FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ
Colégio: **CIEP 168 IIDA SILVEIRA RODRIGUES**
Professor**: SAMUEL RODRIGUES DE SOUZA**
Matrículas: **09673419/09735432**
Série: **1º ANO – ENSINO MÉDIO**
Tutora: **LEZIETI CUBEIRO DA COSTA**

PLANO DE TRABALHO SOBRE TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem por objetivo permitir que os alunos pudessem compreender que em nosso cotidiano existe uma série de fenômenos que se repetem em um determinado período e que é possível utilizar os conceitos da trigonometria para analisá-los e compreendê-los. Foi elaborado visando a transmissão do conhecimento através da construção feita pelos alunos com resoluções de situações problema e generalizações.

Normalmente os alunos apresentam grandes dificuldades quanto à interpretação de enunciados e conceitos da trigonometria devido à dificuldade de uma compreensão sem uma parte visual e dinâmica para auxiliar nas demonstrações. Por isso, é extremamente importante a utilização de um software, como por exemplo, o Geogebra.

Como o assunto aborda o radiano como unidade de medida de arcos e ângulos, faz-se necessário fazer uma revisão sobre o grau como uma unidade que já foi estudada anteriormente. Para a totalização do plano, serão necessários seis tempos de cinquenta minutos para desenvolvimento dos conteúdos mais quatro tempos para avaliação da aprendizagem.

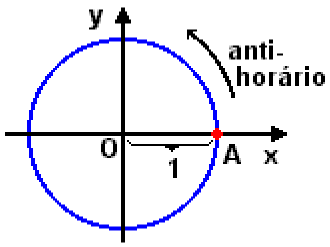
DESENVOLVIMENTO

Atividade 1

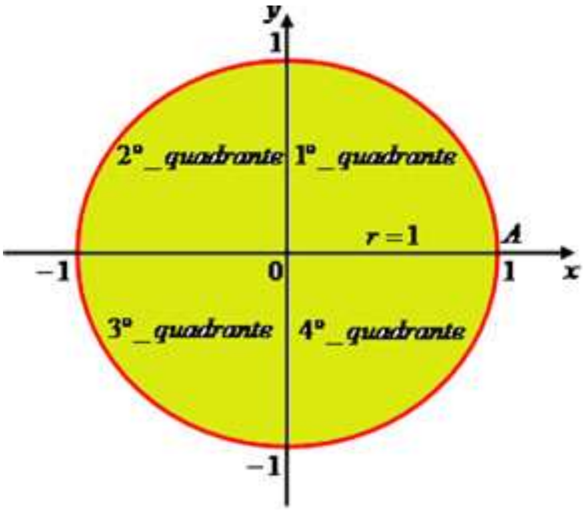
- HABILIDADE RELACIONADA: Reconhecer e identificar os 4 quadrantes no ciclo trigonométrico
- PRÉ-REQUISITOS: Radiano como unidade de medida de arcos e .
- TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos
- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Turma disposta em pequenos grupos (2 ou 3 alunos)
- OBJETIVOS: Apresentar ao aluno o ciclo trigonométrico e as vantagens de usar o radiano como unidade de medida de ângulos.
- METODOLOGIA ADOTADA:

Construção do ciclo trigonométrico com o Geogebra,

Circunferência Trigonométrica
É uma circunferência de raio unitário orientada de tal forma que o sentido positivo é o sentido anti-horário. Associamos a circunferência (ou ciclo) trigonométrico um sistema de coordenadas cartesiana, fixando o ponto A de coordenadas (0,1) como origem dos arcos.

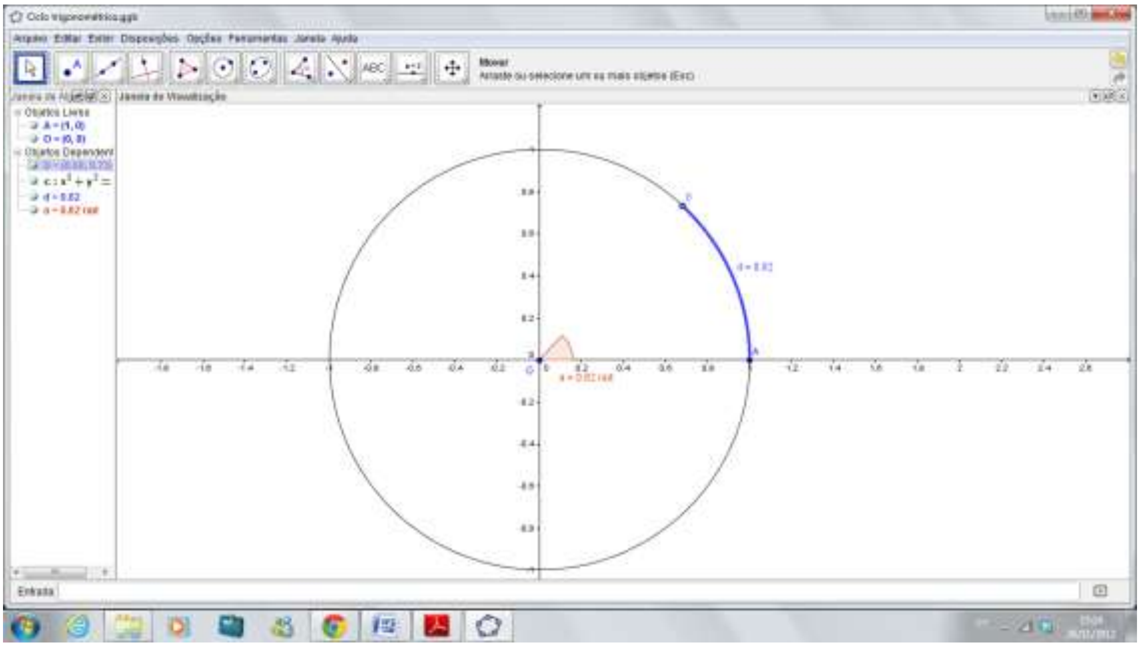


Os eixo x e y dividem a circunferência em quatro partes congruentes chamadas quadrantes, numeradas de 1 a 4 conforme figura abaixo:



Construir no Geogebra o ciclo trigonométrico:

Ponto O(0,0)
Círculo dados centro e raio (Círculo c com centro em O e raio=1)
Ponto A (1,0)
Ponto B(Ponto sobre a circunferência)
Arco d (arco AOB)
Ângulo α(ângulo AOB) Configurar unidade para radiano



