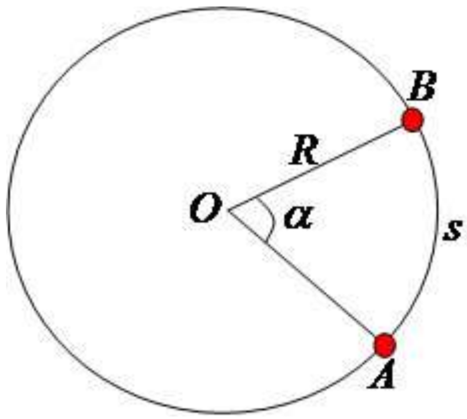
Na medição de arcos e ângulos usamos duas unidades: o grau e o radiano.

*Medidas em Grau*

Sabemos que uma volta completa na circunferência corresponde a 360º, se a dividirmos em 360 arcos teremos arcos unitários medindo 1º grau. Dessa forma, enfatizamos que a circunferência é simplesmente um arco de 360º com o ângulo central medindo uma volta completa ou 360º. Também podemos dividir o arco de 1º grau em 60 arcos de medidas unitárias iguais a 1’ (arco de um minuto). Da mesma forma podemos dividir o arco de 1’ em 60 arcos de medidas unitárias iguais a 1” (arco de um segundo).

***Medidas em Radianos***

Dada uma circunferência de centro O e raio R, com um arco de comprimento s e α o ângulo central do arco, vamos determinar a medida do arco em radianos de acordo com a figura a seguir:




Dizemos que o arco mede um radiano se o comprimento do arco for igual à medida do raio da circunferência. Assim, para sabermos a medida de um arco em radianos, devemos calcular quantos raios da circunferência são precisos para se ter o comprimento do arco. Portanto:

$$\alpha = \frac{s}{R}$$

Com base nessa fórmula podemos expressar outra expressão para determinar o comprimento de um arco de circunferência:

$$s = \alpha * R$$

De acordo com as relações entre as medidas em grau e radiano de arcos, vamos destacar uma regra de três capaz de converter as medidas dos arcos. Veja:

*360º → 2π radianos (aproximadamente 6,28)*
*180º → π radiano (aproximadamente 3,14)*
*90º → π/2 radiano (aproximadamente 1,57)*
*45º → π/4 radiano (aproximadamente 0,785)*

| medida em graus | medida em radianos |
|---|---|
| x | α |
| 180 | π |

Exemplos de conversões:

a) 270º em radianos

$$\frac{270^{o}}{180^{o}}=\frac{\alpha}{\pi}$$
$$180\alpha=270\pi$$
$$\alpha=\frac{270\pi}{180}$$
$$\alpha=\frac{3\pi}{2}$$

b) 5π/12 em graus

$$\frac{x}{180^{o}}=\frac{\frac{5\pi}{12}}{\pi}$$
$$\pi*x=\frac{180*5\pi}{12}$$
$$x=\frac{900\pi}{12\pi}$$
$$\alpha=75^{o}$$

**Atividade 3:**

**Habilidade relacionada:** Reconhecer círculo/circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

**Pre-requisitos:** Noção de trigonometria no plano seno , cosseno e tangente no plano no triangulo retângulo .

**Tempo de Duração:** 6 horas/aulas .

**Recursos Educacionais Utilizados:**

Quadro-Negro ou Lousa e livro didático .

**Organização da turma**: Turma disposta de maneira individual mas disposta a troca de informação .

**Objetivos:** Construindo o ciclo trigonométrico, conhecer a estrutura do ciclo trigonométrico; visualizar, a representação dos arcos no ciclo trigonométrico. Identificar arcos côngruos; construir arcos côngruos a um arco dado; escrever e compreender a expressão geral dos arcos côngruos.

Reconhecer as relações seno e cosseno e tangem te no circulo trigonométrico .

