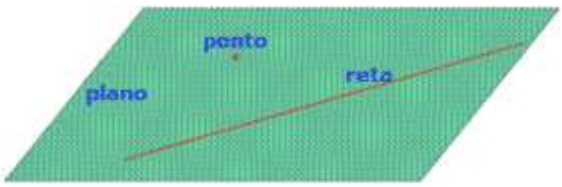
Formação Continuada em MATEMÁTICA

Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 2º Ano – 1º Bimestre/2014

Plano de Trabalho

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ESPACIAL



Tarefa 1

Cursista: Wendel do Nascimento Pinheiro

Tutor: Susi Cristine Britto Ferreira

S U M Á R I O

INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem por objetivo permitir que os alunos percebam a aplicabilidade dos conteúdos denominados "Introdução à Geometria Espacial" para resolução de problemas que através de assuntos do cotidiano visando um melhor entendimento.

Geometria Espacial é o estudo da geometria no espaço, em que estudamos as figuras que possuem mais de duas dimensões. Essas figuras recebem o nome de sólidos geométricos ou figuras geométricas espaciais e são conhecidas como: prisma (cubo, paralelepípedo), pirâmides, cone, cilindro, esfera.

Estudar geometria, ajuda o aluno desde os primórdios de seus estudos a raciocinar , a pensar e desenvolver sua criatividade , conhecendo formas e objetos estabelecendo suas características próprias, independente da área que ele pretende cursar. Existem exemplos de aplicações do uso da geometria espacial nas construções em geral, na Arte e Arquitetura.

No geral, serão necessários doze tempos de cinquenta minutos para explicações e fixação da aprendizagem aliado a realização de avaliação escrita.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1 : Compreender os conceitos primitivos da geometria espacial

- **Habilidade Relacionada**: - Reconhecer as posições de retas e planos no espaço.

- **Pré-requisitos**: Nenhum

- **Tempo de Duração**: 100 minutos

- **Recursos Educacionais Utilizados**: Data show vídeo aula.

- **Organização da turma**: Individual.

- **Objetivos:**Reconhecer a existência dos pontos retas e plano, bem como suas características e posições relativas.

- **Metodologia adotada**: Será apresentado um vídeo com o intuito de esclarecer os conceitos primitivos de ponto, reta e plano. Dando continuação serão mostradas também figuras ilustradas demonstrando o uso no cotidiano. Ao final será aplicado um exercício de fixação para análise do conhecimento adquirido.

Apresentação da vídeo – aula:

Vídeo aula: http://www.youtube.com/watch?v=eZx05a_FgRA

A partir da vídeo aula vamos desenvolver os conceitos primitivos.

Ponto, reta e plano

Entes primitivos

A definição dos entes primitivos **ponto**, **reta** e **plano** é quase impossível, o que sabe-se muito bem e aqui será o mais importante é sua representação geométrica e espacial.

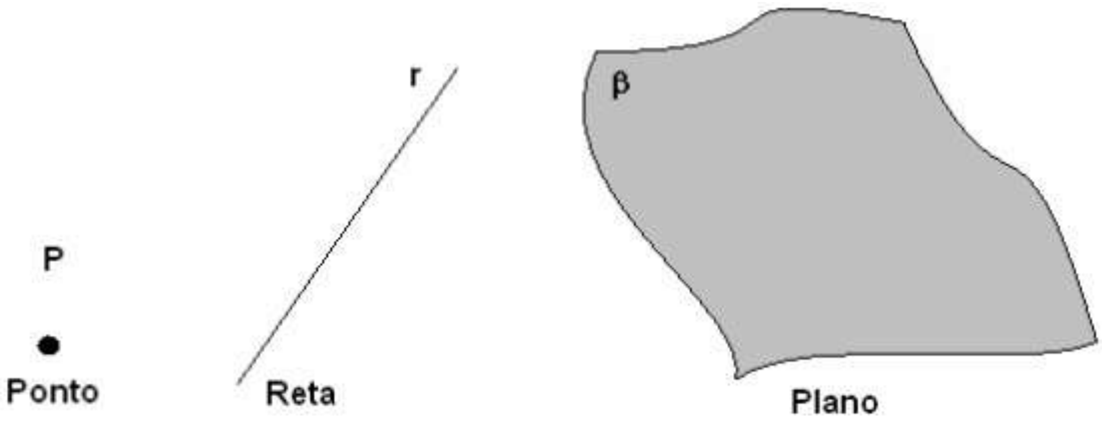
Representação, (notação)

→ Pontos serão representados por letras latinas maiúsculas; ex: A, B, C,...

→ Retas serão representados por letras latinas minúsculas; ex: a, b, c,...

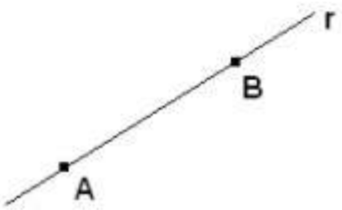
→ Planos serão representados por letras gregas minúsculas; ex:

Representação gráfica

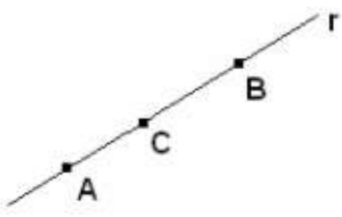


Postulados primitivos da geometria, qualquer postulado ou axioma é aceito sem que seja necessária a prova, contanto que não exista a contraprova.

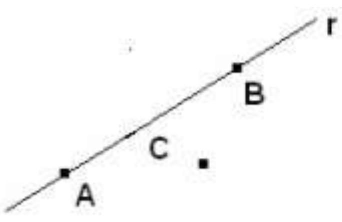
1º Numa reta bem como fora dela há infinitos pontos distintos.
2º Dois pontos determinam uma única reta (uma e somente uma reta).



3º Pontos colineares pertencem à mesma reta.

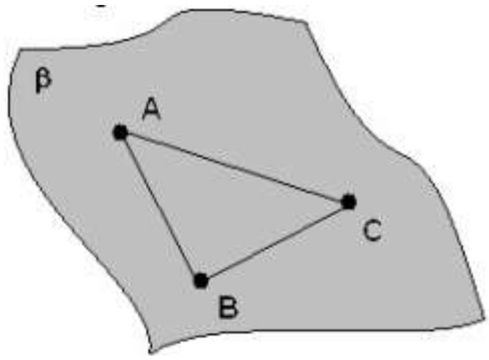


A, B e C são colineares.

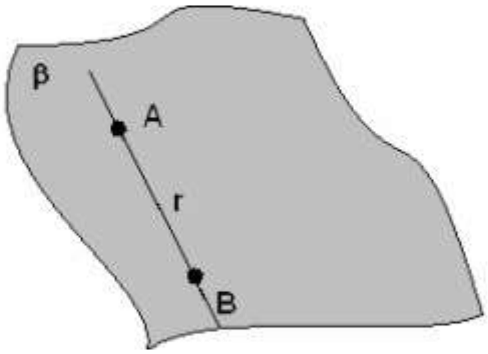


A, B e C não são colineares.

