Reforço escolar · Matemática ·

Quantas escolhas?

Dinâmica 3

3ª Série | 1º Bimestre

Professor

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	3ª do Ensino Médio	Numérico Aritmético	Análise Combinatória

DINÂMICA	Quantas escolhas?
HABILIDADE PRINCIPAL	H51 – Resolver problemas com números racionais, envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão).
HABILIDADES ASSOCIADAS	H60 – Resolver problemas de contagem, utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjos simples e/ou combinações simples.
CURRÍCULO MÍNIMO	Utilizar o princípio multiplicativo e o princípio aditivo da contagem na resolução de problemas.

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Juntando partes.	20 a 25 min	Em grupos de 3	Individual
2	Um novo olhar...	Sistematizando	15 a 20 min	Nos mesmos grupos	Individual
3	Fique por dentro!	Quantas escolhas?	20 a 30 min	Nos mesmos grupos	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

Apresentação

Caro professor, esta dinâmica foi elaborada com o intuito de despertar a curiosidade dos alunos para problemas de contagem. Estes poderão, ou não, fazer parte do cotidiano do aluno, mas certamente são questões que, muitas vezes, desafiam a intuição. O problema que será proposto tratará da contagem de permutações, mas ainda sem formalismo. A ideia é preparar o estudante para o caso geral em que o formalismo seja importante. Na direção da revisão e preparando o estudante para as aplicações dos problemas de contagem ao cálculo de probabilidades, as primeiras etapas referem-se à adição e subtração de frações, em primeiro lugar, a partir de ilustrações geométricas e, depois, no contexto numérico.

Como sempre, você conta com margem de tempo para distribuir as diversas atividades de acordo com as necessidades da sua turma.

Primeira Etapa
Compartilhando Ideias

Atividade • Juntando partes

Objetivo

Somar frações a partir de desenhos.

Descrição da atividade

Cada aluno vai receber um cartão com uma fração e a marca do celular que ele pretende comprar. A fração representa a quantia que ele tem do preço total do aparelho desejado. Como a quantia não é suficiente, ele vai se reunir a alguns colegas para comprar um “aparelho comunitário” daquela marca. Formarão um grupo os alunos que pretendem comprar o celular da mesma marca. A tarefa do grupo será descobrir se, juntos, eles poderão comprar um aparelho.

Os cartões a serem distribuídos entre os alunos são os seguintes e estão disponíveis para recorte em anexo.

Celular: SAMSUNG Fração do preço: $a = \frac{1}{3}$	**Celular: SAMSUNG** Fração do preço: $b = \frac{1}{6}$	**Celular: SAMSUNG** Fração do preço: $c = \frac{1}{2}$
Celular: MOTOROLA Fração do preço: $a = \frac{2}{5}$	**Celular: MOTOROLA** Fração do preço: $b = \frac{1}{10}$	**Celular: MOTOROLA** Fração do preço: $c = \frac{3}{10}$
Celular: NOKIA Fração do preço: $a = \frac{1}{2}$	**Celular: NOKIA** Fração do preço: $b = \frac{1}{5}$	**Celular: NOKIA** Fração do preço: $c = \frac{2}{5}$
Celular: LG Fração do preço: $a = \frac{1}{4}$	**Celular: LG** Fração do preço: $b = \frac{1}{8}$	**Celular: LG** Fração do preço: $c = \frac{3}{8}$
Celular: SONY Fração do preço: $a = \frac{1}{2}$	**Celular: SONY** Fração do preço: $b = \frac{1}{4}$	**Celular: SONY** Fração do preço: $c = \frac{1}{4}$
Celular: RIM Fração do preço: $a = \frac{1}{5}$	**Celular: RIM** Fração do preço: $b = \frac{1}{2}$	**Celular: RIM** Fração do preço: $c = \frac{3}{10}$

Celular: APPLE (lê-se: épâl) Fração do preço: $a = \frac{1}{5}$	**Celular: APPLE** (lê-se: épâl) Fração do preço: $b = \frac{1}{10}$	**Celular: APPLE** (lê-se: épâl) Fração do preço: $c = \frac{2}{5}$	**Celular: APPLE** (lê-se: épâl) Fração do preço: $d = \frac{1}{2}$
Celular: ERICSSON Fração do preço: $a = \frac{1}{6}$	**Celular: ERICSSON** Fração do preço: $b = \frac{1}{3}$	**Celular: ERICSSON** Fração do preço: $c = \frac{1}{2}$	**Celular: ERICSSON** Fração do preço: $d = \frac{1}{6}$