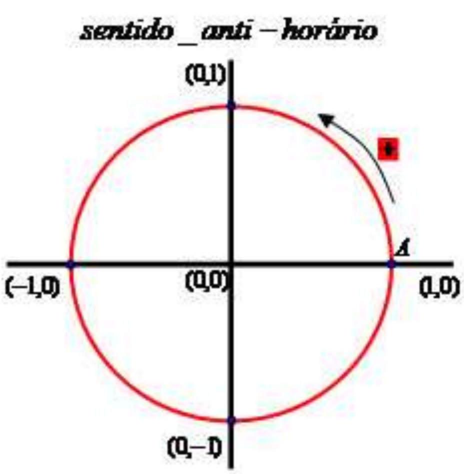
**Metodologia adotada:** Introduzindo a idéia do ciclo trigonométrico (circunferência de raio unitário com centro na origem do sistema de eixos cartesianos , trabalhar os conceitos de seno , cosseno e tangente ) , trabalhar com os ângulos notáveis , introduzis a idéia da correspondência entre números reais e os pontos do ciclo (sentidos de marcação dos arcos no ciclo: o sentido positivo, chamado de anti-horário, que se dá a partir da origem dos arcos até o lado terminal do ângulo correspondente ao arco; e o sentido negativo, ou horário, que se dá no sentido contrário ao anterior.)

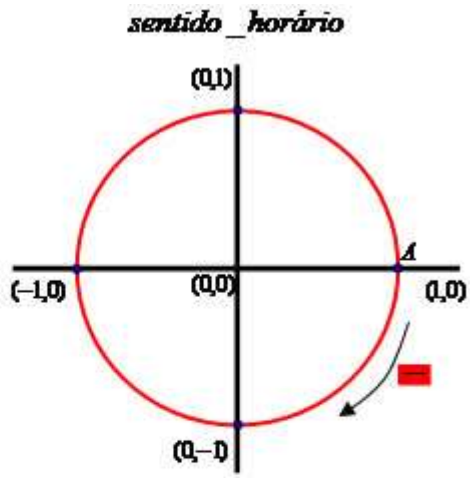
Introduzis a idéia dos números congruentes.

Reforçar todo conteúdo com a leitura do livro didático.

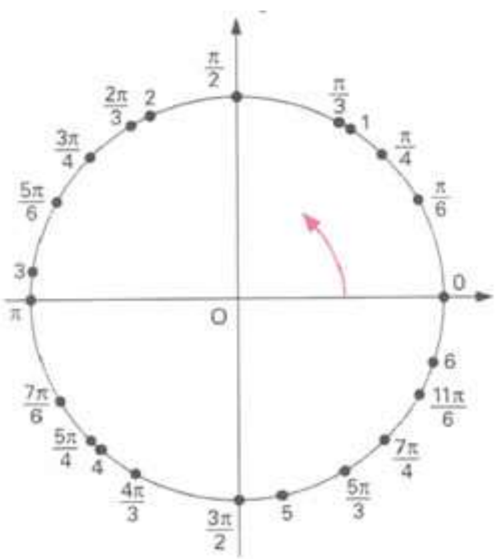
A circunferência trigonométrica está representada no plano cartesiano com raio medindo uma unidade. Ela possui dois sentidos a partir de um ponto A qualquer, escolhido como a origem dos arcos. O ponto A será localizado na abscissa do eixo de coordenadas cartesianas, dessa forma, este ponto terá abscissa 1 e ordenada 0. Os eixos do plano cartesiano dividem o círculo trigonométrico em quatro partes, chamadas de quadrantes, onde serão localizados os números reais α relacionados a um único ponto P. Os sentidos dos arcos trigonométricos estão de acordo com as seguintes definições:

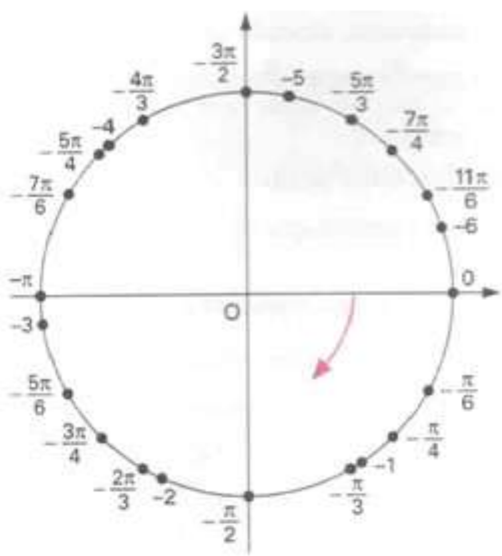
***Se α = 0, P coincide com A.***
***Se α > 0, o sentido do círculo trigonométrico será anti-horário.***
***Se α < 0, o sentido do círculo será horário.***
***O comprimento do arco AP será o módulo de α.***



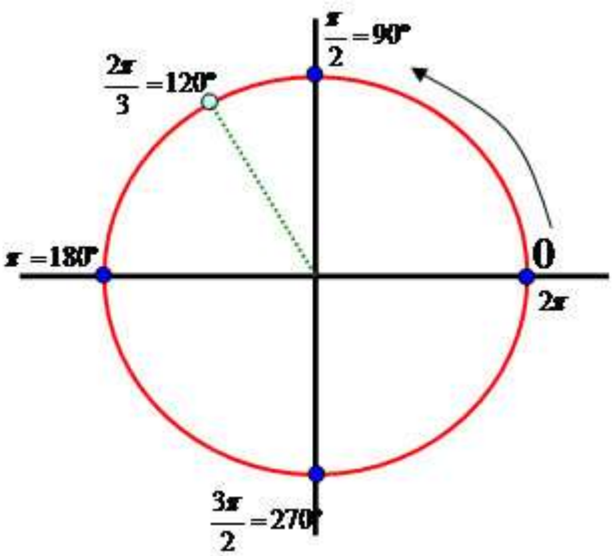

Na ilustração a seguir estão visualizados alguns números importantes, eles são referenciais para a determinação principal de arcos trigonométricos:



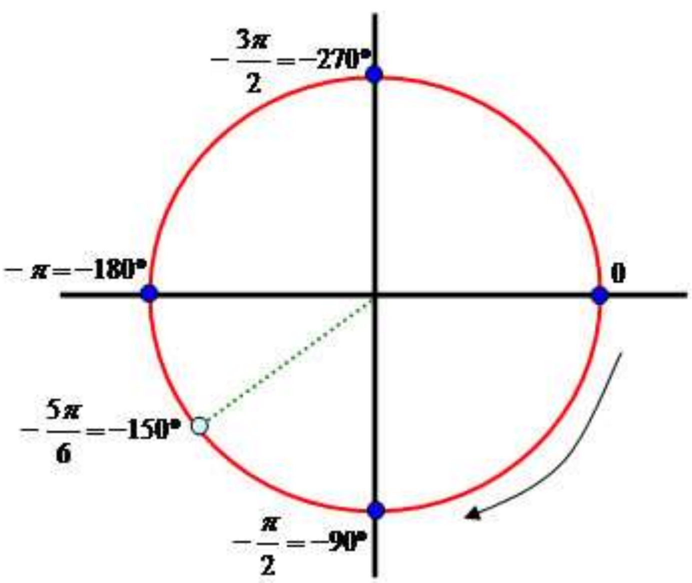



Uma volta completa no círculo trigonométrico corresponde a 360º ou 2π radianos, se o ângulo α a ser localizado possuir módulo maior que 2π, precisamos dar mais de uma volta no círculo para determinarmos a sua imagem.

Por exemplo, para localizarmos 8π/3 = 480º, damos uma volta completa no sentido anti-horário e localizamos o arco de comprimento 2π/3, pois 8π/3 = 6π/3 + 2π/3 = **2π + 2π/3**.