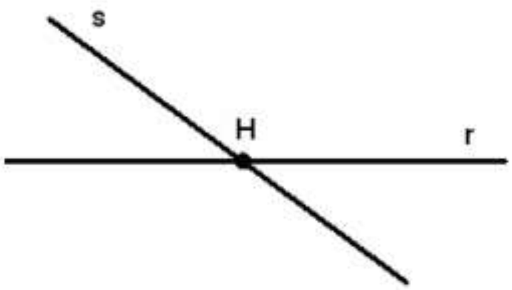
4º Três pontos determinam um único plano.



5º Se uma reta contém dois pontos de um plano, esta reta está contida neste plano.

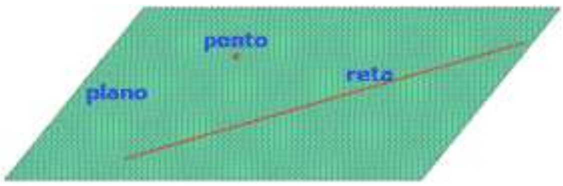


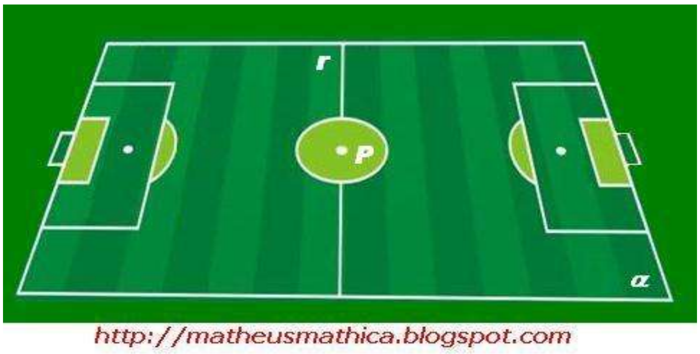
6º Duas retas são concorrentes se tiverem apenas um ponto em comum.

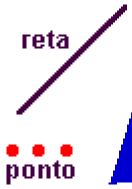


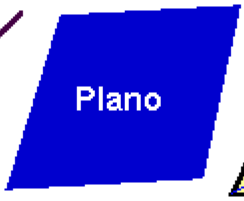
Observe que $r \cap s = \{H\}$. Sendo que H está contido na reta **r** e na reta **s**.

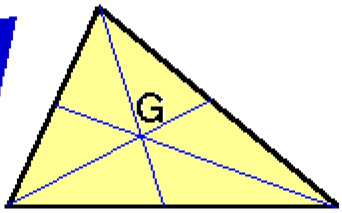
Outros exemplos ilustrativos:

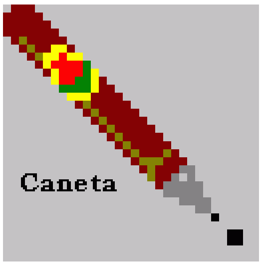












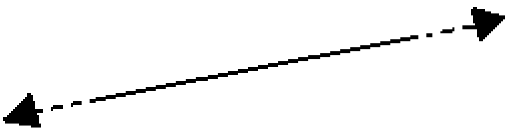
Axiomas

Axiomas, ou postulados (**P**), são proposições aceitas como verdadeiras sem demonstração e que servem de base para o desenvolvimento de uma teoria.

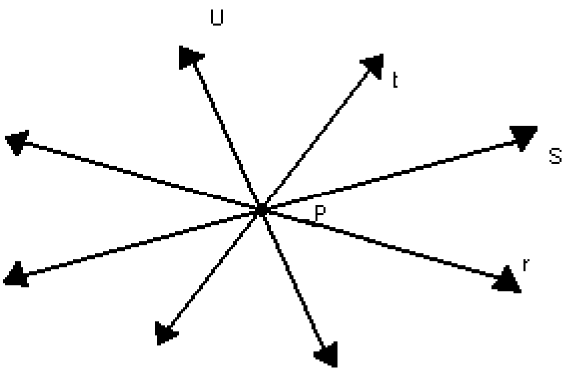
Temos como axioma fundamental: *existem infinitos pontos, retas e planos.*

Postulados sobre pontos e retas

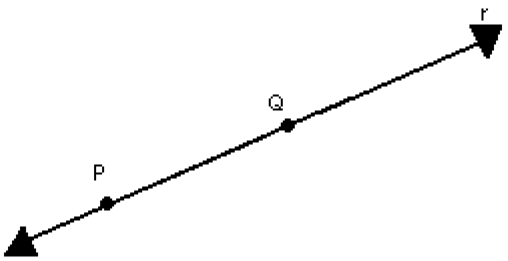
P_1)A reta é infinita, ou seja, contém infinitos pontos.



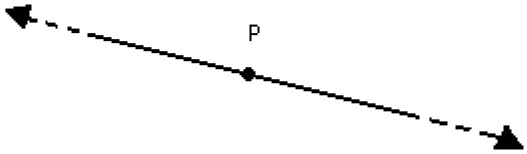
P_2)Por um ponto podem ser traçadas infinitas retas.



P_3) Por dois pontos distintos passa uma única reta.

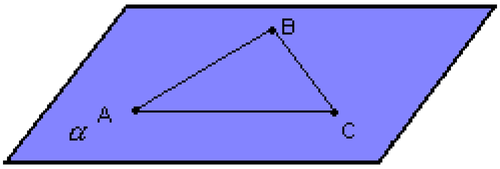


P_4) Um ponto qualquer de uma reta divide-a em duas semi-retas.



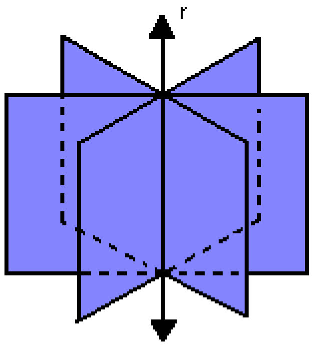
Postulados sobre o plano e o espaço

P_5) Por três pontos não-colineares passa um único plano.



P$_6$) O plano é infinito, isto é, ilimitado.

P$_7$) Por uma reta pode ser traçada uma infinidade de planos.

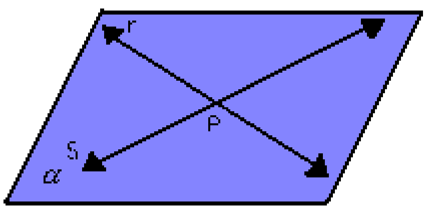


P$_8$) Toda reta pertencente a um plano divide-o em duas regiões chamadas *semiplanos.*

P$_9$) Qualquer plano divide o espaço em duas regiões chamadas semi-espaços.

