Formação Continuada em Matemática

Matemática 3º ano – 2º Bimestre

Plano de Trabalho

Probabilidade da União de Eventos, Probabilidade de Eventos complementares e Probabilidade Condicional.

Tarefa 1

Cursista: Alessandra Baldanza Raymundo Manhanini

Tutora: Bianca Coloneze

Sumário

INTRODUÇÃO 03

DESENVOLVIMENTO..04

AVALIAÇÃO 14

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 16

Introdução

Numerosos acontecimentos, em nossa vida diária, são envolvidos pelo acaso podendo ser expressos em linguagem de jogo: a natureza é uma grande jogadora! É evidente que o homem deve levar em conta todo acontecimento ou incidente futuro, ainda que não saiba absolutamente se ele ocorrerá ou não.

A Probabilidade é a área da Matemática que investiga e determina as chances ou possibilidades de um evento ocorrer, como por exemplo, a chance de alguma pessoa ganhar na mega sena. Quando queremos determinar a possibilidade de ocorrer um evento A ou um evento B, teremos que calcular a probabilidade da união desses dois eventos. É importante lembrar que na lógica matemática, a palavra "ou" quer dizer união.

O objetivo deste trabalho é criar e propor uma série de atividades, onde o conceito básico de probabilidade será exaustivamente trabalhado.

Nestes exemplos, o espaço amostral e os eventos favoráveis podem ser listados explicitamente e contados. O professor também pode destacar o caráter aleatório de certas variáveis comparando-o com variáveis não aleatórias. Existe também uma preocupação no sentido de desenvolver uma instrução mais compreensível, com base nas sequências didáticas, que motive o aluno a interagir com o conteúdo. Vale salientar que o **objetivo geral** será verificar quais os possíveis benefícios que poderemos obter com a mudança de metodologia do ensino de Probabilidade mediante a introdução de atividades direcionadas para serem desenvolvidas pelo aluno na sala de aula.

"O professor que é desafiador, pergunta em vez de responder, provoca, desperta o desejo de aprender no aluno, fortalecendo experiências grupais, favorece naturalmente o desenvolvimento do raciocínio científico."

Para a totalização do plano de trabalho serão necessários dez tempos de cinquenta minutos, para a realização de todas as atividades propostas e dois tempos de cinquenta minutos para a avaliação do conteúdo ensinado.

Desenvolvimento

O professor no decorrer da aula deve trabalhar com os conceitos da União de dois eventos de um mesmo espaço amostral em Probabilidade, através de atividades simples que irão utilizar materiais manipuláveis ou jogos para fixar os conceitos estudados.

Atividade 1

Probabilidades: União de eventos de um mesmo espaço amostral.

Estratégias e recursos da aula:

Exibição do vídeo : http://www.youtube.com/watch?v=BuWJitqAN5U.

Após a exibição do vídeo, realize um debate com os alunos e resolva os exemplos abaixo para maior fixação do conteúdo que está sendo estudado.

Utilizando um dado "não viciado"

Atenção: No primeiro exemplo a intersecção entre os eventos é vazia, no segundo não.

Exemplos:

1- Ao lançarmos um dado, qual é a probabilidade de obtermos um número menor que 3 ou maior que 4?

Como sabemos, neste exemplo o **espaço amostral** é composto de seis elementos:
S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

Chamemos de **A** o evento que representa a ocorrência de um menor que **3**:
A = { 1, 2 }

Vamos chamar de **B** o evento que representa a ocorrência de um número maior que **4**:
B = { 5, 6 }

Como o número de elementos de **S** é **6**, temos que **n(S) = 6**.

Para **A** temos **n(A) = 2** e para **B** temos também **n(B) = 2**.

Podemos então calcular a probabilidade de **A**:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{6} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{3}$$

E também a probabilidade de **B**:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{6} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

Como os eventos são independentes, a probabilidade procurada pode ser obtida simplesmente somando **P(A)** com **P(B)** como na fórmula abaixo:

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$$

Então temos:

Portanto:

- **A probabilidade de obtermos um número menor que 3 ou maior que 4 é igual a $^2/_3$.**

2 - Ao lançarmos um dado, qual é a probabilidade de obtermos um número primo ou um número ímpar?