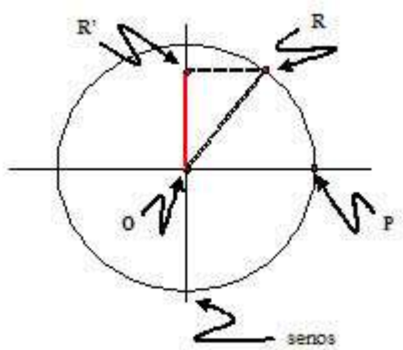



Na localização da determinação principal de –17π/6 = –510º, devemos dar 2 voltas completas no sentido horário e localizarmos o arco de comprimento –5π/6, pois –17π/6 = –12π/6 – 5π/6 = ***2π – 5π/6***.



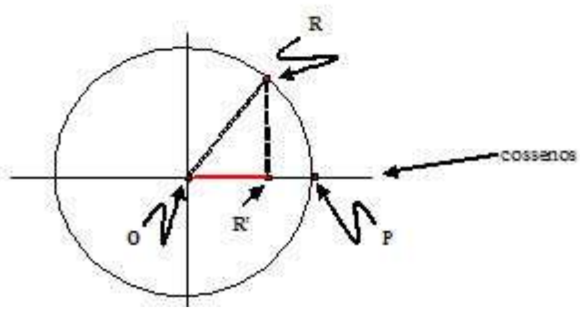
**Seno de um ângulo**

Considere um ponto R sobre a circunferência e a sua projeção sobre o eixo vertical, ponto R’. Chamaremos o eixo vertical de eixo dos senos. O segmento OR’ será o seno de PR. Obs.: Verifique a devida existência do triângulo retângulo ORR’.




**Cosseno de um ângulo**

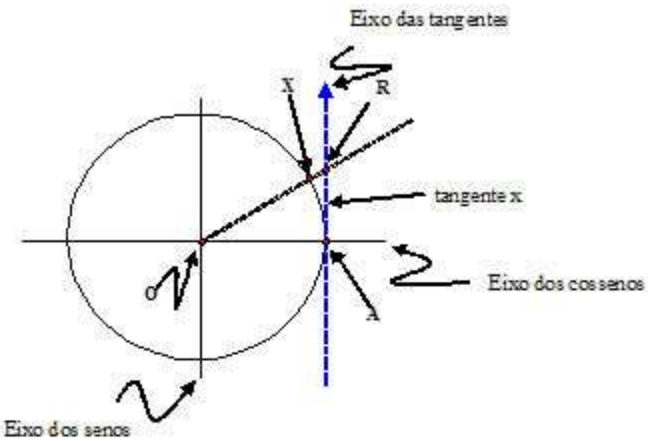
Considere um ponto R sobre a circunferência e a sua projeção sobre o eixo horizontal R’. Chamaremos o eixo horizontal de eixo dos cossenos. O segmento OR’ será o cosseno de PR.