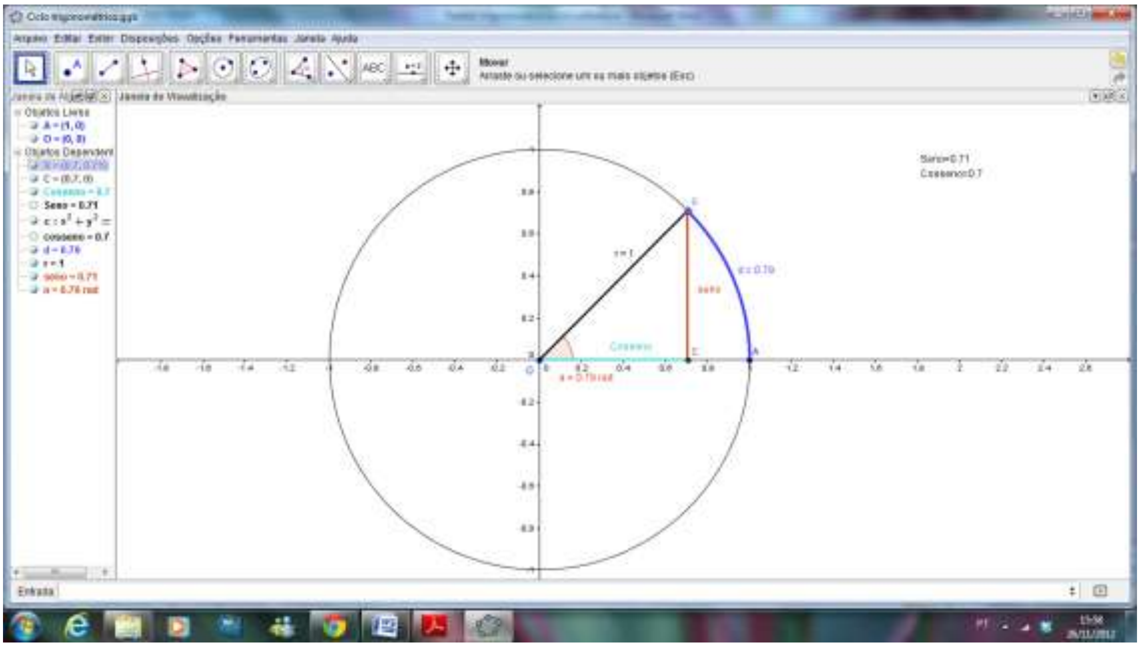
Movimentar o ponto B e observar as variações do comprimento do arco d e as variações do ângulo α.
Perceber as vantagens de usar a unidade de medida de ângulos em radiano .

Atividade 2

- HABILIDADE RELACIONADA: Representar o seno, o co-seno e a de um arco qualquer no ciclo trigonométrico.
- PRÉ-REQUISITOS: Arcos e ângulos na Circunferência
- TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos
- RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Software GeoGebra; Folha de atividades; Laboratório de Informática / Projetor Multimídia e Notebook do Professor .
- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Turma disposta em pequenos grupos (2 ou 3 alunos), propiciando trabalho organizado e colaborativo.
- OBJETIVOS: Representar o seno, o co-seno e a tangente de um arco qualquer no ciclo trigonométrico.
- METODOLOGIA ADOTADA: Construção no Geogebra

Abrir o arquivo construído no Geogebra na aula anterior.
Incluir os seguintes elementos:
Ponto C(cós(d),0)
Segmento BC (renomear como seno)
Segmento OC(renomear como cosseno)
Digitar no campo de entrada seno = $\sin(\alpha)$
Digitar no campo de entrada cosseno = $\cos(\alpha)$
Inserir o texto seno=seno
Inserir o texto cosseno=cosseno

No sistema de coordenadas cuja origem é o centro de (ciclo trigonométrico), e sendo *A* = (1,0), definimos
cos *x* = abscissa de B
sen *x* = ordenada de B



Mover o ponto B e observar as variações do seno e do cosseno.

Há várias coisas interessantes aqui que merecem destaque.

..No 1ª quadrante, o seno varia de forma crescente, assumindo valores entre 0 e 1, sendo portanto positivo. Já o cosseno varia de forma decrescente, com valores que variam também de 0 a 1, sendo também positivo.

..No 2º quadrante, o seno varia de forma decrescente, mantendo a mesma variação do 1º quadrante (sendo portanto ainda positivo). Por sua vez, o cosseno continua decrescendo, variando de -1 a 0, assumindo valores negativos.

..No 3º quadrante, a variação do seno continua decrescente, com valores que variam de -1 a 0 (negativos). Agora o cosseno cresce, tendo seus valores variando no intervalo de -1 a 0, mas ainda negativos.

..No 4º quadrante, seno e cosseno apresentam-se crescentes, sendo o seno com variação de -1 a 0 (negativo) e o cosseno, de 0 a 1 (positivo).

Organizando isto em uma tabela, podemos escrever:

Tabela: variação de sinal, crescimento e valores do seno e do cosseno pelos quadrantes.

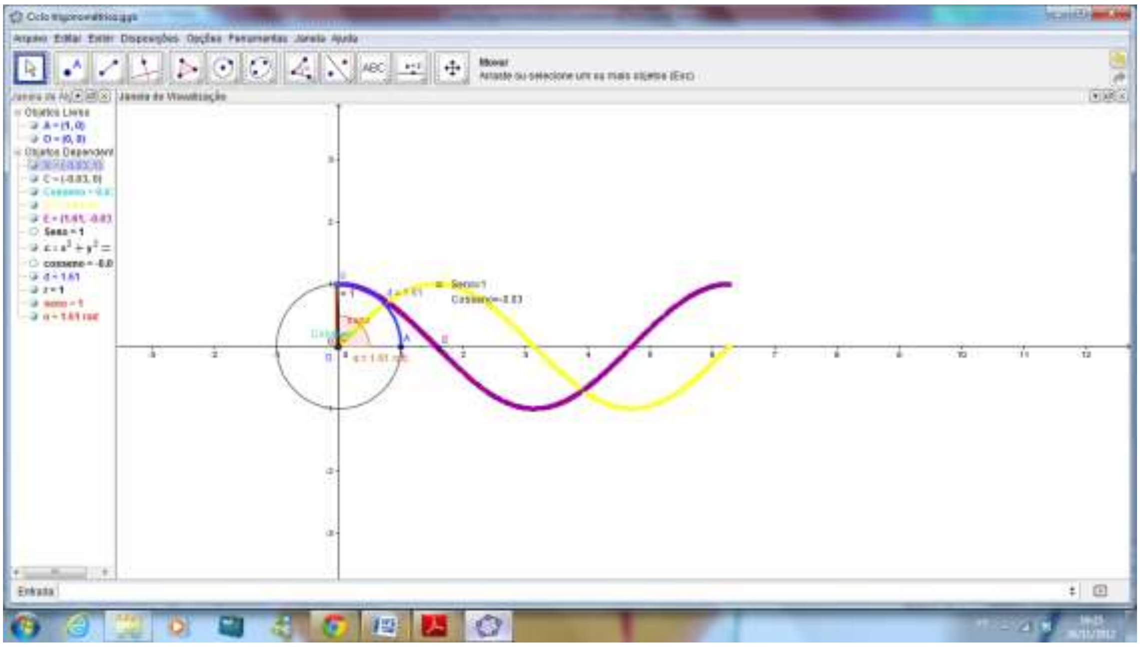
	1º quadrante	2º quadrante	3º quadrante	4º quadrante
seno	positivo crescente]0,1[	positivo decrescente]0,1[	negativo decrescente]-1,0[	negativo crescente]-1,0[
cosseno	positivo decrescente]0,1[	negativo decrescente]-1,0[	negativo crescente]-1,0[	positivo crescente]0,1[