Assim como no exemplo anterior, neste exemplo o **espaço amostral** também é:
S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

Vamos chamar de **A** o evento que representa a ocorrência de um **número primo**:
A = { 2, 3, 5 }

Chamemos de **B** o evento que representa a ocorrência de um número ímpar:
B = { 1, 3, 5 }

Como o número de elementos de **S** é **6**, temos que **n(S) = 6**.

Para **A** temos **n(A) = 3** e para **B** temos **n(B) = 3**.

Podemos então calcular a probabilidade de **A**:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

E também a probabilidade de **B**:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{6} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

Se simplesmente somarmos as probabilidades **P(A)** e **P(B)** como no exemplo anterior, a probabilidade da união será igual **1**, que facilmente podemos constatar não se tratar de um valor **correto**, pois isto significa uma probabilidade de **100%**, mas o espaço amostral também possui os números **4** e **6**, que não são **primos** e muito menos **ímpares**.

Agora observe que **3** e **5** pertencem tanto a **A** quanto a **B**, ou seja:
$A \bigcap B = \{3, 5\}$

Como **3** e **5** estão na intersecção de **A** com **B**, eles estão sendo considerados tanto em **P(A)**, quanto em **P(B)**, por isto se simplesmente somarmos **P(A) + P(B)**, os estaremos considerando em dobro, por este motivo devemos subtrair $P(A \bigcap B)$, para que eles sejam considerados uma única vez. Podemos então escrever a seguinte fórmula:
$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$
Para podermos utilizar esta fórmula, precisamos calcular a probabilidade de $P(A \bigcap B)$
:
Finalmente temos:

- **A probabilidade de obtermos um número primo ou um número ímpar ao lançarmos um dado é igual a $^2/_3$.**

O que o aluno poderá aprender com esta aula

Com essa aula o ensino/aprendizagem de probabilidade acontecerá de forma significativa através da construção do conhecimento a partir da experimentação, possibilitando um maior envolvimento do estudante com o tema e permitindo uma maior cooperação e reflexão entre eles.

Duração das atividades
Dois tempos de aula

Conhecimentos prévios trabalhados pelo professor com o aluno

Organizar dados em tabelas, reconhecer uma porcentagem a partir de uma fração, e cálculo de probabilidade.

Avaliação
A aprendizagem dos estudantes poderá ser avaliada de forma contínua, envolvendo a participação dos alunos e a análise de suas respostas às perguntas. Além disso, você pode propor outros problemas semelhantes para avaliação, nos quais os alunos trabalhem com o cálculo de probabilidade.

Atividade 2

Probabilidades: Eventos Complementares e Eventos Independentes.

O que o aluno poderá aprender com esta aula

- Compreender o cálculo de Probabilidades de eventos complementares e eventos independentes.
- Desenvolver o cálculo mental aproximado na resolução de problemas probabilísticos.

Duração das atividades
2 aulas de 50 minutos.

Conhecimentos prévios trabalhados pelo professor com o aluno
Números e operações.
Porcentagem.
Cálculo de probabilidade.

Estratégias e recursos da aula

Exibição do vídeo http://www.youtube.com/watch?v=70RHm31rp6Q

Após a exibição do vídeo e do debate realizado com a turma, o professor deverá utilizar o quadro de giz, para anotar a teoria que deverá ser copiada pelos alunos no caderno para posterior estudo.

Probabilidade de um Evento Complementar

Para entendermos o que é um evento complementar, vamos imaginar a seguinte situação:

No lançamento de um dado sabemos que o espaço amostral é composto de 6 eventos. Partindo desse lançamento, vamos considerar somente os eventos com valores das faces menores que 5, dados por 1, 2, 3, 4, totalizando 4 eventos. Nessa situação temos que o evento complementar é dado pelos números 5 e 6.

A união do evento em questão com o evento complementar forma o espaço amostral e a intersecção dos dois eventos forma um conjunto vazio. Veja um exemplo baseado nessas condições:

Exemplo 1

No lançamento simultâneo de dois dados, vamos determinar a probabilidade de não sair soma 4.