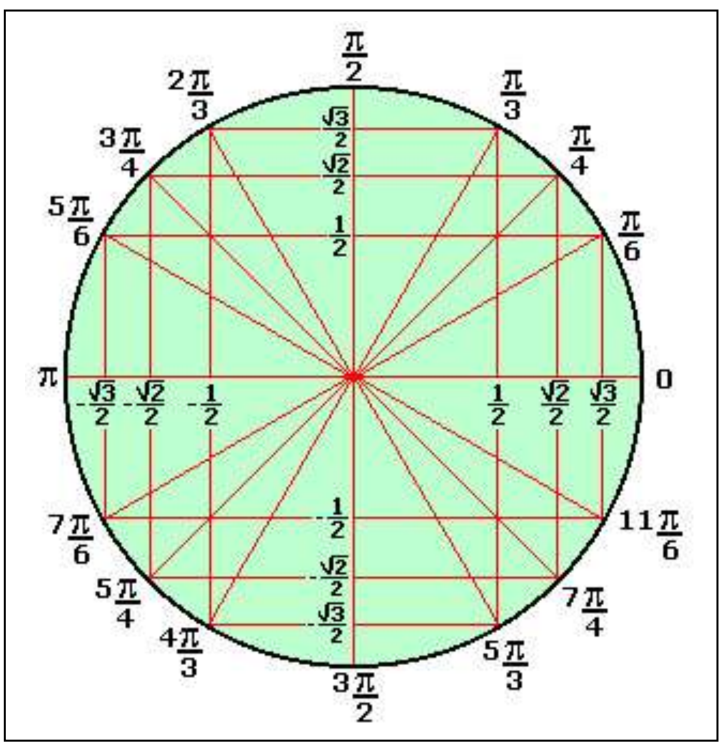



**Tangente de um ângulo**

Para obter a tangente de um arco devemos traçar um terceiro eixo que tangencia o ponto A. Ao unirmos a extremidade do arco AX (ponto X) ao centro O e prolongando o raio da circunferência, ele interceptará o eixo das tangentes.

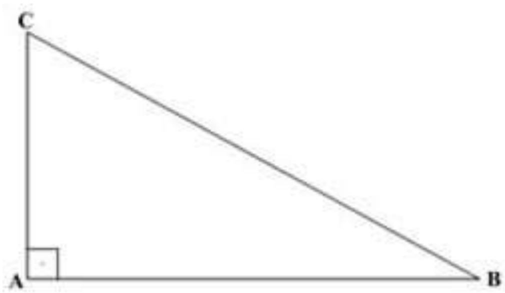
Definimos então que sendo x no 1º quadrante, Tgx = AR > 0



# Relação Fundamental da Trigonometria

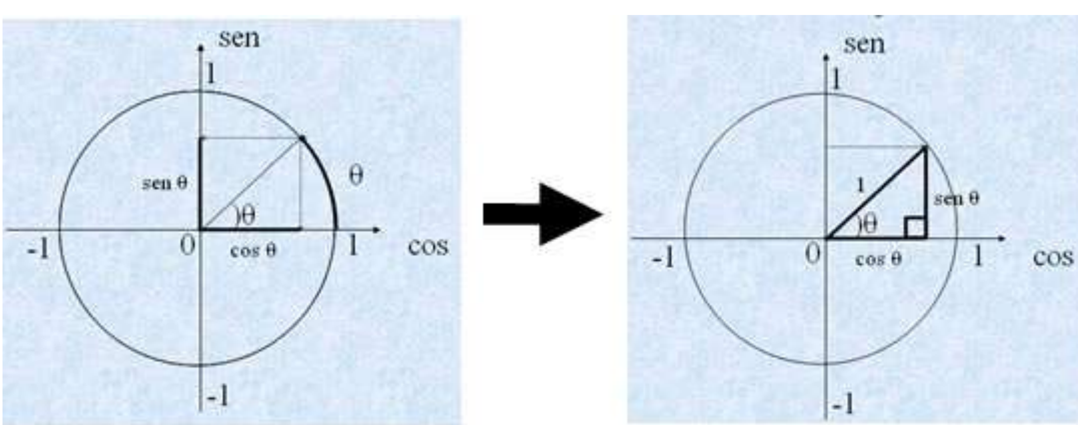
Uma importante relação existente na Trigonometria foi elaborada por Pitágoras, com base no triângulo retângulo (triângulo com catetos formando um ângulo reto). Veja a relação que ficou conhecida como "Teorema de Pitágoras":