Inclua os seguintes elementos:

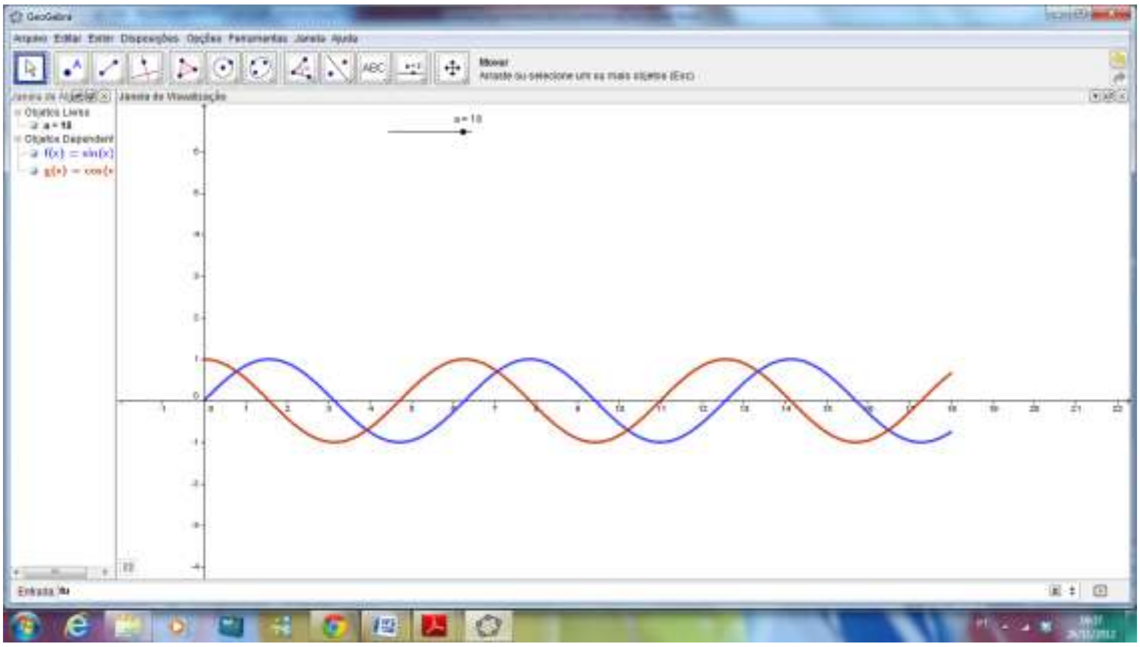
Ponto D(d, cos(d))

Ponto E(d, sin(d))

Habilite o rastro dos pontos D e E
Mova o ponto B e observe os rastros formados das funções seno e cosseno de o a 2π



Salve o arquivo como ciclo trigonométrico e feche-o
Abra um novo arquivo co os seguintes elementos:
Controle deslizante a (de o a 20)
Digite no campo de entrada:
Função [<sin(x)>,<0>,<a>]
Função [<cos(x)>,<0>,<a>]



Atividade 3

- HABILIDADE RELACIONADA: Representar a tangente de um arco qualquer no ciclo trigonométrico.
-
- PRÉ-REQUISITOS: Arcos e ângulos na Circunferência; unidades de medida de arcos e ângulos (graus e radianos) função seno e função cosseno.

- TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

- RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Software GeoGebra; Folha de atividades; Laboratório de Informática / Projetor Multimídia e Notebook do Professor.

- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Grupos de 2 alunos.

- OBJETIVOS: : Representar a tangente de um arco qualquer no ciclo trigonométrico.

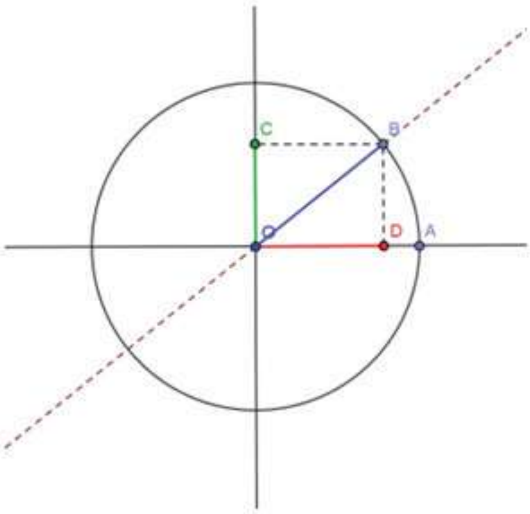
- METODOLOGIA ADOTADA: Construção no Geogebra.