No lançamento de dois dados temos o espaço amostral de 36 elementos. Considerando os eventos em que a soma seja quatro, temos: {(1, 3), (3, 1), (2, 2)}. Probabilidade de sair soma quatro é igual a: 3 em 36, que corresponde a 3/36 = 1/12. Para determinarmos a probabilidade de não sair soma quatro realizamos o seguinte cálculo:

$$P = 1 - \frac{1}{12}$$

$$P = \frac{12-1}{12}$$

$$P = \frac{11}{12}$$

Na expressão, temos que o valor 1 refere-se ao espaço amostral (100%). Temos que a probabilidade de não sair soma quatro no lançamento de dois dados é de 11/12.

Exemplo 2

No lançamento de um dado perfeito, qual é a probabilidade de não sair o número 6.

Probabilidade de não sair o número 6 = 5/6

$$P = 1 - \frac{1}{6}$$

A probabilidade de não sair o 6 é de 5/6.

$$P = \frac{6-1}{6}$$

$$P = \frac{5}{6}$$

Eventos independentes

A probabilidade condicional é encontrada sobre o evento de outro evento e eventos independentes são eventos separados de um único espaço amostral. A probabilidade desse tipo de evento será:

Dado um espaço amostral qualquer, se dele tirarmos dois eventos e se eles forem independentes, então a sua probabilidade será calculada separadamente.

$$\boxed{P(B|A) = P(B) \text{ e } P(B|A) = P(A)}$$

Exemplo:
Uma moeda é lançada duas vezes. Calcule a probabilidade de obtermos cara no segundo lançamento.

Indicamos por C e K as faces cara e coroa, respectivamente, temos que o espaço amostral E é:

E = {(C,C) , (C, K) , (K,K) , (K,C) }, n(E) = 4.

O evento que queremos é:

A = {(C,C) , (K,C) }, n(A) = 2

Logo: $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Agora, calcule a probabilidade de obtermos cara no segundo lançamento sabendo que obtivemos cara no primeiro lançamento.

Temos dois eventos a considerar: cara no primeiro lançamento, B = {(C,C) , (C,K)}, e cara no segundo lançamento, A = {(C,C) , (K,C)}. Como sabemos que ocorreu o evento B, temos que o evento A só pode ter ocorrido na intersecção de A e B:

$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{2}$

Observando as respostas das duas probabilidades, temos:

$$P(A|B) = P(A) = \frac{1}{2}$$

Por isso, dizemos que A e B são eventos independentes.

Avaliação

A avaliação será realizada no transcorrer dos questionamentos apresentados, primeiramente observando a formação de conceitos pelos alunos, analisando seus questionamentos e intervenções, procurando, por meio do diálogo, perceber se houve assimilação dos conteúdos propostos. Pela leitura das produções dos alunos, o professor avaliará sugerindo as mudanças e adequações necessárias, estimulando as leituras e quando necessário, o ***feedback*** dos conteúdos.

Atividade 3

Probabilidade Condicional

O que o aluno poderá aprender com esta aula

- Qual o significado de Probabilidade Condicional.
- Determinação do novo espaço amostral.
- Calcular a probabilidade condicional.

Duração das atividades

2 aulas de 50 minutos cada

Conhecimentos prévios trabalhados pelo professor com o aluno

- Evento e chances de um evento
- Teoria dos conjuntos e operações de união, interseção e diferença de dois conjuntos
- Par ordenado
- Cálculo de Probabilidade.

Estratégias e recursos da aula

Exibição do vídeo: http://www.youtube.com/watch?v=QZjWYUib4jU ou http://www.youtube.com/watch?v=YP9ogKGvk4w

Promova então uma discussão na turma e proponha que os alunos pesquisem sobre o assunto e tragam mais informações sobre as aplicações da Teoria das Probabilidades no cotidiano e em outras áreas de estudo.

Se achar necessário explique o conteúdo no quadro de pincel e peça aos alunos que anote no caderno, para em caso de dúvidas, voltar á explicação.