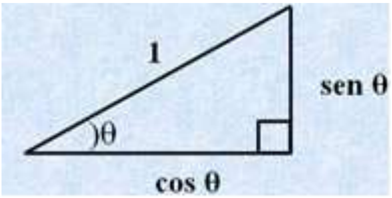

AB = cateto
AC = cateto
BC = hipotenusa

***med(AB)² + med(AC)² = med(BC)²***

No círculo trigonométrico, o eixo horizontal é representado pelo seno e o eixo vertical, pelo cosseno. A determinarmos um ponto qualquer sobre a extremidade do círculo, temos sua projeção no eixo dos senos e dos cossenos. Ao traçarmos um segmento de reta do eixo das origens do círculo até o ponto determinado, formamos um ângulo Θ, como mostram os esquemas a seguir:



Com base no triângulo retângulo formado, vamos aplicar os fundamentos do teorema de Pitágoras:




***$sen^2\,\Theta + cos^2\,\Theta = 1$***

Aplicação da relação fundamental

***Exemplo 1:***

Considerando que $sen.x = \frac{1}{4}$, com $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, determine cos x.

$$sen^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{1}{16}$$

$$\cos^2 x = \frac{16-1}{16}$$

$$\cos^2 x = \frac{15}{16}$$

$$\sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{\frac{15}{16}}$$

$$\cos.x = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

***Exemplo 2:***

Considerando que $\cos.x = \frac{1}{3}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, determine sen x.

$$sen^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$sen^2 x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$sen^2 x = 1 - \frac{1}{9}$$

$$sen^2 x = \frac{9-1}{9}$$

$$sen^2 x = \frac{8}{9}$$

$$\sqrt{sen^2 x} = \sqrt{\frac{8}{9}}$$

$$sen.x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

**Atividade 4:** Usando o software Geogebra .

**Habilidade relacionada:** Reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

**Pre-requisitos:** Atividades 1,2 e 3 .

**Tempo de Duração:** 2 horas/aulas

**Recursos Educacionais Utilizados:** Projetor multimídia e uso da geometria dinâmica, software Geogebra .

**Organização da turma**: Turma disposta de maneira individual mas disposta a troca de informação .

**Objetivos**: Construção do circulo trigonométrico usando o software Geogebra, estudo das relações seno, cosseno e tangente .

**Metodologia adotada:**

Com o auxilio do software geogebra revisar a idéia do ciclo trigonométrico (circunferência de raio unitário com centro na origem do sistema de eixos cartesianos , trabalhar os conceitos de seno , cosseno e tangente ) , revisar a idéia da correspondência entra números reais e os pontos do ciclo (sentidos de marcação dos arcos no ciclo: o sentido positivo, chamado de anti-horário, que se dá a partir da origem dos arcos até o lado terminal do ângulo correspondente ao arco; e o sentido negativo, ou horário, que se dá no sentido contrário ao anterior.)

Vídeo que mostra como construir um círculo trigonométrico dinâmico no Geogebra com seno, cosseno e tangente.

http://www.youtube.com/watch?v=N0MoW2XBnBQ&feature=related

## Avaliação:

Na avaliação do conteúdo, será levado em consideração a participação e o interesse dos alunos pelo assunto, destacando a contribuição de eventuais alunos na elaboração de conceitos, bem como, o desenvolvimento no momento da resolução dos exercícios. Todos os trabalhos serão avaliados: Pesquisa na internet, elaboração e resolução dos problemas propostos no livro texto. Sugere-se que os alunos façam após cada atividade um bateria de exercícios do livro texto, tendo como objetivo de determinar o domínio do conteúdo por cada aluno, identificando os pontos fortes e as defasagem sem descartar a necessidade de avaliação escrita formal.

## Referências:

Brasil Escola Matemática < http://www.brasilescola.com/matematica/ >
Portal < http://www.youtube.com>
Machado , Antonio dos Santos: Matemática Trigonometria. Volume 2 ed. São Paulo : Atual 1988 . ( Temas e Metas ).
BARRETO FILHO, Benigno ; SILVA, Cláudio Xavier. Matemática: Aula por Aula. São Paulo. FDT, 1998.