A tangente e a secante

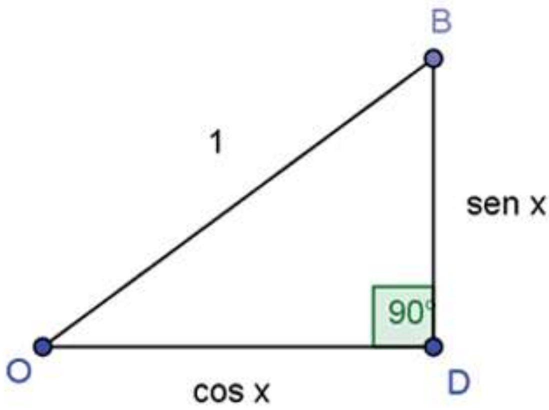
A tangente ser definida como a razão $\frac{seno(x)}{cosseno(x)}$, desde que se tenha cosseno $x \neq 0$ (pois caso contrário, a tangente não existiria!). Podemos analisar algumas coisas a partir desta definição. Primeiro, para que valores de x a tangente não existe? Responder a esta pergunta equivale a pensar em para que valores de x o cosseno vale 0. Quando nos lembramos que o cosseno de x é o valor da abscissa do ponto B, torna-se mais simples responder a esta questão. Basta pensarmos para que valores de x temos abscissa 0 para B. Isso acontece nos pontos (0,1) e (0,-1), que indicam os arcos de 90° ou $\mathbf{2\pi rad}$ e 270° ou $\frac{3\pi}{2}\mathbf{rad}$, respectivamente, quando consideramos apenas a menor determinação positiva. Para estes arcos (e para todos os arcos côngruos a eles) a tangente não está definida. Para os demais, ela será o resultado do quociente entre o seno e o cosseno do arco considerado. Por exemplo, a tangente de 1 será $\frac{seno(1)}{cosseno(1)} = \frac{0{,}84}{0{,}54} \cong 1{,}55$ 1.

Representação geométrica da razão $\frac{seno(x)}{cosseno(x)}$.

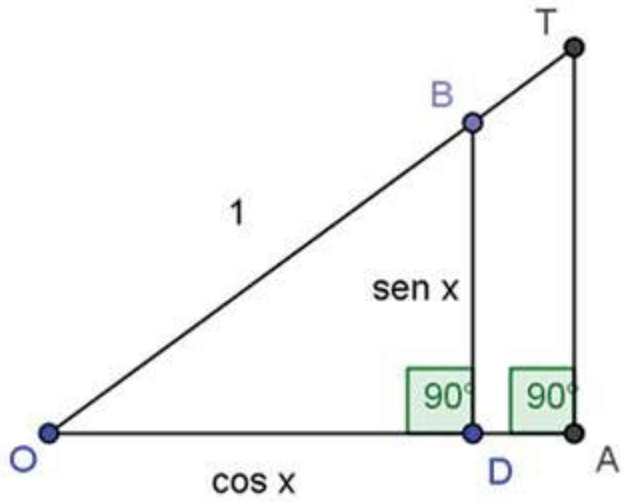
Retornar ao ciclo trigonométrico:



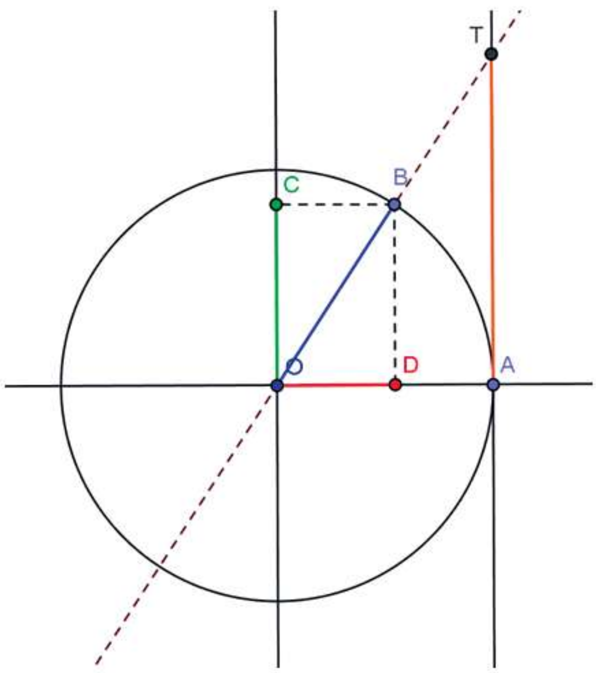
Destacando do ciclo o triângulo OBD abaixo, retângulo em D, temos:



Vamos agora tentar construir a relação $\frac{seno(x)}{cosseno(x)}$ a partir deste triângulo. Uma boa estratégia é usar triângulos semelhantes, que nos permitirão obter esta razão. Os triângulos abaixo mostram uma boa possibilidade.



Na figura, construímos o triângulo OTA, retângulo em A, de maneira que *OA* = *OB* = *1*. Esses triângulos são semelhantes pois compartilham ângulos (caso AA). Isso nos permite escrever que $\frac{OD}{OA} = \frac{BD}{TA}$, ou seja, usando *TA* = *t*, temos $\frac{\cos x}{1} = \frac{sen\ x}{t}$, ou seja, $t = \frac{sen\, x}{\cos x}$. Isso significa que tomando, no ciclo trigonométrico, por *A* uma reta perpendicular *p* a *OA* e considerando *T* como o ponto de intersecção entre a reta suporte *s* de *OB* e *p*, obteremos no ciclo trigonométrico estrutura semelhante a esta, onde poderemos identificar a tangente do arco x. A figura abaixo mostra isso.



A tangente no ciclo trigonométrico.

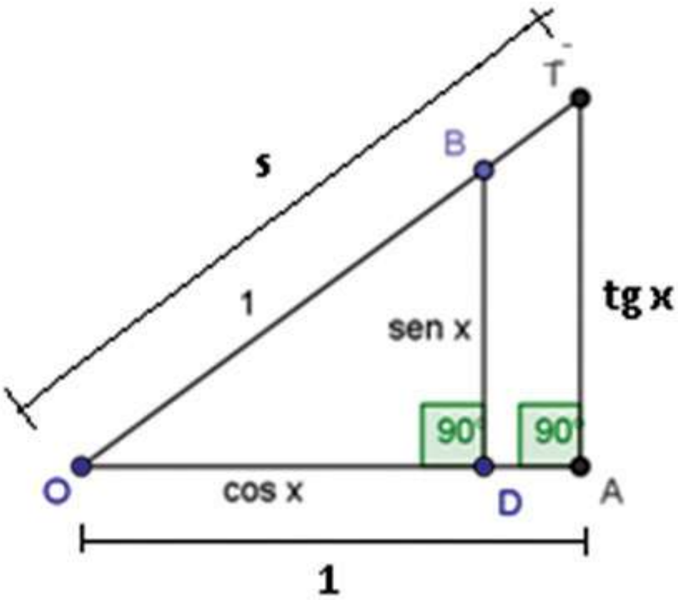
Função tangente com auxílio do GeoGebra.