Questão

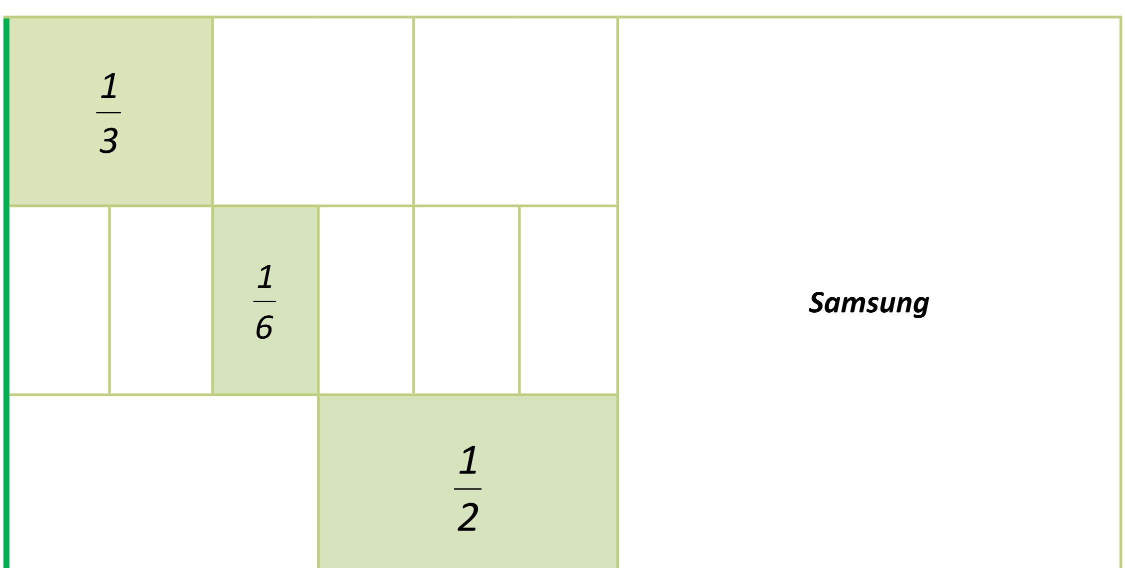
Você está recebendo um cartão com a marca do celular que você pretende comprar e a fração do preço total desse aparelho que você tem para essa compra. Você vai se reunir com os outros 2 ou 3 colegas que pretendem comprar um celular da mesma marca que você e verificar se, juntos, podem comprar 1 aparelho comunitário dessa marca.

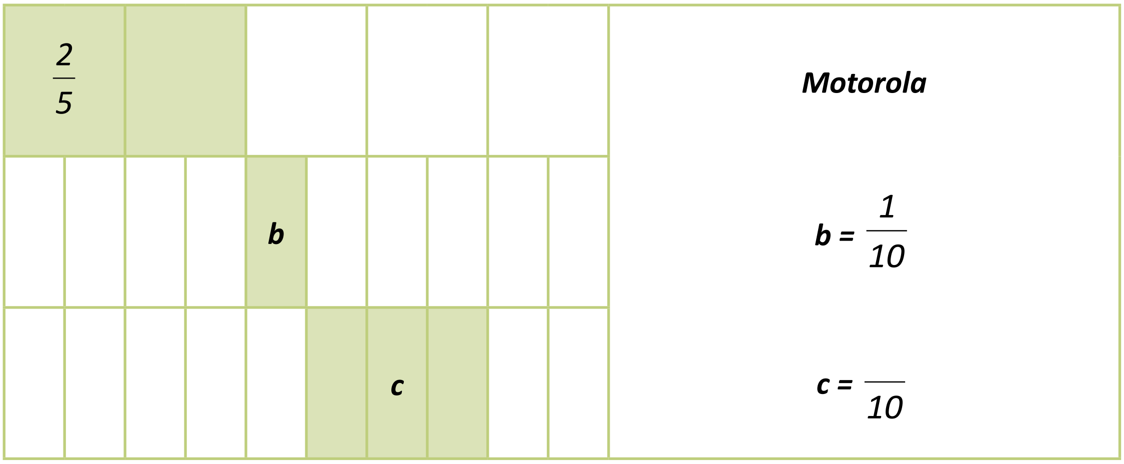
Para fazer esses cálculos, vocês podem ir pela seguinte trilha:

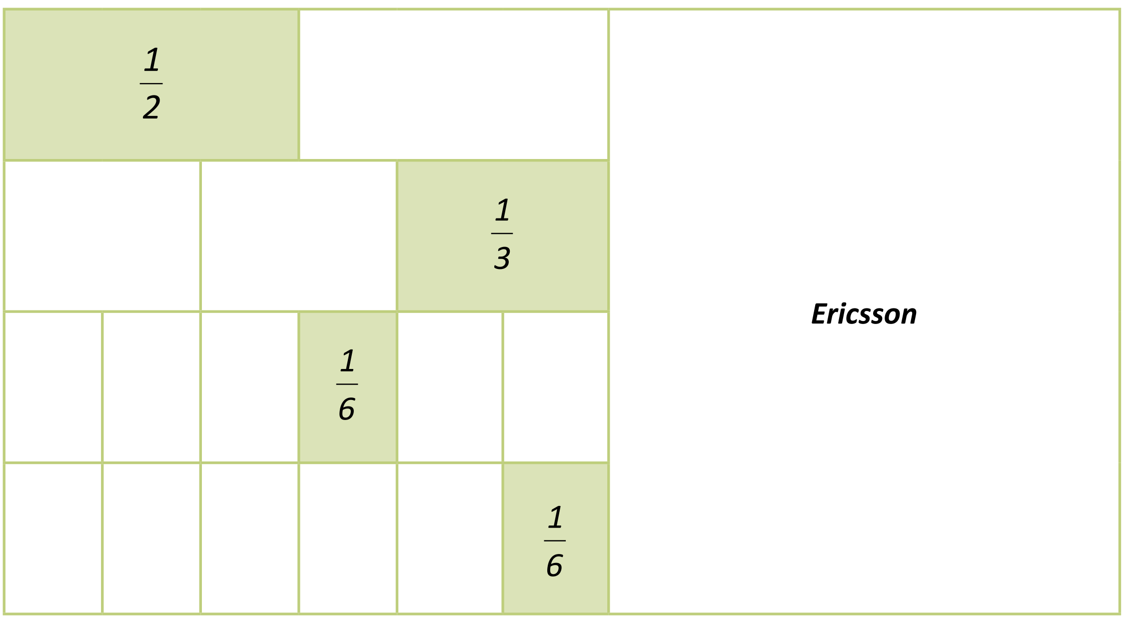
<u>1º passo</u>: Considere o retângulo a seguir como representante do preço total do seu aparelho e faça as divisões necessárias, a fim de destacar qual a fração desse preço que você recebeu:

Resposta

Espera-se que cada estudante faça as divisões necessárias, a fim de destacar a sua parte. Seguem alguns exemplos de respostas possíveis:







Nestes exemplos, as partes já estão tomadas numa posição favorável ao cálculo da soma. Certamente, os alunos não farão assim. Cada um deles vai considerar as primeiras partes em cada representação. No passo seguinte, eles serão orientados a tomar as partes juntas.

• • • • •

<u>2º passo</u>: Agora, no retângulo a seguir, junte todas as partes que seu grupo recebeu. Cuidado: vocês podem completar o retângulo todo, pode ficar faltando uma parte ou podem mesmo conseguir um pouco a mais, tendo de usar mais um retângulo onde será indicada a parte que sobra.

Resposta

Como há casos em que o total é maior do que a unidade, cada linha da coluna abaixo está representando 2 unidades.

1 Unidade	1 Unidade	Celular
a b c		Samsung
a b c		Motorola
a b c		Nokia
a b c		LG
a b c		Sony
a b c		Rim
a b c d		Apple
a b c	d	Ericsson

3º passo: Escreva o total da quantia que seu grupo recebeu numa fração só.

Resposta

Esse total pode ser escrito de várias formas, dependendo das subdivisões que os grupos fizerem para reunir as diferentes frações. Um resultado possível será este indicado na tabela seguinte.

Marca do celular	Fração do preço que o grupo tem
Samsung	$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{6}{6}=1$
Motorola	$\frac{2}{5}+\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$
Nokia	$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{11}{10}=\frac{10}{10}+\frac{1}{10}=1\frac{1}{10}$
LG	$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$
Sony	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1$
Rim	$\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}=\frac{10}{10}=1$

Apple	$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=\frac{5}{5}+\frac{1}{5}=1\frac{1}{5}$
Ericsson	$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}=\frac{6}{6}+\frac{1}{6}=1\frac{1}{6}$

• • • • •

4º passo: Você sabe qual foi a operação executada no 2º passo?

Resposta

A operação foi a adição das frações.

• • • • •

5º passo: O que vocês fizeram com as subdivisões que eram diferentes para escrever esse total numa só fração?

Resposta

Em todos os casos foi preciso fazer alguma subdivisão das partes de um aluno para somar com as partes de outro colega.

• • • • •

6º passo: A parte que vocês receberam dá exatamente para comprar um aparelho, sobrou uma parte ou faltou uma parte?

Resposta

Os grupos que pretendem comprar um aparelho Samsung, Sony ou Rim receberam a quantia exata, os que pretendem comprar Motorola ou LG receberam menos do que o necessário e os que pretendem comprar Nokia, Apple ou Ericsson receberam quantia maior do que o preço do aparelho.

• • • • •

7º passo: Qual a operação que você faz e com que números, para saber quanto sobrou ou quanto faltou?

Professor

Resposta

A operação é de subtração: aqueles que receberam a menos vão calcular 1 (pois a unidade de cada um é o preço do aparelho) menos a quantia que receberam e os que receberam a mais, vão calcular a fração que receberam menos 1.

Marca do celular	Fração do preço que o grupo tem.	Troco ou parte que falta em fração do preço.
Samsung	$\frac{6}{6} = 1$	0
Motorola	$\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$	$1 - \frac{4}{5} = \frac{5-4}{5} = \frac{1}{5}$
Nokia	$\frac{11}{10} = 1\frac{1}{10}$	$\frac{11}{10} - 1 = \frac{11-10}{10} = \frac{1}{10}$ *Para os que escreveram na forma de número misto,* $1\frac{1}{10}$*, fica mais fácil perceber que o que está sobrando é* $\frac{1}{10}$.
LG	$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$	$1 - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$
Sony	$\frac{4}{4} = 1$	0
Rim	$\frac{10}{10} = 1$	0
Apple	$\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5} - 1 = \frac{6-5}{5} = \frac{1}{5}$ *Para os que escreveram na forma de número misto,* $1\frac{1}{5}$*, fica mais fácil perceber que o que está sobrando é* $\frac{1}{5}$.

Ericsson	$\frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$	$\frac{7}{6} - 1 = \frac{7-6}{6} = \frac{1}{6}$ *Para os que escreveram na forma de número misto,* $1\frac{1}{6}$*, fica mais fácil perceber que o que está sobrando é* $\frac{1}{6}$.

• • • • •

8º passo: Vocês vão receber do seu professor as respostas a estas questões. Confiram o que vocês fizeram e, se ainda ficar alguma dúvida, conversem sobre ela com o seu mestre.

Professor, este passo pode ser substituído por uma discussão coletiva final, mas os cartões com as respostas podem ser entregues aos grupos, mesmo assim. Devem ser feitas as observações sobre a adaptação que tenha sido necessária em vista do número de alunos em sala.

Recursos necessários:

- Encarte do aluno
- Cartões de questões e de respostas, para recorte, em anexo
- Régua para os alunos (não muito importante, pois o trabalho pode ser feito aproximadamente.)