Quando discorremos sobre **alguns conceitos da probabilidade** e também sobre a **união de dois eventos**, os exemplos dados sempre calculavam a probabilidade de um evento ocorrer diretamente em função do espaço amostral.

A **probabilidade condicional** trata da probabilidade de ocorrer um evento **A**, tendo ocorrido um evento **B**, ambos do espaço amostral **S**, ou seja, ela é calculada sobre o evento **B** e não em função o espaço amostral **S**. Antes da realização de um experimento, é necessário que já tenha alguma informação sobre o evento que se deseja observar. Nesse caso, o espaço amostral se modifica e o evento tem a sua probabilidade de ocorrência alterada.

A probabilidade de ocorrência de um evento **A** em relação a um evento ocorrido **B** é expressa como:

$P(\frac{A}{B})$

Para calculá-la podemos nos utilizar da fórmula:

$$P(\frac{A}{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Sabemos que $P(A \cap B)$, a probabilidade da intersecção, é a razão do seu número de elementos, para o número de elementos do espaço amostral:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

A probabilidade de **B** também é a razão do seu número de elementos, para o número de elementos do espaço amostral:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

Os substituindo na fórmula original temos:

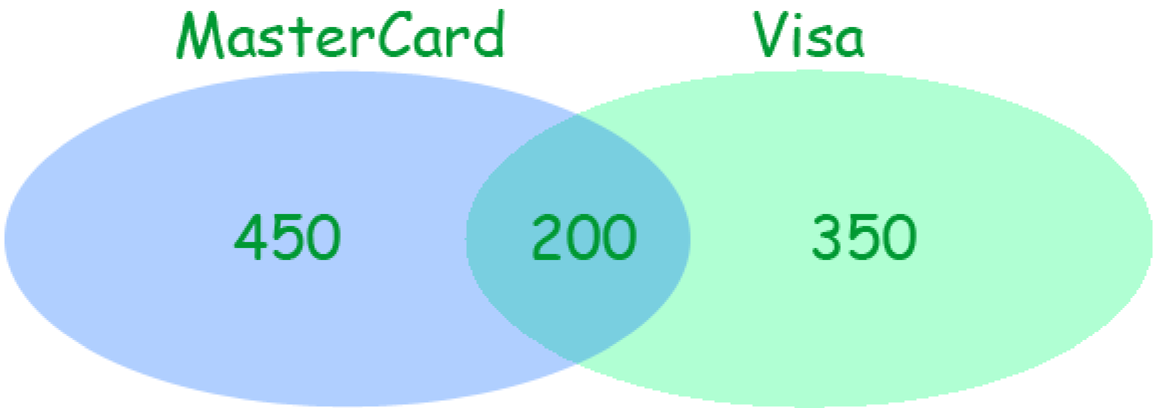
$$P(A \mid B) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} \quad \text{ou} \quad P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Para uma melhor compreensão da teoria, vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo

- **Uma pesquisa realizada entre 1000 consumidores, registrou que 650 deles trabalham com cartões de crédito da bandeira MasterCard, que 550 trabalham com cartões de crédito da bandeira VISA e que 200 trabalham com cartões de crédito de ambas as bandeiras. Qual a probabilidade de ao escolhermos deste grupo uma pessoa que utiliza a bandeira VISA, ser também um dos consumidores que utilizam cartões de crédito da bandeira MasterCard?**

Observe a figura abaixo e a compare com as informações do enunciado. Fazer isto poderá lhe ajudar na resolução de outros **problemas**:



De onde tiramos que:

A probabilidade procurada é dada pela fórmula:

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Como supracitado a probabilidade da intersecção é a razão do seu número de elementos, para o número de elementos do espaço amostral, então a fórmula acima pode ser reduzida a:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

O número de pessoas que utilizam as duas bandeiras, ou seja, a quantidade de elementos da intersecção é igual a **200**, já o número de consumidores que utilizam ao menos a bandeira **VISA** é **550**, portanto:

- **A probabilidade de escolhida uma pessoa que utiliza a bandeira VISA, ser também um usuário da bandeira MASTERCARD é $^{4}/_{11}$.**