1. Abra uma tela nova no GeoGebra e marque os pontos O=(0,0), A=(1,0), B=(-1,0), C=(0,1) e D=(0,-1). Trace também uma circunferência de centro O e raio. Este é o ciclo trigonométrico.
2. Tome um ponto E qualquer no ciclo trigonométrico e marque o arco AOE. Você verá na janela da álgebra surgir a indicação "*d=...*", que representa o comprimento do arco AOE. Digite ainda, no campo Entrada, as equações x=0 e y=0, para marcar os eixos coordenados.
3. Trace por A uma reta perpendicular ao eixo x (esta é a reta e, também conhecida como *eixo das tangentes*). Agora, faça uma reta passando pelos pontos O e E (esta é a reta *f*). Marque o ponto de intersecção entre as retas *e* e *f*, que o GeoGebra chamará de F. O comprimento do segmento AF é a tangente do arco AOE.

Movimente E no ciclo e veja como varia F! Note que, quanto mais próximo de C o ponto E está, maior é o comprimento do segmento AF e que quando E e C coincidem, o ponto F desaparece! Por que isso acontece?

Retomando a definição de tangente como a razão $\frac{sen\,x}{\cos x}$, sabemos que essa razão só existe quando cos $x \neq 0$. Mas o cosseno vale 0 justamente nos pontos C(0,1) e D(0,-1), por essa razão, quando E e C ou E e D coincidem, o ponto F deixa de existir, pois a razão que o define fica indefinida dentro dos reais. Uma outra ideia que converge com essa é a de que quando E e C coincidem (ou E e D), a reta f e o eixo y ficam paralelos. Como o ponto F é a intersecção entre essas duas retas, ele deixa de existir... Interessante, não?

Agora observe na sua construção o triângulo OAF, retângulo em A, que destacamos abaixo. Nele, temos que *AF = tg(x)*, onde x é a medida do arco AOE, e que *OA* = 1(raio do ciclo trigonométrico). Da semelhança que vimos acima, podemos escrever:



$$\frac{OD}{OA} = \frac{OB}{OT} \Longrightarrow \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{s} \Longrightarrow s = \frac{1}{\cos x}$$

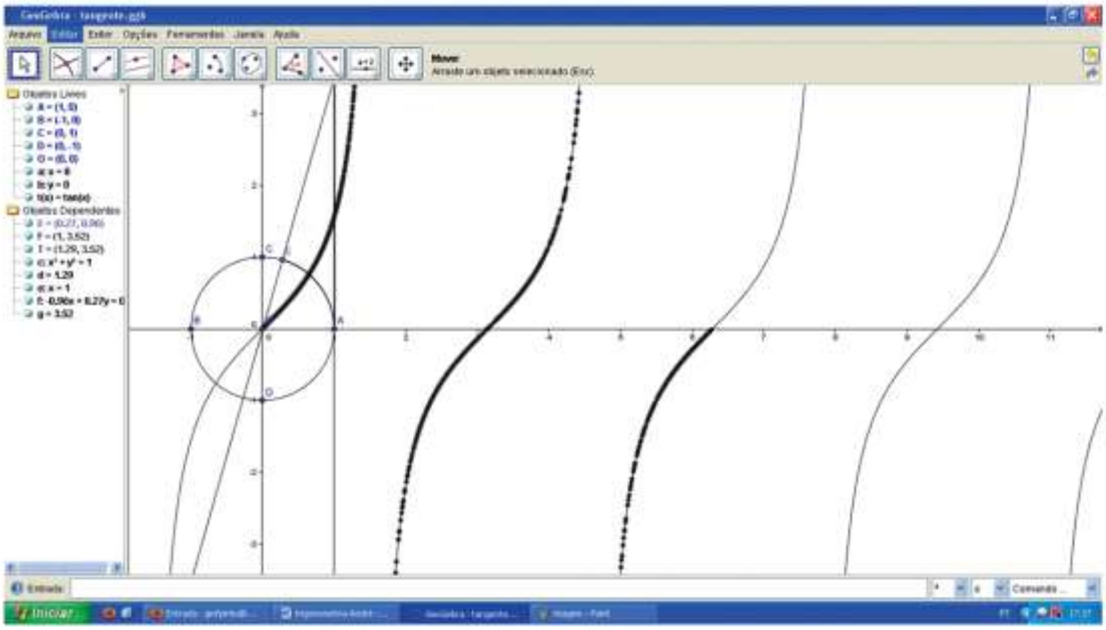
À razão $s = \frac{1}{\cos x}$ damos o nome de *secante*. A secante se relaciona com a tangente segundo uma relação de Pitágoras, conforme podemos observar pelo triângulo OAT da figura acima, retângulo em A:

$$Tg^2(x) + 1^2 = \sec^2(x) \Longrightarrow Tg^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$

Vamos construir os gráficos dessas duas funções? A primeira observação que temos a fazer sobre elas é sobre os seus domínios. Essas funções são definidas de $\mathbb{R} - \left\{(2K+1).\frac{\pi}{2}, K \in \mathbb{Z}\right\} em\ \mathbb{R}$ porque precisamos excluir de seus domínios os casos em que o cosseno se anula (o que acontece em todos os arcos cuja extremidade coincida com $\frac{\pi}{2}\ ou\ \frac{3\pi}{2}$. Quando construímos esse gráfico com auxílio do GeoGebra, isso aparece claramente. Vamos ver? Retome a última tela de trabalho do GeoGebra que usamos para ver a tangente e prossiga com a construção conforme indicamos a seguir.

4. Digite no campo Entrada T=(d,tan(d)), habilite o rastro de T e mova E no ciclo trigonométrico, observando o caminho descrito por T.
5. Digite no campo Entrada a função t(x)=tan(x), movimente E no ciclo trigonométrico e observe o seu gráfico.

   Seu gráfico deve ficar assim:



Cada um dos pontos desse gráfico tem como abscissa o comprimento do arco AOE e como ordenada o comprimento do segmentoAF. Note que conforme E, no 1º quadrante, se aproxima de C, a função tende a +∞, porque o comprimento do segmento AF vai ficando cada vez maior (o ponto de intersecção F tende a subir cada vez mais – comportamento crescente). Por outro lado, quando E chega ao 2º quadrante, ultrapassando C mas ainda muito próximo dele, o ponto de intersecção aparece muito negativo, e vem “subindo” conforme E se afasta de C em direção a B (comportamento crescente). Quando E e B coincidem, o ponto F coincide com o ponto A, situação em que o segmento AF tem seu comprimento zerado.