Procedimentos Operacionais

- *Professor, é importante, como sempre, que os cartões sejam recortados com antecedência.*
- *A distribuição dos cartões vai depender do número de alunos. Não será preciso distribuir todos os cartões. É importante, porém, que não haja estudante trabalhando sozinho. Na cópia dos cartões, cada linha forma um grupo, mas tendo em vista o uso dos cartões, não será necessário distribuir todos os cartões da mesma linha. O único problema quando sobrar cartão de alguma linha é que as respostas daquele grupo serão diferentes das que constam do seu Encarte. Uma possibilidade será a de entregar alguns cartões a mais a algum ou alguns grupos, a fim de entregar todos os cartões das linhas utilizadas. Se não forem distribuídos todos os cartões será conveniente fazer uma escolha adequada de forma a surgirem grupos distintos com a quantia igual ao preço total, menor do que o preço e maior do que o preço.*

Só assim, serão tratados todos os aspectos das operações de adição e subtração que a atividade pretende focalizar.

- *Se o tempo não for suficiente para uma discussão geral, será interessante entregar a cada grupo a solução final do seu problema. Esses cartões estão também em anexo, disponíveis para recorte. Será preciso fazer as devidas adaptações e avisar aos estudantes se algum grupo não receber todos os cartões da sua marca, pois as respostas se referem à questão como foi proposta no original.*

Intervenção Pedagógica

- *Professor, não se espera que, nesta etapa, os alunos resolvam o problema numericamente. Basta que eles façam as divisões e consigam somá-las. Nessa ocasião, eles terão necessidade de considerar partes de mesmo tamanho ao juntá-las. É o alerta para a necessidade de redução ao mesmo denominador.*
- *Espera-se que cada grupo faça as divisões necessárias para conseguir juntar a parte de cada um. Eles podem escrever as operações e a fração resultante a partir da contagem dessas partes, sem que ainda seja introduzido o formalismo da adição e subtração de frações. Alguns alunos, porém, podem recorrer ao procedimento já conhecido, pois sabem somar frações. Nesse caso, <u>não vamos fazê-los retornar</u> ao desenho como se eles ainda não soubessem fazer o cálculo automaticamente. Se o aluno já está na frente, <u>não vamos pedir que ele regrida</u>. Nossa intenção é que ele vá adiante, o quanto mais rapidamente, melhor!*
- *É possível que os alunos encontrem dificuldades em resolver os casos em que cheguem a uma fração imprópria e demandem mais a sua ajuda.*

Segunda Etapa
Um novo olhar...

20 MINUTOS

Atividade • Sistematizando

Objetivo

Formalizar o procedimento de adição e subtração de frações.

Descrição da atividade

Nos mesmos grupos já formados, os estudantes vão agora, fazer a adição e subtração de frações por redução ao mesmo denominador. A fim de ganhar tempo, na tentativa de recuperar o que o aluno já devia ter desenvolvido em séries anteriores, vamos usar o produto como denominador comum e deixar o uso do mínimo múltiplo comum somente para aqueles que já sabem calculá-lo.

Caro estudante:

Você viu na atividade anterior que, para calcular a quantia de todo o grupo, foi preciso fazer subdivisões, a fim de que todas as parcelas se referissem a um "pedaço" do inteiro de mesmo tamanho. Quem define o tamanho do "pedaço" é o número de partes "iguais" em que o inteiro é dividido, é o denominador (aquele que fica abaixo do traço da fração). Para somar duas frações, é preciso, portanto, que elas tenham o mesmo denominador. E se não tiverem? É sempre possível reduzir 2 frações ao mesmo denominador, por exemplo, tomando como novo denominador o produto dos 2 denominadores. Você já conhece esse procedimento, vamos treinar um pouquinho:

Questão

Reduza ao mesmo denominador as seguintes duplas de frações, identificando o número pelo qual você multiplicou os 2 termos de cada fração (observe que são muitas as possibilidades de fazer isso, escolha uma!):

Resposta

Frações	*Frações equivalentes com o mesmo denominador*	*Os termos da 1ª fração foram multiplicados por*	*Os termos da 2ª fração foram multiplicados por*
$\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$	$\frac{10}{15}$ e $\frac{12}{15}$	5	3
$\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{5}$	$\frac{5}{10}$ e $\frac{6}{10}$	5	2

$\frac{5}{6}$ e $\frac{4}{5}$	$\frac{25}{30}$ e $\frac{24}{30}$	*5*	*6*
$\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{7}$	$\frac{14}{21}$ e $\frac{6}{21}$	*7*	*3*
$\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{10}$	$\frac{20}{50}$ e $\frac{15}{50}$ ou $\frac{4}{10}$ e $\frac{3}{10}$	*10 ou 2*	*5 ou 1*

• • • • •

A redução ao mesmo denominador joga para os numeradores a responsabilidade pela comparação de frações (qual é a maior, ou a menor, ou são iguais?), bastando apenas comparar os numeradores. O mesmo ocorrerá para adicionar ou subtrair frações com o mesmo denominador.