Acima tratamos da probabilidade da ocorrência de um evento **A** tendo ocorrido um evento **B**. Se tivéssemos a probabilidade da ocorrência de um evento **B** tendo ocorrido um evento **A**, a fórmula para o cálculo desta probabilidade seria:

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

Havendo necessidade revisão, o professor poderá exibir o vídeo cujo link é: http://www.youtube.com/watch?v=aPDmSmNv2DQ

Avaliação

Avaliar a participação dos alunos durante as atividades desenvolvidas. Avaliar a apresentação da pesquisa proposta no início dessa aula, em que os alunos mostrarão aplicações da Teoria das Probabilidades no cotidiano e em outras áreas de estudo.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

- **1 – Utilizar exercícios do livro didático para a fixação da aprendizagem e desenvolvimento da capacidade de interpretação dos enunciados e do raciocínio lógico.**
- **2 – Lista de exercícios elaborada com atividades sobre Probabilidade cobradas nas avaliações externas: SAERJINHO, SAERJ, ENEM e vestibulares diversos.**
- **3 – Utilizar os Roteiros de Ação como tarefa de casa.**

Avaliação

Com os vídeos apresentados e as atividades de fixação realizadas será possível avaliar o conhecimento dos alunos em relação:

- Calcular a probabilidade condicional de um evento;
- Revolver problemas que envolvam o cálculo da probabilidade da união de eventos;

A participação dos alunos nas discussões dos exemplos desenvolvidos pelo professor em sala de aula é fundamental. Portanto sugere-se que o professor utilize a participação do aluno nestas discussões como forma de avaliação. Isto é, avalie o nível de participação, o interesse pelo assunto, o comportamento do aluno durante execução das atividades e o seu entrosamento com seus colegas.

O acompanhamento desta participação pode se dar através de textos redigidos pelos alunos ao final da aula sintetizando o conteúdo discutido, e as resoluções apresentadas pelos alunos aos exemplos discutidos em sala de aula. Observa-se também que nem todas essas sugestões de avaliação devem implicar em pontuação para os alunos, pois essa avaliação também pode fornecer parâmetros para o professor redirecionar seus trabalhos, se este for o caso.

Além disso, dentre as várias formas possíveis de avaliação, a utilização de itens (questões) é uma das que permite avaliar se o aluno adquiriu uma ou todas as habilidades citadas acima.

Acontecerá a aplicação de avaliação escrita individual, com questões contextualizadas, para investigação da capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos e raciocínio lógico para resolver problemas do cotidiano envolvendo probabilidade de forma geral.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

PAIVA, Manoel. **MATEMATICA PAIVA**, 2° Ano – 1ª Edição – São Paulo: Moderna, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. **MATEMATICA DANTE**, Volume Único – 1ª Edição – São Paulo: Editora Ática, 2008.

RIBEIRO, Jackson. **MATEMÁTICA CIÊNCIA, LINGUAGEM E TECNOLOGIA**, 2° Ano – 1ª Edição – São Paulo/2011.

IEZZI, Gelson. DEGENSZAJN, David. PÉRIGO, Roberto. ALMEIDA, Nilze de. **MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES**, 2° Ano – 6ª Edição – São Paulo/2010.

Endereços Eletrônicos:

- Silva, Marcos Noé Pedro da. União de dois eventos. Disponível em: http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/uniao-dois-eventos.htm> Acesso em 02/054/201.
- Miranda, Daniele de. Probabilidade Condicional. Disponível em: http://www.brasilescola.com/matematica/probabilidade-condicional.htm> acesso em 12/04/2014
- Noé, Marcos. Probabilidade de um evento Complementar. Disponível em: http://www.brasilescola.com/matematica/probabilidade-um-evento-complementar.htm> acesso em 12/04/2014
- http://www.youtube.com/watch?v=aPDmSmNv2DQ
- Martins, Matusalém Vieira. Probabilidade da União de Eventos. Disponível em: http://www.youtube.com/watch?v=BuWJitqAN5U.> acesso em 02/05/2014
- Rifo, Laura Letícia Ramos. Probabilidade Condicional. Disponível em: http://www.youtube.com/watch?v=QZjWYUib4jU> acesso em 03/05/2014