Posições relativas de duas retas

No espaço, duas retas distintas podem ser c*oncorrentes*, *paralelas ou reversas:*

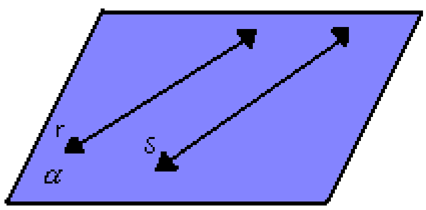


Concorrentes

$r \cap s = \{P\}$

$r \subset \alpha$

$s \subset \alpha$

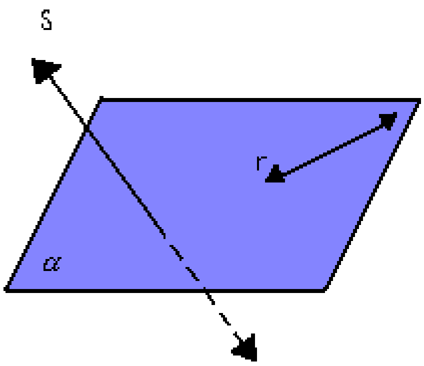


Paralelas

$r \cap s = \{\ \}$

$r \subset \alpha$

$s \subset \alpha$



Re *versas*

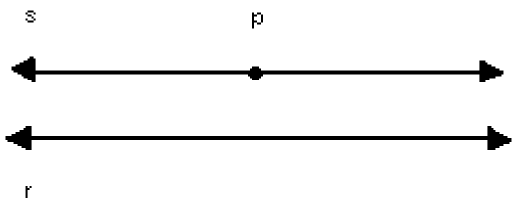
$r \cap s = \{\ \}$

não existe plano que copntenha

r e s simultanea mente

Postulado de Euclides ou das retas paralelas

P_{10}) Dados uma reta **r** e um ponto P $\notin$ r, existe uma única reta **s**, traçada por **P**, tal que r // s:

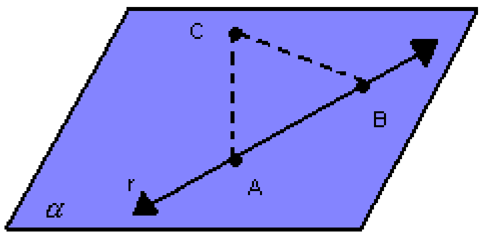


$$\left.\begin{array}{l} P \notin r \\ P \in s \end{array}\right\} \exists | s//r$$

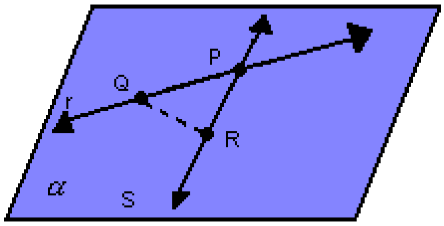
Determinação de um plano

Lembrando que, pelo postulado 5, um único plano passa por três pontos não-colineares, um plano também pode ser determinado por:

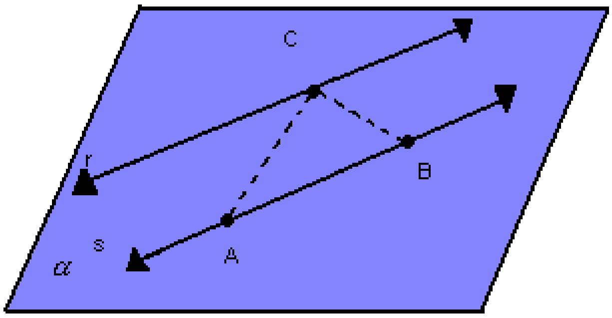
- uma reta e um ponto não-pertencente a essa reta:



- duas retas distintas concorrentes:



- duas retas paralelas distintas:

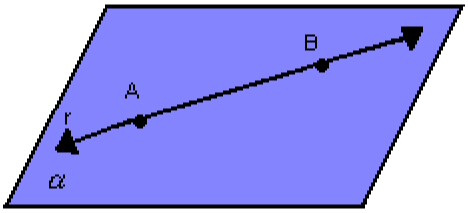


Posições relativas de reta e plano

Vamos considerar as seguintes situações:

a) reta contida no plano

Se uma reta **r** tem dois pontos distintos num plano α, então **r** está contida nesse plano:

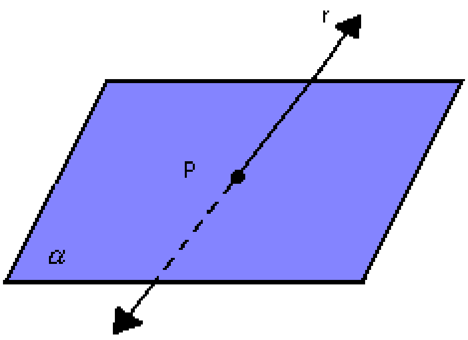


$$\left.\begin{array}{l} A \in \alpha \text{ e } B \in \alpha \\ A \in r \text{ e } B \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r \subset \alpha$$

b) reta concorrente ou incidente ao plano

Dizemos que a reta **r** "fura" o plano α ou que **r** e α são concorrentes

em **P** quando $r \cap \alpha = \{P\}$.



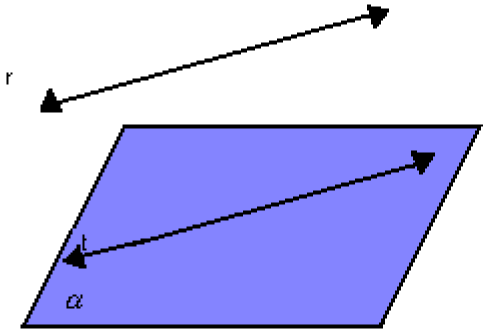
Observação: A reta **r** é reversa a todas as retas do plano que não passam pelo ponto **P**.

c) reta paralela ao plano

Se uma reta **r** e um plano α não têm ponto em comum, então a reta **r** é paralela a uma reta **t** contida no plano α; portanto, r // α

$$r \;//\; t \text{ e } t \subset \alpha \Rightarrow r \;//\; \alpha$$

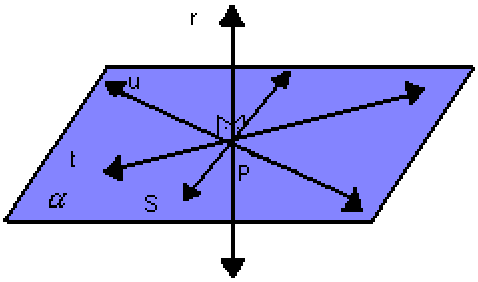
Em α existem infinitas retas paralelas, reversas ou ortogonais a **r**.