Movimentando o ponto E no 3º quadrante, no sentido de B para D, obtemos segmentos AF partindo de valores muito próximos de zero, mas positivos, e tornando-se cada vez maiores, quanto mais próximo de D o ponto E está (comportamento ainda crescente). E, finalmente, quando E passa ao 4º quadrante, temos a mesma situação que observamos no 2º quadrante, ainda com comportamento crescente.

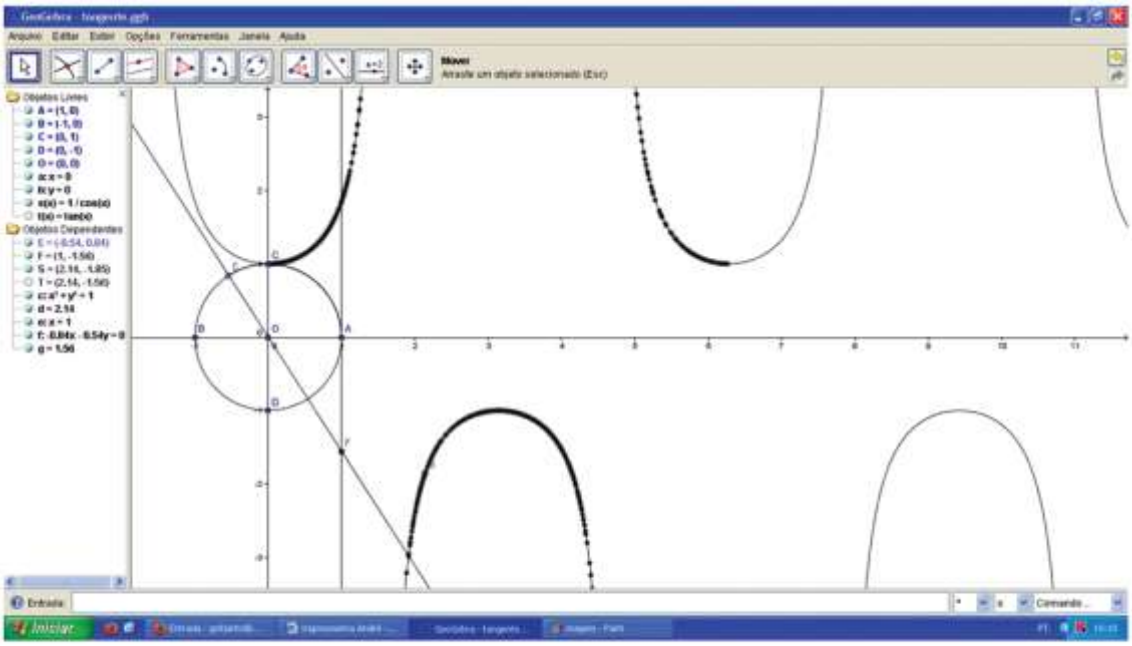
Em síntese: a função tangente é crescente em todos os valores de seu domínio e apresenta raízes sempre que seu domínio é um arco com extremidade 0 ou π (e seus côngruos). Essa função é positiva quando o arco tem extremidade no 1º ou no 3º quadrantes, pois o ponto F encontra-se acima do eixo x; por outro lado, no 2º e 4º quadrantes, a tangente é negativa pois F localiza-se abaixo do eixo x. A tabela abaixo resume isso (e novamente, não deve ser dada mas sim construída junto com os alunos).

	1º quadrante	**2º quadrante**	**3º quadrante**	**4º quadrante**
tangente	positiva crescente]0,+∞[	negativa crescente]-∞,0[	positiva crescente]0,+∞[	negativa crescente]-∞,0[

Gráfico da função secante

Prossiga na construção que acabamos de fazer, usando a seguinte sequência:

6. Esconda os objetos função t e ponto T.
7. Digite no campo entrada S=(d,(1/cos(d))), habilite o rastro e movimente E no ciclo trigonométrico, observando o caminho descrito por S.
8. Digite no campo entrada a função s(x)=1/(cos(x)), movimente E e observe.



Há alguns fatos interessantes no gráfico da função secante que merecem destaque. Primeiro, vamos analisar o crescimento dessa função. Note que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, logo, como cos *x* varia entre -1 e 1, a secante será um número que resultará da divisão de 1 por 1, de 1 por -1 ou de 1 por um número entre -1 e 1, ou seja, números cujo valor absoluto está entre 0 e 1. Quando dividimos 1 por um número positivo menor do que 1, obtemos um resultado positivo maior do que 1 e quanto mais próximo de zero for o divisor, maior será o quociente. Por outro lado, quando dividimos 1 por um número entre -1 e 0, o resultado será negativo e menor que -1 (em módulo, maior que 1). Jamais conseguiremos resultados para este quociente que estejam entre -1 e 1. Por essa razão, a região do plano xy compreendida estritamente entre as retas y=-1 e y=1 é vazia e o gráfico tende a mais infinito ou a menos infinito conforme x aproxima-se de $\frac{\pi}{2} ou \frac{3\pi}{2}$ ou de seus côngruos. Daí também podemos perceber que a função secante tem o mesmo domínio da função tangente.

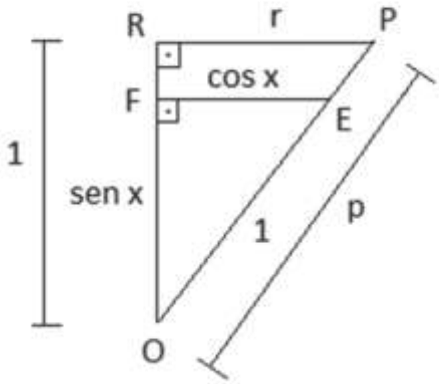
Assim, o quadro que resume o comportamento da função secante encontra-se abaixo.

	1º quadrante	**2º quadrante**	**3º quadrante**	**4º quadrante**
Secante	positiva crescente]1,+∞[	negativa crescente]-∞,-1[	negativa decrescente]-∞,-1[	positiva decrescente]1,+∞[

A cotangente e a cossecante

Da mesma maneira que vimos para a tangente e a secante, a cotangente e a cossecante também estão intimamente relacionadas. Vamos, nesta seção, estudar melhor essas duas funções, começando pela função cotangente.

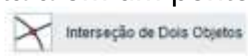
A cotangente é a recíproca da tangente, ou seja, $\cot x = \frac{1}{tg\ x}$. Como $Tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x}$, podemos definir a cotangente como $Cot\ x = \frac{\cos x}{sen\ x}$. A visualização da cotangente no ciclo trigonométrico é feita de maneira similar à das tangentes. Vamos buscar, em triângulos semelhantes ao triângulo fundamental de catetos seno e cosseno e hipotenusa 1, um segmento que expresse a relação que define a cotangente.