Agora, calcule a soma das duas frações e a diferença entre a maior e a menor:

Resposta

Adição	*Cálculo da soma*	*Cálculo da diferença*
$\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$	$\frac{10+12}{15} = \frac{22}{15}$	$\frac{12}{15}$ *é maior do que* $\frac{10}{15}$ $\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12-10}{15} = \frac{2}{15}$
$\frac{1}{2} + \frac{3}{5}$	$\frac{5+6}{10} = \frac{11}{10}$	$\frac{6}{10}$ *é maior do que* $\frac{5}{10}$ $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6-5}{10} = \frac{1}{10}$
$\frac{5}{6} + \frac{4}{5}$	$\frac{25+24}{30} = \frac{49}{30}$	$\frac{25}{30}$ *é maior do que* $\frac{24}{30}$ $\frac{5}{6} - \frac{4}{5} = \frac{25-24}{30} = \frac{1}{30}$

Professor

$\frac{2}{3} + \frac{2}{7}$	$\frac{14+6}{21} = \frac{20}{21}$	$\frac{14}{21}$ *é maior do que* $\frac{6}{21}$ $\frac{2}{3} - \frac{2}{7} = \frac{14-6}{21} = \frac{8}{21}$
$\frac{2}{5} + \frac{3}{10}$	$\frac{20+15}{50} = \frac{35}{50} = \frac{7}{10}$ *ou* $\frac{4+3}{10} = \frac{7}{10}$	$\frac{20}{50}$ *é maior do que* $\frac{15}{50}$ $\frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{20-15}{50} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$ *ou* $\frac{4}{10}$ *é maior do que* $\frac{3}{10}$ $\frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{4-3}{10} = \frac{1}{10}$

Recursos necessários:

- Encarte do aluno

Procedimentos Operacionais

- *Professor, é bom que os alunos mantenham-se nos mesmos grupos, pois já discutiram entre si as subdivisões necessárias à redução ao mesmo número de partes na etapa anterior.*
- *Conforme o tempo disponível e o preparo dos alunos nessa fase, será preciso fazer a correção coletiva ou os próprios alunos vão se corrigindo nos grupos.*

- *Professor, esta dinâmica não se dedicou ao cálculo do mínimo múltiplo comum (M.M.C. ou mmc), preferindo usar o produto dos denominadores e deixar a simplificação para o final. É preciso, porém, deixar que os alunos que já conhecem o mmc que o utilizem. Em geral, o aluno sabe calcular o mmc, mas não sabe o que fazer com ele. Talvez o uso do produto, em que o aluno deve multiplicar os termos de uma fração pelo denominador da outra, seja de compreensão mais imediata e, portanto, de memorização mais simples.*
- *O problema de usar o produto, além de eventualmente ter de lidar com números maiores, esbarra no caso em que haja mais frações a somar. Nesse caso, ao invés de gastar tempo, voltando ao cálculo do mmc e o que fazer com ele, talvez seja preferível, somar as frações de 2 em 2, usando o produto dos denominadores em cada etapa. Por exemplo:*

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{7}+\frac{2}{5}=\frac{14+6}{21}+\frac{2}{5}=\frac{20}{21}+\frac{2}{5}=\frac{100+42}{105}=\frac{142}{105}$$

Terceira Etapa
Fique por dentro!

30 MINUTOS

Atividade • Quantas escolhas?

Objetivo

Resolver um problema de permutações simples, utilizando o Princípio Multiplicativo.

Descrição da atividade

Os grupos, agora, vão trabalhar num problema de permutações simples, mas sem essa nomenclatura. Trata-se do seguinte.

Mudando de assunto...

Questão 1

Um representante farmacêutico tem de visitar 6 cidades. A sorte dele é que existe uma estrada que liga quaisquer duas dessas cidades, sem passar pelas outras. Ao planejar sua viagem, ele quer saber de quantas maneiras ele pode fazer esse trajeto, passando uma única vez por cada uma das cidades A, B, C, D, E e F.

Você e seus colegas de grupo vão ajudá-lo nesse cálculo. Em princípio, a viagem dele pode começar e terminar em qualquer uma dessas cidades, mas sempre passando uma só vez em cada uma.

Resposta

Se os alunos já conhecem a linguagem de Análise Combinatória e suas fórmulas, vão perceber que cada um dos trajetos é uma permutação dos 6 elementos: A, B, C, D, E, F e são em número de $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

Se, por outro lado, ele ainda não conhece esse formalismo, pode ir raciocinando da seguinte forma:

Há 6 possibilidades para o início da viagem. Tendo visitado essa primeira cidade, há ainda 5 escolhas para 2ª cidade. Tendo visitado as 2 primeiras cidades, há 4 escolhas para 3ª cidade, e, prosseguindo, ao visitar as 3 primeiras cidades, sobram 3 escolhas para a 4ª cidade, depois dela há ainda 2 escolhas para a 5ª cidade e sobra uma única escolha possível para a 6ª cidade. São trajetos possíveis, por exemplo: A, B, C, D, E, F ou B, C, A, D, E, F, etc.

Foram, portanto, 6, 5, 4, 3, 2, 1 possibilidades em sequência de escolhas. Esquematicamente:

1ª cidade	***2ª cidade***	***3ª cidade***	***4ª cidade***	***5ª cidade***	***6ª cidade***
6 possibilidades	*5 possibilidades*	*4 possibilidades*	*3 possibilidades*	*2 possibilidades*	*1 possibilidade.*

Isso significa (Princípio Multiplicativo) que são $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$ trajetos possíveis.

• • • • •

Questão 2

Mais tarde, o representante farmacêutico pensou melhor e pretende fazer um trajeto que comece e termine na cidade A. Quantos são agora os trajetos possíveis?