P_{11}) Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a sua intersecção é dada por uma única reta que passa por esse ponto.

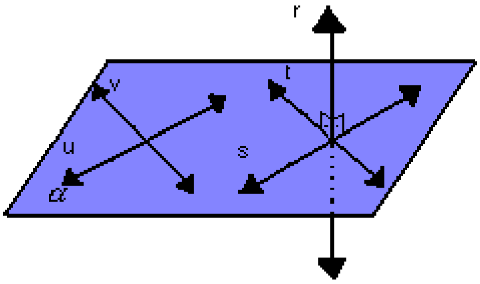
Perpendicularismo entre reta e plano

Uma reta **r** é perpendicular a um plano α se, e somente se, **r** é perpendicular a todas as retas de α que passam pelo ponto de intersecção de **r** e α.



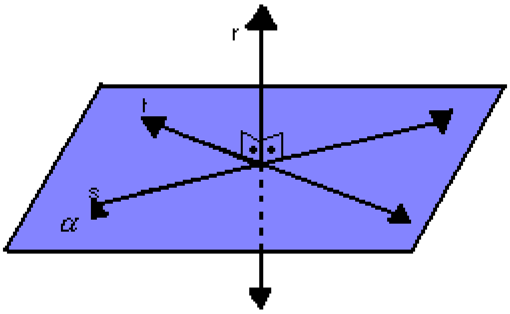
Note que:

- se uma reta **r** é perpendicular a um plano α, então ela é perpendicular ou ortogonal a toda reta de α:



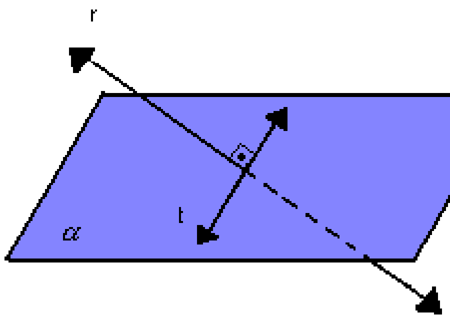
$$\left.\begin{array}{l} r \perp \alpha \\ s \subset \alpha, t \subset \alpha, u \subset \alpha, v \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp s, r \perp t, r \,\underline{\perp}\, u \text{ e } r \,\underline{\perp}\, v$$

- para que uma reta **r** seja perpendicular a um plano α, basta ser perpendicular a duas retas concorrentes, contidas em α:



$$\left.\begin{array}{l} r \perp s \text{ e } r \perp t \\ s \subset \alpha \text{ e } t \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp \alpha$$

Observe, na figura abaixo, por que não basta que **r** seja perpendicular a uma única reta **t** de α para que seja perpendicular ao plano:

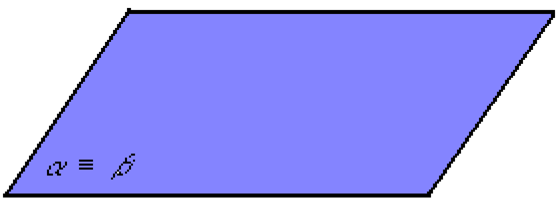


$$\left\{\begin{array}{l} r \perp t \,(t \subset \alpha) \\ r \text{ não é perpendicular a } \alpha \end{array}\right.$$

Posições relativas de dois planos

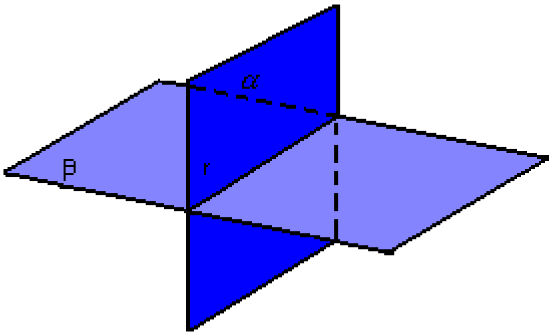
Consideramos as seguintes situações:

a) planos coincidentes ou iguais



b) planos concorrentes ou secantes

Dois planos, α e β, são concorrentes quando sua intersecção é uma única reta:



$\alpha \cap \beta = r$

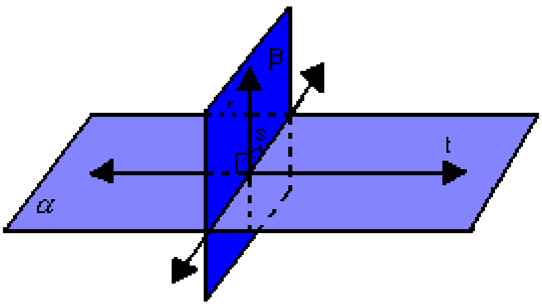
c) planos paralelo

Dois planos, α e β, são paralelos quando sua intersecção é vazia:

$\alpha // \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = \{ \ \}$

Perpendicularismo entre planos

Dois planos, α e β, são perpendiculares se, e somente se, existe uma reta de um deles que é perpendicular ao outro:



$\alpha \perp \beta \Rightarrow \exists r \subset \beta \text{ e } r \perp \alpha$

Observação: Existem infinitos planos perpendiculares a um plano dado; esses planos podem ser paralelos entre si ou secantes.

Exercícios:

1. Analise as seguintes afirmações, a seguir escreva nos parênteses (V) se for verdadeiro ou (F) se for falso.

( ) Existem dois planos distintos, passando ambos por um mesmo ponto e perpendiculares a uma reta.

( ) Se dois planos forem perpendiculares, todo plano perpendicular a um deles será paralelo ao outro.

( ) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.

( ) Se dois planos forem perpendiculares, toda reta paralela a um deles será perpendicular ao outro.

( ) Uma reta perpendicular a duas retas concorrentes de um plano é perpendicular a esse plano.

2. (Ufba) Na(s) questão(ões) a seguir escreva nos parênteses a soma dos itens corretos. Sobre pontos, retas e planos, pode-se afirmar:

(01) Por três pontos, passa uma única reta.

(02) Por três pontos, passa um único plano.

(04) Por um ponto fora de um plano, passa uma única reta perpendicular a esse plano.

(08) Planos paralelos interceptam duas retas distintas quaisquer, determinando sobre elas segmentos proporcionais.

(16) O plano que contém uma perpendicular a outro plano é perpendicular a esse segundo plano.

(32) Toda reta paralela a um plano é paralela a qualquer reta desse plano.

Soma ( )

3. Se r e s são duas retas paralelas a um plano α então:

a) r e s se interceptam;

b) r e s são paralelas;

c) r e s são perpendiculares;

d) r e s são reversas;

e) nada se pode concluir.

