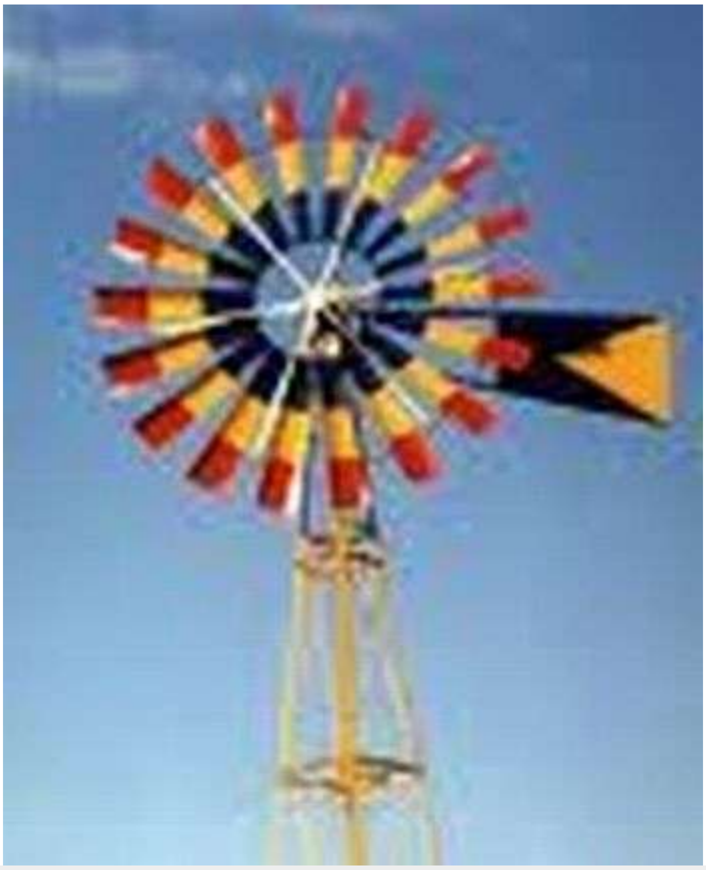
Formação Continuada em MATEMÁTICA
Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 3º Ano – 4º Bimestre/2014
Plano de Trabalho 2

Geometria Analítica



http://exilioandarilho.blogspot.com/2009_03_01_archive.html

Cursista: Marta Vieira de Andrade.
Série: 3ª.

Grupo: 1
Tutor: Danubia de Araujo Machado.

S u m á r i o

INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem por objetivo dar continuidade ao estudo Geometria Analítica itens posições relativas de duas retas no plano e circunferência permitindo que os alunos percebam a aplicabilidade deste conteúdo para resolução de problemas. Foi elaborado visando à transmissão do conhecimento através da construção feita, pelos alunos, da resolução de situações problema e generalizações.

Geralmente os alunos apresentam dificuldades concernentes à interpretação de enunciados e utilização de raciocínio lógico, além da falta de interesse. Por isso, é extremamente importante utilizar assuntos atraentes que fixem sua atenção a apresente uma forma simples de resolução, prestigiando o trabalho organizado e cooperativo.

Como o assunto exige que os alunos reconheçam que o trabalho com Geometria Analítica associa elementos geométricos e expressões algébricas, imprimindo uma exatidão nas medidas geralmente não alcançadas em resoluções geométricas. Toda vez que se fizer necessário, é oportuno lembrar para o aluno as definições e propriedades dos elementos da Geometria Plana, agora estudado analiticamente.

Para a totalização do plano, serão necessárias **duas semanas** para o desenvolvimento dos conteúdos mais **dois tempos** para avaliação da aprendizagem.

DESENVOLVIMENTO

Geometria Analítica: Posições relativas entre retas.