Resposta

De novo, o aluno que conhece Análise Combinatória vai perceber que, tendo fixado a primeira cidade como sendo A, resta ordenar as outras 5 cidades, o que leva os trajetos possíveis a serem em número de $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Da mesma forma, o aluno que vai "pegar o touro à unha", sabe que, partindo de A, o viajante tem 5 escolhas para 2ª cidade, daí terá 4 escolhas para 3ª cidade e 3 *para a 4ª cidade, 2 para a 5ª cidade e 1 para a 6ª cidade, de onde ele voltará à cidade A. São trajetos possíveis: A, B, C, D, E, F, A ou A, B, D, E, F, C, A, etc.*

Esquematicamente:

Início do trajeto	***2ª cidade***	***3ª cidade***	***4ª cidade***	***5ª cidade***	***6ª cidade***	***Término do trajeto***
A	*5 possibilidades*	*4 possibilidades*	*3 possibilidades*	*2 possibilidades*	*1 possibilidade*	***A***

E, pelo mesmo Princípio Multiplicativo, o número deles é $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$.

Recursos necessários:

- Encarte do aluno

Professor

Procedimentos Operacionais

- *Esta atividade está prevista para ser desenvolvida pelos mesmos grupos, por facilidade de organização.*
- *Os grupos podem discutir as questões entre si, mas pode haver uma correção coletiva.*

Intervenção Pedagógica

- *Esta dinâmica não se preocupa com a formalização desses agrupamentos e com as fórmulas para sua contagem. O uso, ou não, da nomenclatura e das fórmulas vai depender do ponto em que os estudantes estão nesse assunto em suas turmas regulares. A ideia no Reforço é que eles tenham oportunidade de trabalhar as diversas situações para sentirem a necessidade do formalismo. É importante que o aluno perceba a facilidade que o uso de fórmulas representa, mas é importante também que ele veja que não é refém das fórmulas. O raciocínio pode superar a falta de memória nesse caso, com um pequeno custo no tempo gasto.*
- *Vale a pena lembrar, porém, que o aluno que quiser e souber aplicar diretamente e corretamente as fórmulas, não seja impedido de fazê-lo*

ao responder às questões aqui propostas.

- *O* **Princípio Multiplicativo** *pode ser enunciado como:*
  - *Se uma decisão pode ser tomada de m maneiras e se, uma vez tomada essa decisão, uma outra decisão puder ser tomada de n maneiras, então, o número de maneiras de se tomarem as duas decisões é dado pelo produto m × n.*

A resolução das questões 1 e 2 ilustra a aplicação deste princípio em problemas de contagem.

De modo geral, ele se aplica ainda para um número finito qualquer de decisões. Observe, por exemplo, que na questão 1 estão envolvidas seis decisões: a escolha das cidades que irão compor um trajeto.

Quarta Etapa

Quiz

15 MINUTOS

Questão (Saerjinho, 2º bimestre de 2011, 3ª série, Questão 41- Adaptada):

Pedro é um supersticioso e acredita que os números ímpares dão sorte. Ele escolheu para a placa de seu carro um número formado por quatro dígitos, todos números ímpares e distintos.

A quantidade de opções numéricas para a placa do carro de Pedro é igual a

a. 5

b. 20

c. 120

d. 480

e. 625

Quinta Etapa

Análise das Respostas ao Quiz

10 MINUTOS

Resposta

A resposta correta é o item ***(c)****. Todos os dígitos devem ser números ímpares e distintos entre si, que são 5 ímpares (1,3,5,7,9). Então há 5 possibilidades de escolha do primei-*

ro, 4 para o segundo, 3 para o terceiro e 2 para o quarto. Temos então: $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ opções numéricas para a placa do carro de Pedro.

Distratores

A opção (a) é um distrator menos provável, pois marcam esta opção os alunos que provavelmente pensaram só no fato de que são 5 números ímpares de 1 só algarismo.

A opção (b) pode ter sido escolhida pelo aluno que considerou o total de ímpares, 5, e, como são 4 dígitos, teria aplicado o princípio multiplicativo de maneira errada, fazendo $5 \times 4 = 20$.

A opção (d) poderia ser escolhida pelo aluno que tenha se enganado e feito uma multiplicação a mais por 4, tendo em vista que eram 4 as posições a serem preenchidas e $120 \times 4 = 480$.

Por fim, a opção (e) é um distrator que pode ocorrer com mais frequência, pois é a resposta ao caso em que pudesse haver <u>repetição de algarismos</u>. Nesse caso, sendo 5 os ímpares, são 5 possibilidades para cada uma das 4 posições. Pelo Princípio Multiplicativo, o número total de possibilidades seria, então

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 625.$$

Professor

Etapa Flex

Para saber +

1. Uma conversa interessante, no estilo do Malba Tahan, em que se usa adição e subtração de frações, você encontra em:

- http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1115

  Nessa história, Mussaraf, um arquiteto do reino Persa que busca inspirações em suas viagens, encontra, numa dessas aventuras, Abdul, herdeiro de um rico comerciante. Abdul expõe a Mussaraf alguns problemas que envolvem a fortuna herdada e a futura esposa, que foi encantada por um gênio maldoso. Como será que Mussaraf saiu-se?

2. Uma dica para pesquisa e conhecimento de novos problemas do dia a dia onde se usa combinatória, você encontra no site :

- http://sites.unifra.br/rived/ObjetosPedag%C3%B3gicos/Matem%C3%A1tica/tabid/428/language/pt-BR/Default.aspx

3. O planejamento dos trajetos do representante farmacêutico da 3ª etapa também pode prosseguir e fazê-lo estudar um pouco mais ainda de Análise

Combinatória. Por exemplo, se houver algum problema nas estradas, ele poderia fazer outros questionamentos:

Ao planejar a viagem, o representante farmacêutico descobriu que a estrada entre as cidades A e D estão muito ruins. Ele não quer passar por ela. Quantos desses trajetos o representante terá, se ainda pretende partir de A e voltar a A no final, sem usar a estrada que liga as cidades A e D?