Atividade 1 : Conhecendo os Poliedros e suas planificações

- **Habilidade Relacionada:**
  - Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações .
  - Identificar e nomear os poliedros regulares.
- **Pré-requisitos**: Conceitos de ponto, reta e plano e polígonos regulares
- **Tempo de Duração**: 100 minutos

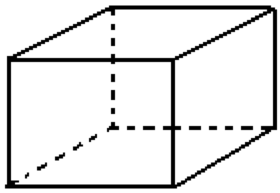
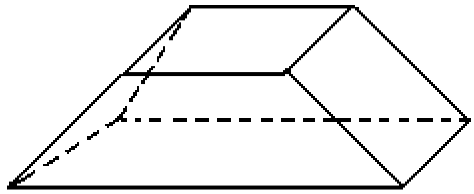
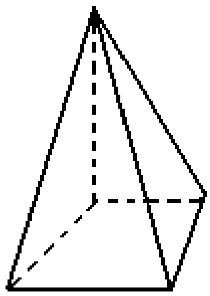
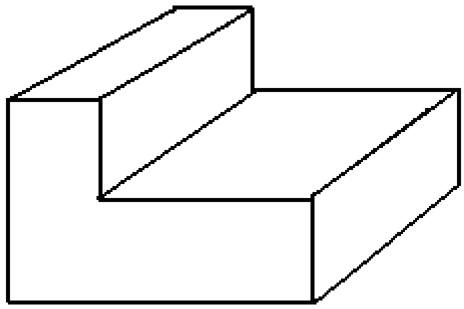
- **Recursos Educacionais Utilizados**: Folha de exercícios, lápis ou caneta hidrográfica.

- **Objetivos:** Conhecer e nomear os poliedros regulares por meio de sua planificação.
- **Organização da turma**: Individual

- **Metodologia adotada**: será passado ao aluno conteúdos relacionados para o conhecimento de poliedros e mostrando suas planificações com o objetivo de identificar e nomear . Ao final os alunos irão resolver a folha de exercícios.

Poliedros

Chamamos de *poliedro* o sólido limitado por quatro ou mais polígonos planos, pertencentes a planos diferentes e que têm dois a dois somente uma aresta em comum. Veja alguns exemplos:

Os polígonos são as faces do poliedro; os lados e os vértices dos polígonos são as arestas e os vértices do poliedro.

Poliedros convexos e côncavos

Observando os poliedros acima, podemos notar que, considerando qualquer uma de suas faces, os poliedros encontram-se inteiramente no mesmo semi-espaço que essa face determina. Assim, esses poliedros são denominados *convexos*.

Isso não acontece no último poliedro, pois, em relação a duas de suas faces, ele não está contido apenas em um semi-espaço. Portanto, ele é denominado côncavo.

Classificação

Os poliedros convexos possuem nomes especiais de acordo com o número de faces, como por exemplo:

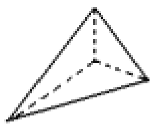
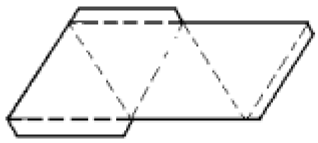
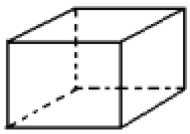
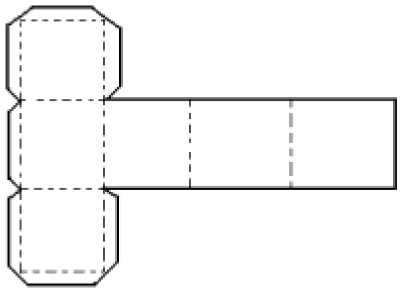
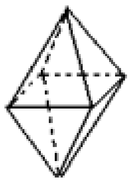
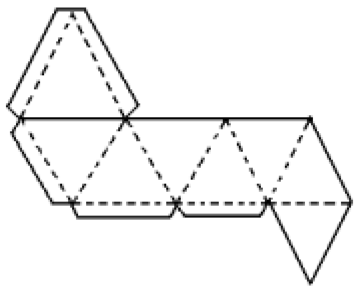
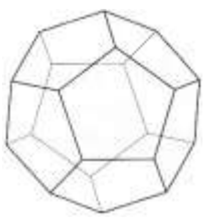
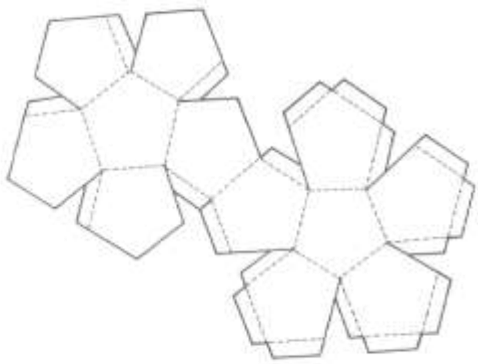
- tetraedro: quatro faces
- pentaedro: cinco faces
- hexaedro: seis faces

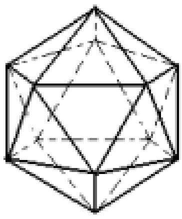
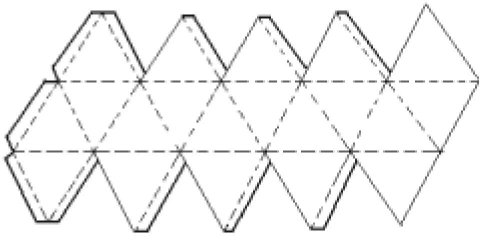
- heptaedro: sete faces
- octaedro: oito faces
- icosaedro: vinte faces

Poliedros regulares

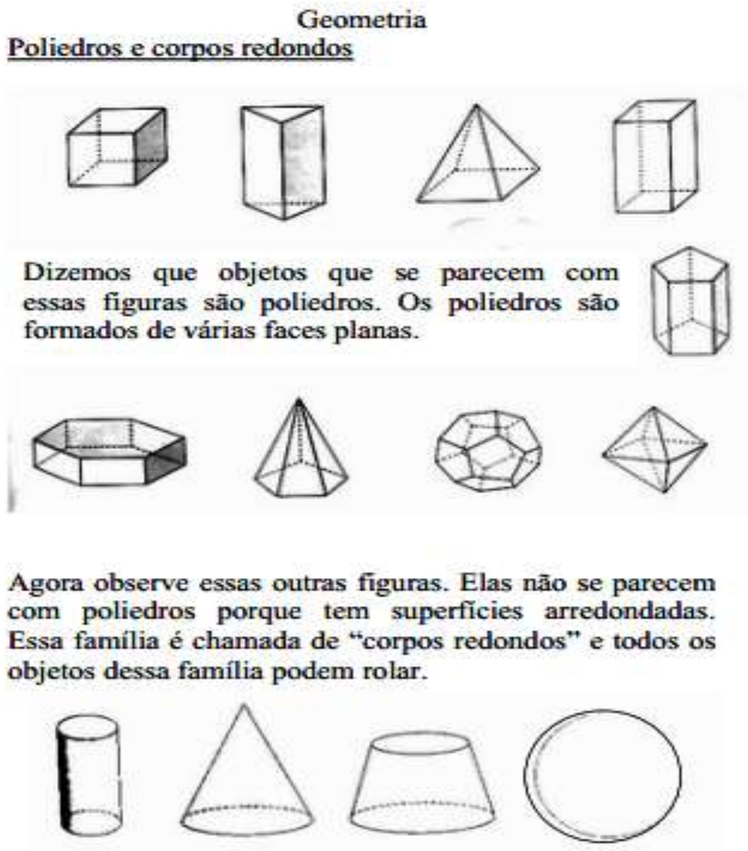
Um poliedro convexo é chamado de regular se suas faces são polígonos regulares, cada um com o mesmo número de lados e, para todo vértice, converge um mesmo número de arestas.