A figura acima mostra uma construção possível. O triângulo FOE, retângulo em F, é o triângulo típico do ciclo trigonométrico, onde O é a origem do sistema de eixos cartesianos, E é extremidade do arco e F é o ponto que delimita o seno. O segmento FE é congruente ao cosseno do arco de comprimento x. Os dois triângulos são semelhantes (caso AA). Isso leva a $\frac{OF}{OR} = \frac{EF}{PR} \Longrightarrow \frac{sen\ x}{1} = \frac{\cos x}{r}$. Manipulando, obtemos $r = \frac{\cos x}{sen\ x}$. Como $tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x}$, podemos perceber que $cotg\ x = \frac{1}{tg\ x}$. Assim sendo, o segmento PR indica a cotangente do arco de medida x com origem no 0 do ciclo trigonométrico e extremidade E. Vamos fazer essa construção com o GeoGebra para que possamos visualizar esta relação? Os passos a serem seguidos estão a seguir!

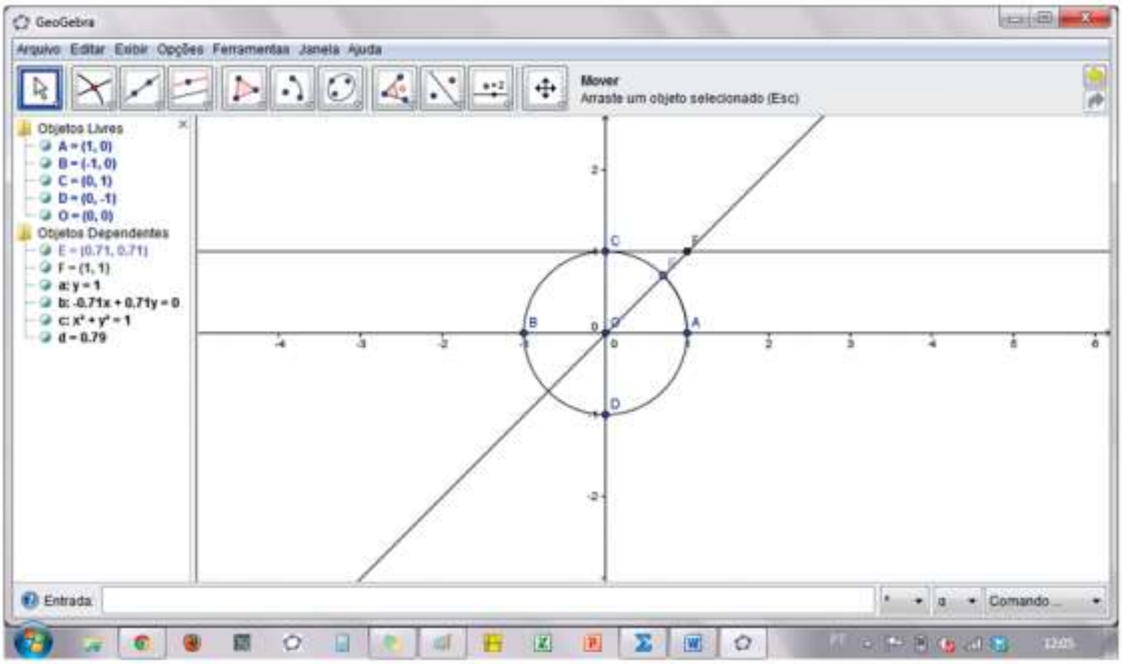
1. Abra uma tela nova no GeoGebra e marque os pontos O=(0,0), A=(1,0), B=(-1,0), C=(0,1) e D=(0,-1). Trace também uma circunferência de centro O e raio 1 (conforme fizemos nas páginas anteriores). Este é o ciclo trigonométrico.
2. Tome um ponto E qualquer no ciclo trigonométrico e marque o arco AOE. Você verá na janela da álgebra surgir a indicação "*d*=...", que representa o comprimento do arco AOE. Digite ainda, no campo Entrada, as equações x=0 e y=0, para marcar os eixos coordenados.

3. Digite, no campo Entrada, x=0 e y=0. Desta maneira, marcaremos as retas que representam os eixos x e y. Trace por C uma reta paralela ao eixo x. Para isso, clique no botão , disponível no 4º menu de botões, e sequencialmente no ponto C e no eixo x. O GeoGebra nomeará esta reta como a. Trace agora a reta *b*, clicando no botão 

e nos pontos O e E. Esta reta encontra a reta a em um ponto. Marque este ponto de intersecção, clicando no botão 

e no local da intersecção (ou nas retas *a* e *b*). O GeoGebra nomeará este ponto como F. O segmento CF representa o valor da cotangente do arco AOE.

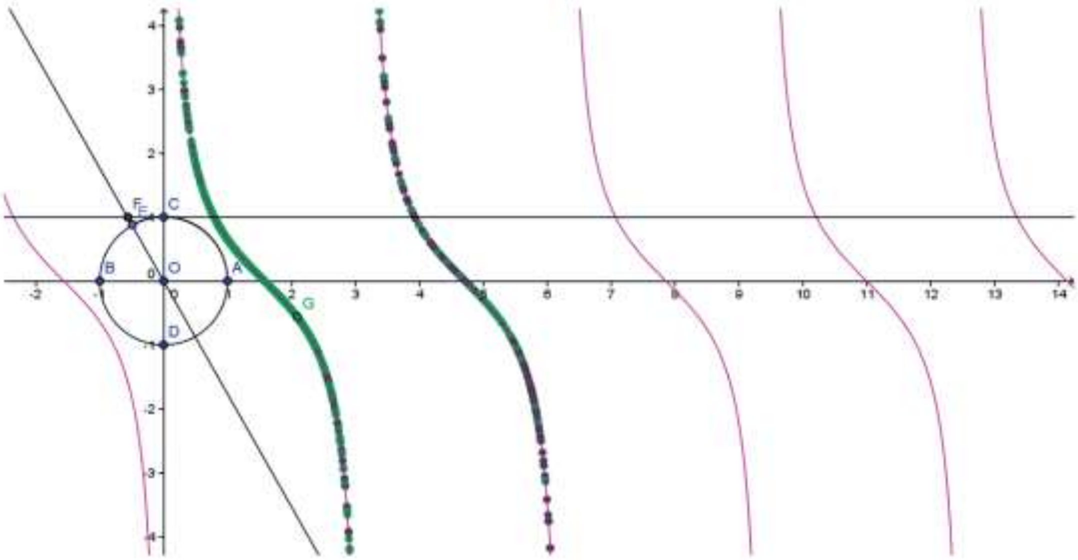
A essa altura, a sua tela do GeoGebra deve apresentar-se assim:



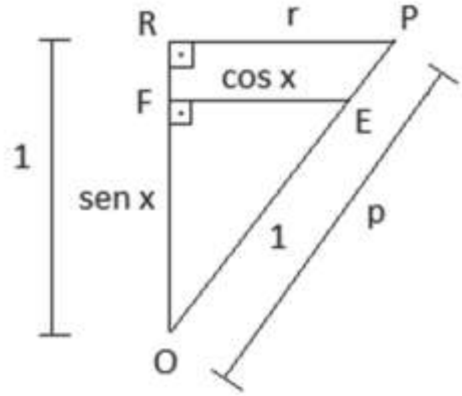
Observe que, da mesma forma que o eixo das tangentes apresenta tangentes positivas quando localizado acima do eixo x e negativas, quando localizado abaixo dele, o eixo das cotangentes (a reta *a*) apresenta cotangentes positivas a direita do eixo y e negativas à esquerda. Movimente o ponto E pelo ciclo e observe as posições do ponto F.

Gráfico da função cotangente.

Digite no campo Entrada G=(d,(cos(d)/sin(d))).Você verá na tela o ponto G. Movimente o ponto E sobre o ciclo, organizadamente, passando por todos os quadrantes no sentido crescente dos arcos a partir da origem. Agora, habilite o rastro do ponto G e volte a executar o mesmo movimento com o ponto E no ciclo. Para visualizar o gráfico da função cotangente por completo, digite no campo Entrada a função f(x)=(cos(x)/sin(x)).



Cossecante.

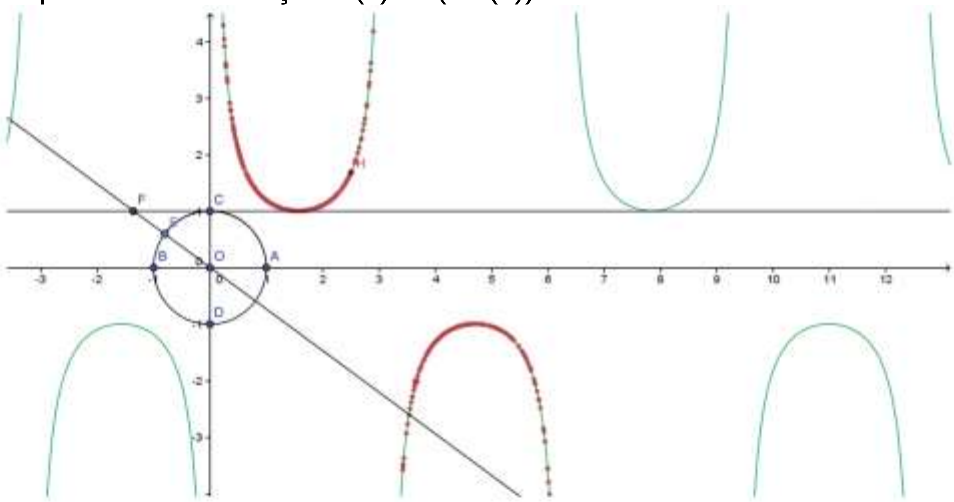


Nestes triângulos, podemos escrever, pela semelhança, que as razões OF para OR e OE para OP são equivalentes. Isso acarreta em $\frac{sen\ x}{1} = \frac{1}{p} \Longrightarrow p = \frac{1}{sen\ x}$, que define a cossecante do arco AOE de medida *x*. O valor da cossecante terá o valor absoluto do comprimento do segmento OP e o mesmo sinal do seno no quadrante em que se encontra a extremidade do arco considerado. Sim, isso mesmo, o mesmo sinal do seno, porque a cossecante é o inverso do seno e inversões não alteram sinais.

Retome a sua última tela do GeoGebra, esconda os objetos função *f* e ponto *G*. Movimente o ponto E em torno do ciclo trigonométrico, percorrendo sistematicamente cada um dos quadrantes no sentido crescente do ciclo, e observando o que acontece com o comprimento do segmento OF associado à informação de em que quadrante encontra-se o ponto E (lembre-se, a cossecante tem a mesma variação de sinal do seno).

Gráfico da função cossecante.

Digite na caixa Entrada o ponto H=(d,(1/(sin(d))); movimente o ponto E sistematicamente no ciclo trigonométrico e verifique o posicionamento de H conforme E roda no sentido crescente do ciclo. Habilite o rastro de H, mova novamente o ponto E no ciclo e observe o caminho descrito por ele. Digite no campo Entrada a função h(x)=1/(sin(x))



Atividades

1) Qual o domínio da função cotangente? Por quê?
2) Por que a cotangente tende a $+\infty$ quando o arco tem comprimento próximo de $k\pi$ pela direita, com $k \in$ □?
3) Em que vizinhança ela tende a $-\infty$? Por quê?
4) De que maneira podemos relacionar a variação do sinal da função cotangente com a variação do sinal das funções seno e cosseno?
5) De que maneira podemos relacionar a variação do sinal da função cotangente com a da função tangente?

AVALIAÇÃO

A avaliação deve ser realizada de maneira que se possa avaliar o quanto se desenvolveu cada uma das competências relacionadas aos temas estudados.

Aplicar teste individual evolvendo construção e análise de ciclo trigonométrico (com consulta – 50 minutos).

Avaliar a reflexão e o argumento crítico usado pelos alunos, em momento oportuno (50 minutos).

Verificar os acertos dos alunos nas questões relacionadas com o tema que constarão no SAERJINHO. Este será outro método de avaliação. Porem, nele o professor poderá verificar a aprendizagem não apenas no assunto que norteou este plano de trabalho, mas também em conteúdos estudados no bimestre anterior.

Aplicação de avaliação escrita individual (100 minutos) para investigação da capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos sobre trigonometria na circunferência.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ROTEIROS DE ACAO – Trigonometria na Circunferência – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio – 3º bimestre/2012
http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 26/11/2012.

MATEMATICA Aula por Aula, 1º Ano/Claudio Xavier e Benigno Barreto São Paulo: FTD, 2003.

Endereço eletrônicos acessado de 14/09/2012 a 14/09/2012

http://www.brasilescola.com/matematica/circunferencia-trigonometrica.htm