Nesse caso, será preciso <u>excluir</u> dos 120 trajetos que começam e terminam em A, aqueles em que a cidade D esteja em 2º ou em 6º lugar. Ora, mas esses casos são aqueles em que se tem

A, D,(aqui ficam as outras 4 cidades em qualquer ordem ...) A

ou são aqueles em que se tem:

A (aqui ficam as outras 4 cidades em qualquer ordem ...), D, A.

Cada uma destas situações aparece 4! = 24 vezes. Logo, os <u>trajetos negados</u> pelo representante são 2 × 24 = 48. Logo, os trajetos aceitos por ele são:

$5! - 2 \times 4! = 120 - 2 \times 24 = 120 - 48 = 72.$

Um outro modo de fazer este cálculo seria contar diretamente as possibilidades e aplicar o Princípio Multiplicativo. Lembrando que o viajante tem restrições à 2ª e à 6ª cidade (não pode ser D), vamos começar por estas: saindo de A, o viajante não quer ir para D, então tem só 4 possibilidades, para 2ª cidade. Agora, ele tem só 3 possibilidades para 6ª cidade. Para 3ª cidade, ele tem 3 possibilidades (trocou a cidade visitada em 2º lugar por D, mas perdeu também aquela escolhida como 6ª cidade), para a 4ª cidade, tem 2 possibilidades e para a 5ª cidade ele tem 1 só possibilidade. No total, ele terá, portanto:

$4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 = 72.$

Esquematicamente:

Início do trajeto	2ª cidade	**<u>6ª cidade</u>**	3ª cidade	4ª cidade	5ª cidade	Término do trajeto
A	4 possibilidades	3 possibilidades	3 possibilidades	2 possibilidades	1 possibilidade	**A**

Agora, é com você!

1. Vamos fazer os cálculos de todos os grupos? Complete a tabela com o que cada grupo recebeu e o que faltou ou sobrou de cada grupo:

Resposta

A	b	c	d	a + b + c + d.	Sobra ou parte que falta para a unidade.
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2+1+3}{6}=\frac{6}{6}=1$	0
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{2}{5}+\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{4+1+3}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$	$1-\frac{4}{5}=\frac{5-4}{5}=\frac{1}{5}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5+2+4}{10}=\frac{11}{10}=1\frac{1}{10}$	$\frac{11}{10}-1=\frac{11-10}{10}=\frac{1}{10}.$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{2+1+3}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$	$1-\frac{3}{4}=\frac{4-3}{4}=\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2+1+1}{4}=\frac{4}{4}=1$	0
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}=\frac{2+5+3}{10}=\frac{10}{10}=1$	0
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{2+1+4+5}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}-1=\frac{6-5}{5}=\frac{1}{5}.$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1+2+3+1}{6}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$	$\frac{7}{6}-1=\frac{7-6}{6}=\frac{1}{6}.$

2. Voltando à história de Mussaraf e Abdul, contada em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1115, vamos refazer os cálculos que o arquiteto fez para ajudar Abdul: o pai de Abdul deixou $\frac{1}{2}$ de sua fortuna para o filho mais velho, $\frac{1}{3}$ para o filho do meio e $\frac{1}{9}$ para Abdul. A dificuldade deles é que essa fortuna era de 35 camelos e a divisão era impossível. Mas essa é a história contada no vídeo indicada na Etapa Flex. Por ora, vamos verificar se o pai de Abdul distribuiu toda a sua fortuna entre seus 3 filhos. Vamos ver qual é a soma?

Resposta

Como

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{3+2}{6}+\frac{1}{9}=\frac{\;}{\;}+\frac{1}{9}=\frac{45+6}{54}=\frac{51}{54}=\frac{17}{18}$$

Professor

e $\frac{17}{18}$ é menor do que $\frac{18}{18}$ que é igual a 1.

Conclui-se que o pai de Abdul não destinou aos filhos toda a sua fortuna, pois faltou $\frac{1}{18}$.

Certamente, os estudantes que conhecerem o mmc, vão poder fazer essa soma de uma só vez, levando em conta que mmc (2, 3, 9) = 18 e, então:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{9+6+2}{18} = \frac{17}{18}.$$

• • • • •

3. E Mussaraf ainda ajudou Abdul a resolver 2 problemas sobre tanques e torneiras, cujas soluções devolveriam a bela princesa, noiva de Abdul, que fora transformada em uma pomba por um gênio mau. Gênios maus não existem e princesas são poucas, mas esses problemas de torneiras costumam frequentar vestibulares e outras provas:

   Uma torneira verde enche um tanque (com o ralo fechado) em 30 minutos e a torneira vermelha faz o mesmo em 45 minutos. Se o ralo for aberto enquanto o tanque está cheio, ele vai ficar vazio em 90 minutos. As questões que Abdul apresentou a Mussaraf foram as seguintes:

a. Em quanto tempo, as 2 torneiras juntas enchem o tanque, com o ralo fechado?

b. Em quanto tempo, a torneira verde enche o tanque com o ralo aberto?