Existem cinco poliedros regulares:

Poliedro	**Planificação**	**Elementos**
 Tetraedro		4 faces triangulares 4 vértices 6 arestas
 Hexaedro		6 faces quadrangulares 8 vértices 12 arestas
 Octaedro		8 faces triangulares 6 vértices 12 arestas
 Dodecaedro		12 faces pentagonais 20 vértices 30 arestas

 Icosaedro		20 faces triangulares 12 vértices 30 arestas

Diferença entre poliedros e corpos redondos



Geometria

Poliedros e corpos redondos

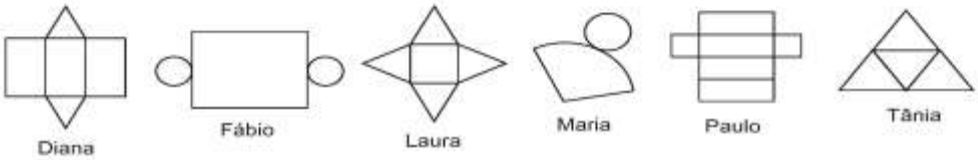
Dizemos que objetos que se parecem com essas figuras são poliedros. Os poliedros são formados de várias faces planas.

Agora observe essas outras figuras. Elas não se parecem com poliedros porque tem superfícies arredondadas. Essa família é chamada de "corpos redondos" e todos os objetos dessa família podem rolar.

Exercícios:

1ª questão:

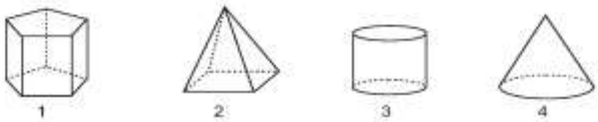
(M110140ES) Veja abaixo as planificações de alguns sólidos geométricos que os alunos receberam para montar.



Quais desses alunos receberam planificações de pirâmide?
A) Diana e Paulo.
B) Diana e Laura.
C) Fábio e Maria.
D) Laura e Tânia.
E) Paulo e Tânia.

2ª questão:

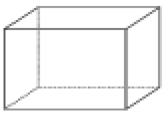
(M110025RJ) Observe os sólidos geométricos abaixo.



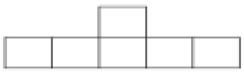
Desses sólidos, quais são poliedros?
A) 1 e 2.
B) 1 e 3.
C) 2 e 3.
D) 2 e 4.
E) 3 e 4.

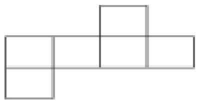
3ª questão:

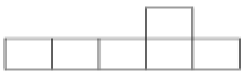
(M120095ES) Observe o cubo abaixo.

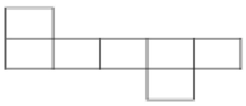


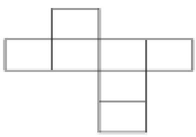
A figura que representa a planificação desse cubo é

A) 

B) 

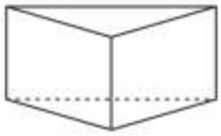
C) 

D) 

E) 

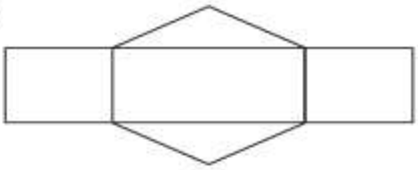
4ª questão:

(M090375A9) A figura abaixo mostra um prisma triangular reto.



A planificação desse prisma é

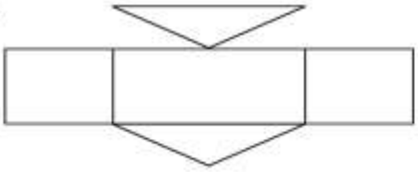
A)



B)

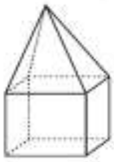
C)

D)



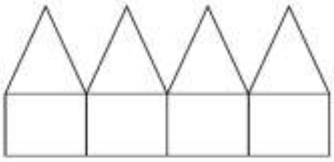
5ª questão:

(M120282A9) O desenho abaixo mostra uma caixa composta por faces quadradas e triangulares.

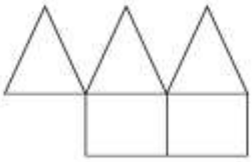


A planificação que representa essa caixa é

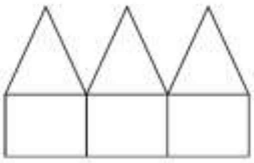
A)



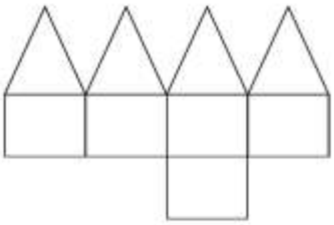
B)



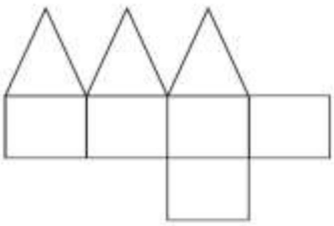
C)



D)

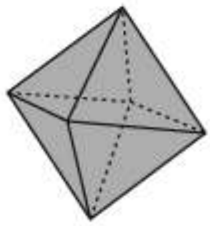


E)



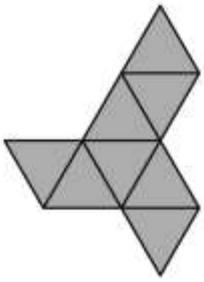
6ª questão:

(M110145A9) Veja o octaedro regular abaixo.