Coeficiente angular

Chamamos de *coeficiente angular* da reta **r** o número real **m** tal que:

$m = tg\,\theta$ $(\theta \neq 90°)$

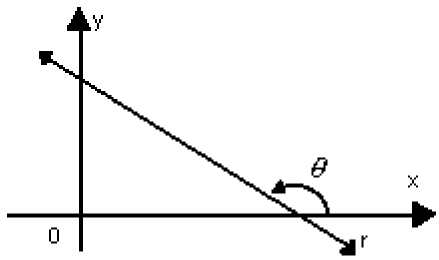
O ângulo θ é orientado no sentido anti-horário e obtido a partir do semi-eixo positivo **Ox** até a reta **r**. Desse modo, temos sempre $0 \leq \theta < \pi$.

Assim:

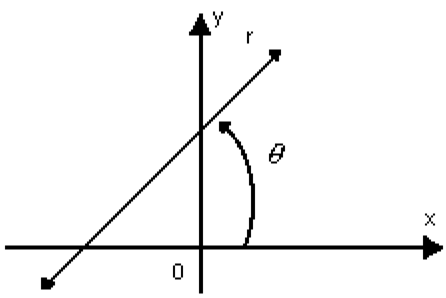
- para $0° \leq \theta < 90°, m > 0$ (a tangente é positiva no 1º quadrante)
- para $90° < \theta < 180°, m < 0$ (a tangente é negativa no 2º quadrante)

Exemplos:

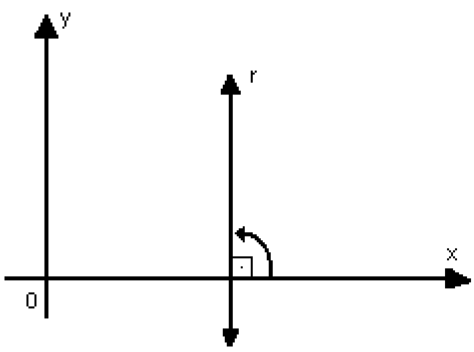
a) $90° < \theta < 180°$, θ é obtuso



b) $0° < \theta < 90°$, θ é agudo

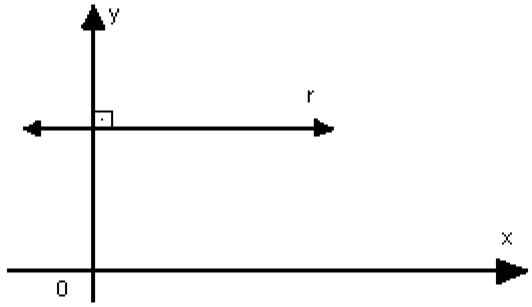


c) $\theta = 90°$



$(\nexists m)$

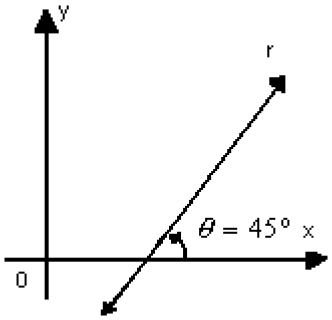
d) $\theta = 0°$



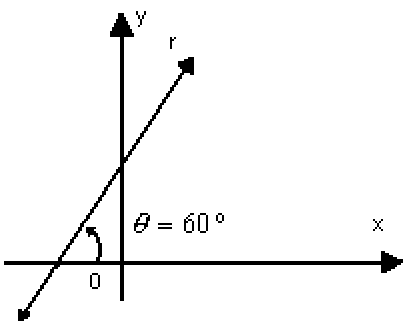
Determinação do coeficiente angular

Vamos considerar três casos:

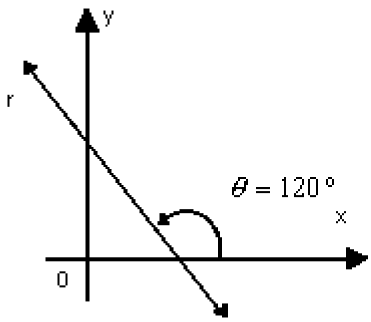
a) o ângulo θ é conhecido



$\theta = 45° \Rightarrow m = tg45° = 1$

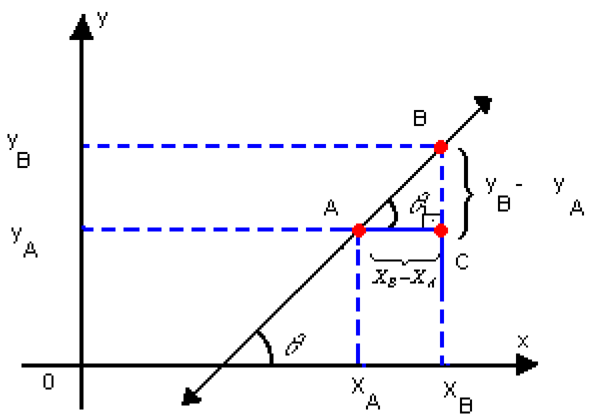


$\theta = 60° \Rightarrow m = tg60° = \sqrt{3}$



$\theta = 120° \Rightarrow m = tg120° = -\sqrt{3}$

b) as coordenadas de dois pontos distintos da reta são conhecidas: **A** (x_A, y_A) e **B** (x_B, y_B).



$$tg\,\theta_1 = \frac{CB}{AC} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$$

Como $\alpha_1 = \alpha$ (ângulos correspondentes) temos que $tg\,\alpha_1 = \dfrac{y_B - y_A}{X_B - X_A}$.

Mas, m = tg α Então:

$$m = \frac{y_B - y_A}{X_B - X_A}$$

Assim, o coeficiente angular da reta que passa, por exemplo, por **A**(2, -3) e **B**(-2, 5) é:

$$m = \frac{y_B - y_A}{X_B - X_A} = \frac{5-(-3)}{-2-2} = \frac{8}{-4} = -2$$

c) a equação geral da reta é conhecida

Se uma reta passa por dois pontos distintos **A**(X_A, Y_A) e **B**(X_B, Y_B), temos:

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Aplicando o Teorema de Laplace na 1ª linha, vem:

$(Y_A - Y_B)x + (X_B - X_A)y + X_AY_A - X_BY_B = 0$

Da equação geral da reta, temos:

$$\begin{cases} Y_A - Y_B = a \Rightarrow Y_B - Y_A = -a \\ X_B - X_A = b \end{cases}$$

esses valores em $m = \dfrac{\overbrace{Y_B - Y_A}^{-a}}{\underbrace{X_B - X_A}_{b}}$, temos:

$$m = -\frac{a}{b}$$

Equação de uma reta r, conhecidos o coeficiente angular e um ponto de r

Seja **r** uma reta de coeficiente angular **m**. Sendo **P**(x_0, y_0), P $\in$ r, e **Q**(x, y) um ponto qualquer de r(Q $\neq$ P), podemos escrever:

$$m = \frac{y - y_0}{X - X_0} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

Como exemplo, vamos determinar a equação geral da reta **r** que passa por **P**(1, 2), sendo m=3. Assim, temos X_0=1 e Y_0=2. Logo:

y - y_0=m(x-x_0)=y-2 = 3(x - 1) = y-2 = 3x - 3 = 3x - y - 1 = 0

que é a equação geral de **r**.

Representação gráfica de retas

Para representar graficamente as retas de equação ax + by + c = 0 ($b \neq 0$), isolamos a variável **y** e atribuímos valores a **x**, obtendo pares ordenados que são pontos da reta.

Assim, é mais conveniente usar a equação na forma reduzida, já que ela apresenta o y isolado.

Coordenadas do ponto de intersecção de retas

A intersecção das retas **r** e **s**, quando existir, é o ponto **P**(x, y), comum a elas, que é a solução do sistema formado pelas equações das duas retas.