   (*O problema não diz, mas as questões se referem aos casos em que as vazões são constantes, tanto a do ralo quanto a das torneiras.*)

Resposta

A ideia de Mussaraf para a resolução desse problema foi reduzir a situação ao que acontece num minuto. Nas condições do problema é possível ver que em 1 minuto:

a torneira verde enche $\frac{1}{30}$ do tanque;

a torneira vermelha enche $\frac{1}{45}$ do tanque e

o ralo esvazia $\frac{1}{90}$ do tanque.

a. *Abertas as 2 torneiras, em 1 minuto elas devem encher* $\frac{1}{30}+\frac{1}{45}$ *do tanque e*

$$\frac{1}{30}+\frac{1}{45}=\frac{45+30}{1350}=\frac{75}{1350}=\frac{15}{270}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$$

Assim, as 2 torneiras abertas enchem $\frac{1}{18}$ *tanque em 1 minuto. O tanque cheio é representado por* $1=\frac{18}{18}$. *Logo, as duas torneiras juntas vão demorar 18 min para encher o tanque todo (com o ralo fechado!).*

O cálculo desta soma fica bem mais fácil para quem conhece o mmc, pois mmc (30,45) = 90:

$$\frac{1}{30}+\frac{1}{45}=\frac{3+2}{90}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$$

b. *Se em 1 minuto, a torneira verde enche* $\frac{1}{30}$ *do tanque e o ralo esvazia* $\frac{1}{90}$ *do tanque, o que vai sobrar de água no tanque em 1 minuto, com ambos abertos, será igual à diferença:* $\frac{1}{30}-\frac{1}{90}$ *(para calcular esta diferença, mesmo quem não conhece o mmc, pode perceber que basta multiplicar ambos os termos da 1ª fração por 3, que elas ficarão com o mesmo denominador):*

$$\frac{1}{30}-\frac{1}{90}=\frac{3-1}{90}=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}$$

ora, se em 1 minuto, sobram $\frac{1}{45}$ *do tanque com água, então, passados 45 minutos, o tanque estará cheio.*

Professor

Cartões para formação dos grupos:

Celular: SAMSUNG Fração do preço: $a = \frac{1}{3}$	**Celular: SAMSUNG** Fração do preço: $b = \frac{1}{6}$	**Celular: SAMSUNG** Fração do preço: $c = \frac{1}{2}$
Celular: MOTOROLA Fração do preço: $a = \frac{2}{5}$	**Celular: MOTOROLA** Fração do preço: $b = \frac{1}{10}$	**Celular: MOTOROLA** Fração do preço: $c = \frac{3}{10}$
Celular: NOKIA Fração do preço: $a = \frac{1}{2}$	**Celular: NOKIA** Fração do preço: $b = \frac{1}{5}$	**Celular: NOKIA** Fração do preço: $c = \frac{2}{5}$
Celular: LG Fração do preço: $a = \frac{1}{4}$	**Celular: LG** Fração do preço: $b = \frac{1}{8}$	**Celular: LG** Fração do preço: $c = \frac{3}{8}$
Celular: SONY Fração do preço: $a = \frac{1}{2}$	**Celular: SONY** Fração do preço: $b = \frac{1}{4}$	**Celular: SONY** Fração do preço: $c = \frac{1}{4}$
Celular: RIM Fração do preço: $a = \frac{1}{5}$	**Celular: RIM** Fração do preço: $b = \frac{1}{2}$	**Celular: RIM** Fração do preço: $c = \frac{3}{10}$

Celular: APPLE (lê-se: épâl) Fração do preço: $a = \frac{1}{5}$	**Celular: APPLE** (lê-se: épâl) Fração do preço: $b = \frac{1}{10}$	**Celular: APPLE** (lê-se: épâl) Fração do preço: $c = \frac{2}{5}$	**Celular: APPLE** (lê-se: épâl) Fração do preço: $d = \frac{1}{2}$
Celular: ERICSSON Fração do preço: $a = \frac{1}{6}$	**Celular: ERICSSON** Fração do preço: $b = \frac{1}{3}$	**Celular: ERICSSON** Fração do preço: $c = \frac{1}{2}$	**Celular: ERICSSON** Fração do preço: $d = \frac{1}{6}$

Cartões com respostas para os grupos (cortar em tiras: 2 linhas formam uma tira para um grupo):

Samsung	*a*	*b*	*c*		$\frac{6}{6} = 1$	0
	Preço do Samsung					
Motorola	*a*	*b*	*c*		$\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$	$1 - \frac{4}{5} = \frac{5-4}{5} = \frac{1}{5}$
	Preço do Motorola					
Nokia	*a*	*b*	*c*		$\frac{11}{10} = 1\frac{1}{10}$	$\frac{11}{10} - 1 = \frac{11-10}{10} = \frac{1}{10}.$
	Preço do Nokia					

Anexo II

LG	a	b	c		$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$	$1 - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$
	Preço do LG					
Sony	a	b	c		$\frac{4}{4} = 1$	0
	Preço do Sony					
Rim	a	b	c		$\frac{10}{10} = 1$	0
	Preço do Rim					

Anexo II

Apple	*a* | *b* | *c* | *d*	$\frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1\frac{2}{10} = 1\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5} - 1 = \frac{6-5}{5} = \frac{1}{5}$.
	Preço do Apple		
Ericsson	*a* | *b* | *c* | *d*	$\frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$	$\frac{7}{6} - 1 = \frac{7-6}{6} = \frac{1}{6}$.
	Preço do Ericsson		

Anexo II