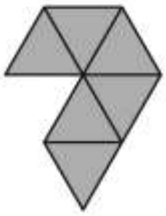


A planificação que melhor representa esse octaedro regular é

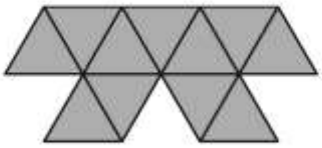
A)



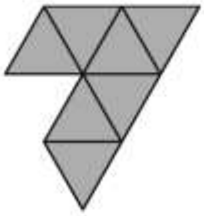
B)



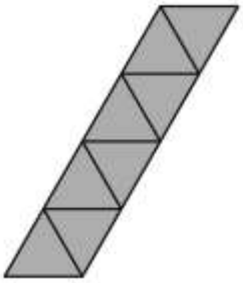
C)



D)

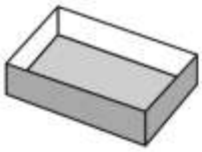


E)

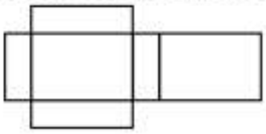


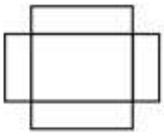
7ª questão:

(M110062CE) A figura representa a parte interna de uma caixa de fósforos.

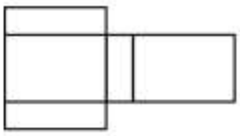


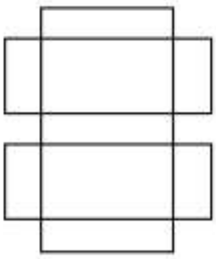
O molde utilizado na confecção dessa caixinha é

A) 

B) 

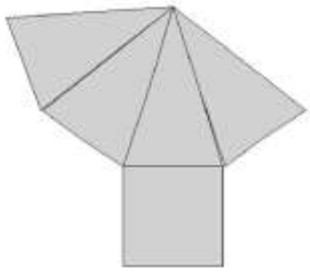
C) 

D) 

E) 

8ª questão:

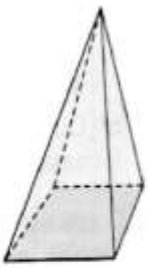
(M100059CE) Magda recebeu um presente dentro de uma caixa que depois de desmontada ficou igual a figura abaixo.

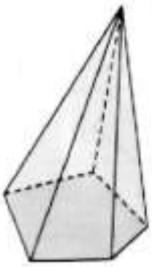


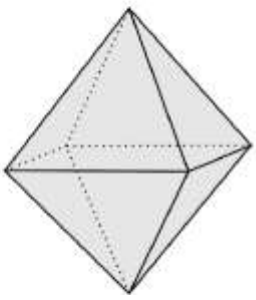
O modelo que representa a caixa que Magda recebeu o presente é

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Atividade 3 : Conhecendo a relação de Euler

- **Habilidade Relacionada**:
  - Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema (Relação de Euler).

- **Pré-requisitos**: Polígonos regulares, nomenclatura e planificação de poliedros

- **Tempo de Duração**: 100 minutos

- **Recursos Educacionais Utilizados**: Folha de exercícios, Canudos e barbante.

- **Organização da turma**: Em dupla

- **Objetivos:** Conhecer a relação entre face, vértice e arestas por meio da relação de Euler

- **Metodologia adotada**: Será mostrada a Relação de Euler, relacionando a dependência entre face, vértice e arestas, com exemplos e exercícios de fixação. Ao final da aula será aplicada uma atividade prática de construção de sólidos e a partir dela extrair o número de faces, arestas e vértices para análise do conhecimento adquirido.

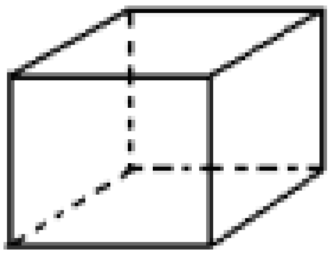
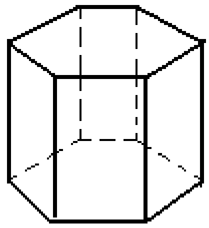
Relação de Euler

Em todo poliedro convexo é válida a relação seguinte:

V - A + F = 2

Em que **V** é o número de vértices, **A** é o número de arestas e **F**, o número de faces.

Observe os exemplos:

 V=8 A=12 F=6 8 - 12 + 6 = 2	 V = 12 A = 18 F = 8 12 - 18 + 8 = 2

Outros exemplos:

Exemplo 1

Determine o número de faces de um sólido que possui 10 arestas e 6 vértices.

Resolução:

V – A + F = 2

6 – 10 + F = 2

–4 + F = 2

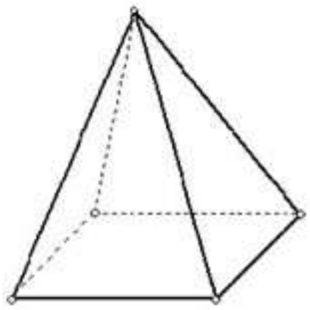
F = 4 + 2

F = 6

Portanto, o sólido possui 6 faces.

Exemplo 2

Determine o número de vértices da pirâmide quadrangular a seguir:



Visivelmente podemos afirmar que a pirâmide possui 5 vértices, 5 faces e 8 arestas. Vamos agora demonstrar que a relação de Euler é válida na determinação dos elementos da pirâmide de base quadrangular.

Resolução:

Vértices

$V – A + F = 2$

$V – 8 + 5 = 2$

$V = 2 + 3$

$V = 5$

Arestas

$V – A + F = 2$

$5 – A + 5 = 2$

$–A = 2 – 10$

$–A = –8 \text{ x}(–1)$

$A = 8$

Faces

$V – A + F = 2$

$5 – 8 + F = 2$

$–3 + F = 2$

$F = 2 + 3$

$F = 5$

Podemos notar que a relação de Euler é realmente válida na determinação dos elementos de um sólido convexo.

Exemplo 3

O número de faces de um poliedro convexo de 22 arestas é igual ao número de vértices. Determine, utilizando a relação de Euler, o número de faces do poliedro.

Resolução:

Considerando que o número de faces é igual ao número de vértices, podemos representar os valores desconhecidos pela incógnita x. Dessa forma, $F = x$ e $V = x$.

Aplicando a relação de Euler:

$V – A + F = 2$

$x – 22 + x = 2$

$2x = 2 + 22$

$2x = 24$

$x = 12$

Portanto, o número de faces do poliedro com 22 arestas é igual a12.

Exercícios:

1 - Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces.

2 - Sabendo que um poliedro possui 20 vértices e que em cada vértice se encontram 5 arestas, determine o número de faces dessa figura.