Vamos determinar o ponto de intersecção, por exemplo, das retas

r: 2x +y - 4 =0 e **s**: x -y +1=0. Montando o sistema e resolvendo-o, temos:

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

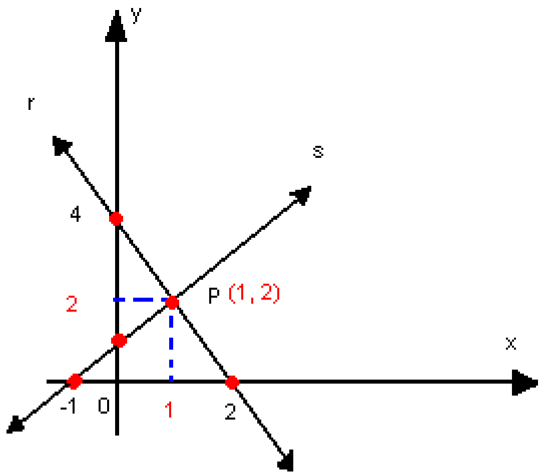
Substituindo esse valor em x - y = -1, temos:

1 - y = -1

y = 2

Logo, **P**(1, 2) é o ponto de intersecção das retas **r** e **s**.

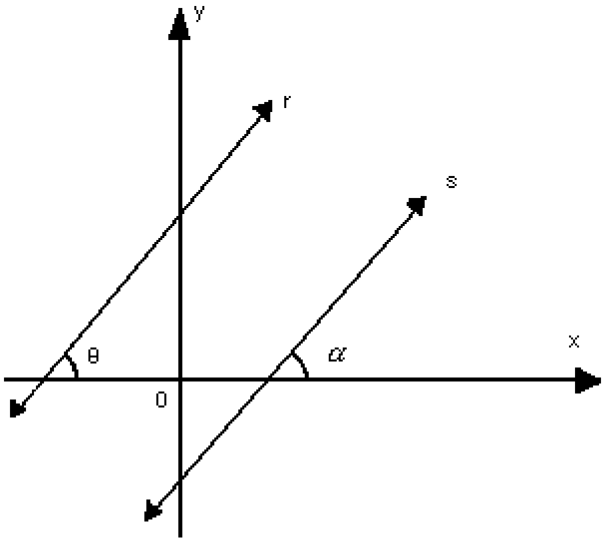
Graficamente, temos:



Posições relativas entre retas

Paralelismo

Duas retas, **r** e **s**, distintas e não verticais, são paralelas se, e somente se, tiverem coeficientes angulares iguais.



Concorrência

Dadas às retas **r**: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e **s**: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, elas serão concorrentes se tiverem coeficientes angulares diferentes:

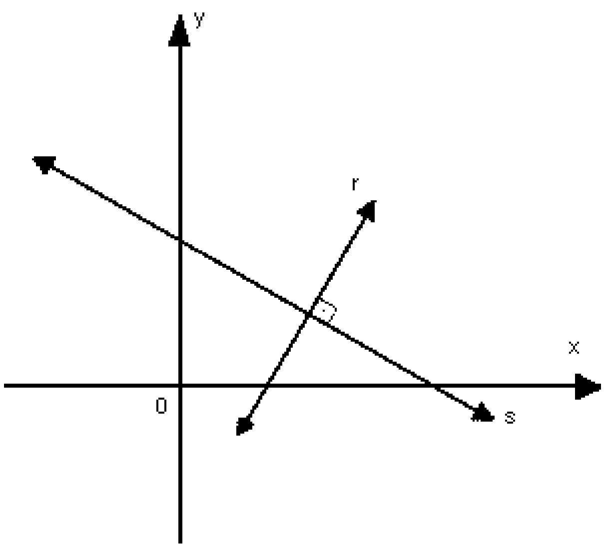
$$\text{r e s são } \textit{concorrentes} \Rightarrow m_r \neq m_s \Rightarrow -\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2}$$

Como exemplo, vamos ver se as retas **r**: $3x - 2y + 1 = 0$ e **s**: $6x + 4y + 3 = 0$ são concorrentes:

$$\left.\begin{aligned} m_r &= -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2} \\ m_s &= -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{aligned}\right\} m_r \neq m_s \Rightarrow \text{r e s são concorrentes}$$