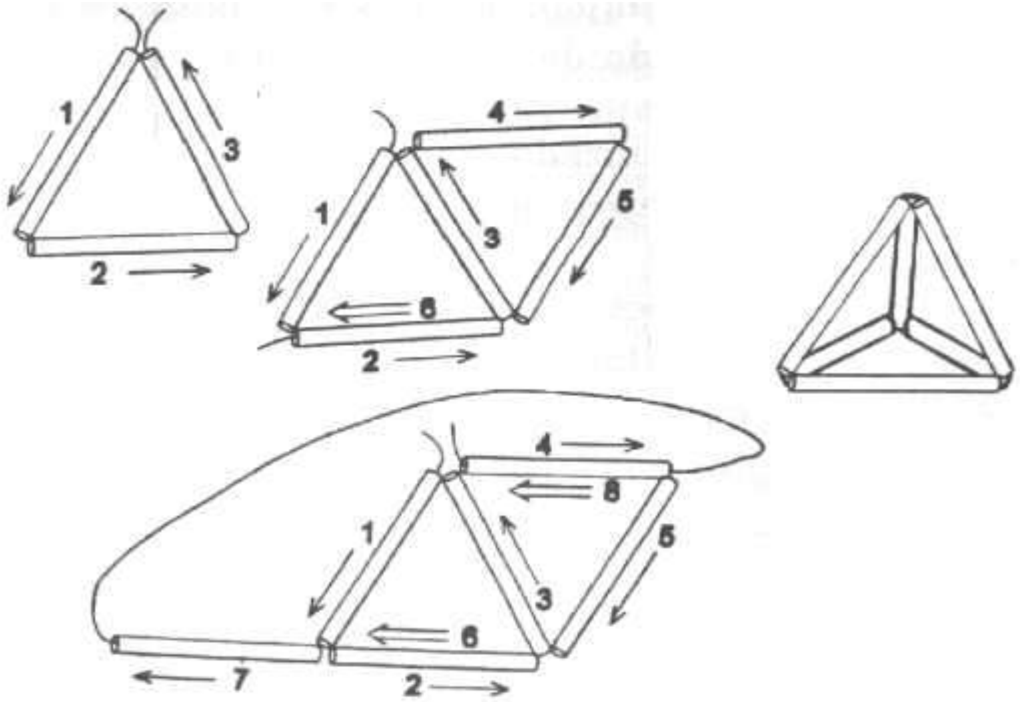
3 - Sabendo que em um poliedro o número de vértices corresponde a 2/3 do número de arestas, e o número de faces é três unidades menos que o de vértices. Calcule o número de faces, de vértices e arestas desse poliedro.

4 - Quantas faces, arestas e vértices possuem o poliedro chamado de Hexaedro?

5 - Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces

AVALIAÇÃO PRÁTICA DE MATEMÁTICA

1- Construção de um tetraedro regular (Pirâmide de base triangular)

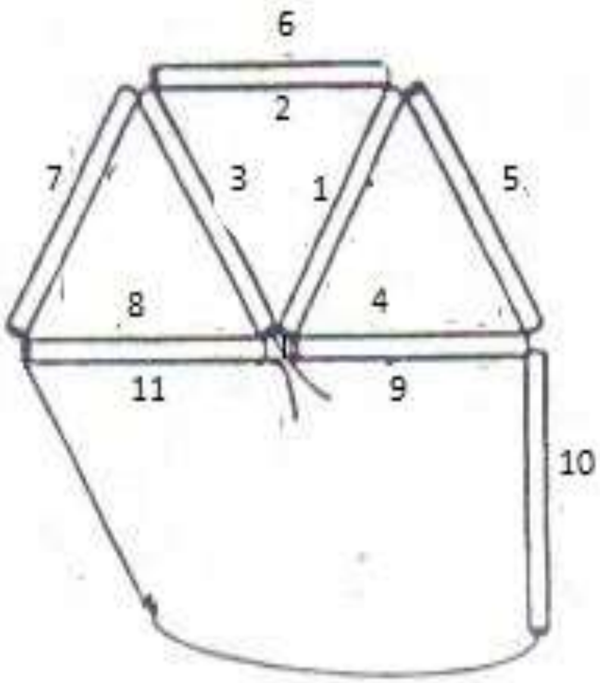


Tome um fio de linha, passe-o através de três pedaços de canudo, construindo um triângulo e o feche por meio de um nó. Agora, passe o restante da linha por mais dois pedaços de canudo, juntando-os e formando mais um triângulo.

Finalmente, passe a linha por um dos lados desse triângulo e pelo pedaço que ainda resta, fechando a estrutura com um só nó. Essa estrutura representa as arestas de um tetraedro regular e as etapas intermediárias da construção estão representadas na figura acima

A) Quantos vértices tem o tetraedro?
B) Quantas faces ?
C) Quantas arestas?

2 - Construção de uma Pirâmide de base Quadrada



A) Quantos vértices tem o tetraedro?

B) Quantas faces ?

C) Quantas arestas?

AVALIAÇÃO

A avaliação envolve aluno e professor e deve ser realizada de maneira que ambospossam avaliar o quanto se desenvolveu cada uma das competências relacionadas aos temas estudados. As tarefas (exercícios de fixação), a ser realizadas em dupla ou individual, sãomeios para pesquisar as competências e habilidades adquiridas pelos alunos. Por isso, deve ser pontuada.

É apropriado verificar os acertos dos alunos nas questões relacionadas com o tema que constarão no SAERJINHO. Este será outro método de avaliação. Porem, nele o professor poderá verificar a aprendizagem não apenas no assunto que norteou este plano de trabalho, mas também em conteúdos estudados no bimestre anterior.

Aplicação de avaliação escrita individual (100 minutos) servirá para a investigação da capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos e raciocínio logico para resolver problemas do cotidiano que envolvamsistemas lineares, seus métodos de soluçãoe os outros tópicos estudados.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES SOBRE ESTE PLANO DE TRABALHO

Ele foi preparado levando em consideração o tempo disponível de aulas para a turma 2001 do CIEP 055 JOÃO Gregório Galindo no ano letivo em curso (2014) e o grau de conhecimento dos alunos. Informo que, infelizmente, não consta de atividades que envolvam programas de geometria ou utilização do computador porque momentaneamente esses recursos estão indisponíveis o que dificulta trabalhos desse tipo.

FONTES DE PESQUISA

ROTEIROS DE AÇÃO e TEXTOS – Sistemas Lineares –Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 1º bimestre – disponível em http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=167

DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010

GIOVANNI, José R.; BONJORNO, José R.; GIOVANNI JR, José R.. Matemática fundamental : uma nova abordagem. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2002.

Endereços eletrônicos acessados de 26/02/2014 a 11/03/2014:

http://cejarj.cecierj.edu.br/pdf_mod3/matematica/Unid2_MAT_Matematica_Modulo_3.pdf

http://www.brasilescola.com/matematica/axiomas.htm

http://www.andremachado.org/artigos/923/introducao-a-geometria-espacial.html

http://www.somatematica.com.br/emedio/espacial/espacial.php

http://www.infoescola.com/matematica/ponto-reta-e-plano/

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/element/element.htm

http://www.conexaoprofessor.rj.gov.br/

https://sites.google.com/site/professoressolidarios/matematica/espaco-e-forma/poliedros-corpos-redondos-e-planificacoes

http://www.brasilescola.com/matematica/relacao-euler.htm