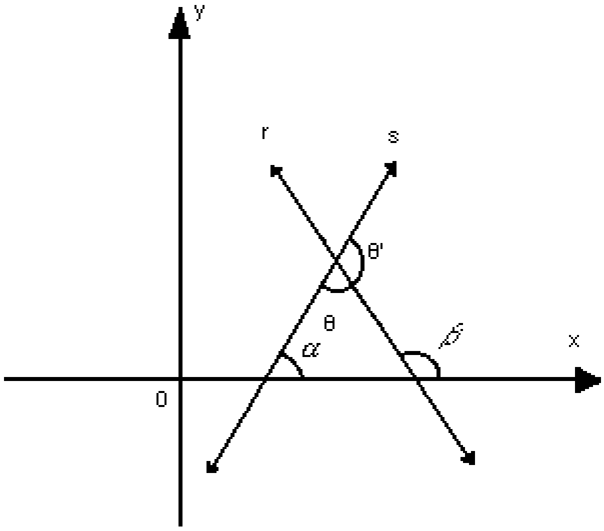
Perpendicularismo

Se **r** e **s** são duas retas não verticais, então **r** é perpendicular a **s** se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares for igual a -1. Lê-se $r \perp s$. Acompanhe o desenho:



Ângulo entre duas retas

Sendo r e s duas retas não verticais e não-perpendiculares entre si, pelo teorema do ângulo externo $(\beta = \alpha + \theta)$, temos:



$\theta \neq \frac{\pi}{2}$

$\beta = \theta + \alpha \Rightarrow \theta = \beta - \alpha \Rightarrow tg\,\theta = tg(\beta - \alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\,\theta = \frac{tg\,\beta - tg\,\alpha}{1 + tg\,\beta\, tg\,\alpha}$

Como $\mathrm{tg}\ \beta = \mathrm{m_r}$ e $\mathrm{tg}\ \alpha = \mathrm{m_s}$, vem :

$tg\,\theta = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}$

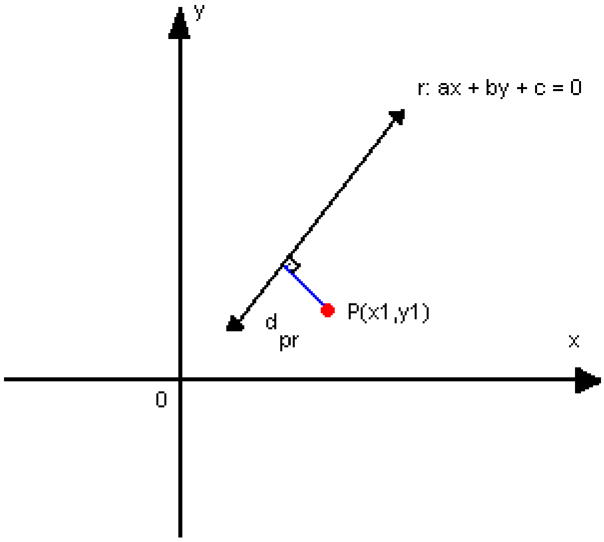
Dependendo da posição das duas retas no plano, o ângulo θ pode ser agudo ou obtuso. Logo:

$tg\,\theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right|$

Essa relação nos fornece o ângulo agudo θ entre r e s, pois $tg\,\theta \geq 0$. O ângulo obtuso θ' será o suplemento de θ.

Distância entre ponto e reta

Dados um ponto **P**(x_1, y_1) e uma reta **r**: ax + by + c = 0, a distância entre eles (d_{pr})é dada por:



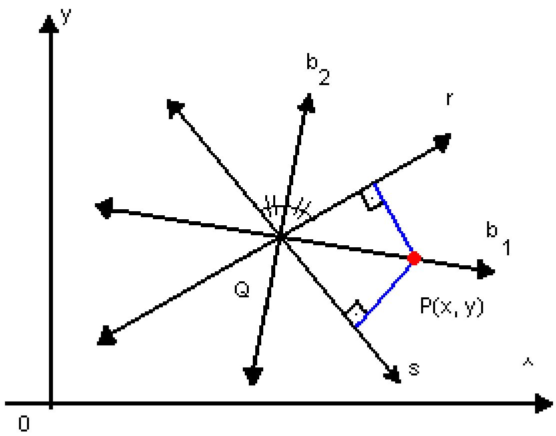
$$d_{pr} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Vamos calcular a distância, por exemplo, do ponto **P**(-1, 2) à reta
r: x - 2y + 1 = 0.
Temos **P**(-1, 2) = **P**(x1, y1), a = 1, b= - 2 e c=1. Assim:

$$d_{pr} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(-1) + (-2)2 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Bissetrizes

Dadas as retas concorrentes **r**: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e **s**: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, o que se interceptam em um ponto **Q**, se **P**(x, y) é um ponto qualquer de uma das bissetrizes, P ≠ Q, então **P** equidista de **r** e **s**:



$$d_{Pr} = d_{Ps} \Rightarrow \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Considerando o sinal positivo, obtemos uma bissetriz; considerando o sinal negativo, obtemos a outra.

Vejamos um exemplo:

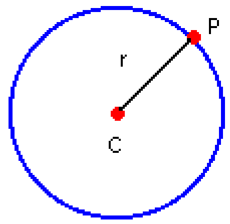
Se **r**: 3x + 2y - 7 = 0 e **s**: 2x - 3y + 1 = 0, então suas bissetrizes são:

$$\frac{3x+2y-7}{\sqrt{3^2+2^2}} = \pm\frac{2x-3y+1}{\sqrt{2^2+3^2}} \Rightarrow \begin{cases} b_1: 3x+2y-7 = 2x-3y+1 \Rightarrow x+5y-8=0 \\ b_2 = 3x+2y-7 = -2x+3y-1 \Rightarrow 5x-y-6=0 \end{cases}$$

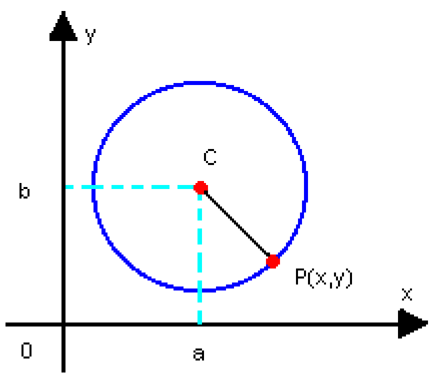
Equações da circunferência

Equação reduzida

Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo, desse mesmo plano, denominado centro da circunferência:



Assim, sendo **C**(a, b) o centro e **P**(x, y) um ponto qualquer da circunferência, a distância de **C** a **P**(d_{CP}) é o raio dessa circunferência. Então:



$$d_{CP} = \sqrt{(X_P - X_C)^2 + (Y_P - Y_C)^2} \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2}$$

Portanto, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ é a equação reduzida da circunferência e permite determinar os elementos essenciais para a construção da circunferência: as coordenadas do centro e o raio.

Observação: Quando o centro da circunferência estiver na origem C(0,0), a equação da circunferência será $x^2 + y^2 = r^2$.

Equação geral

Desenvolvendo a equação reduzida, obtemos a equação geral da circunferência:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Rightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

Como exemplo, vamos determinar a equação geral da circunferência de centro **C**(2, -3) e raio r = 4.

A equação reduzida da circunferência é:

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

Desenvolvendo os quadrados dos binômios, temos:

$$x^2-4x+4+y^2+6y+9-16=0 \Rightarrow x^2+y^2-4x+6y-3=0$$

Determinação do centro e do raio da circunferência, dada a equação geral

Dada a equação geral de uma circunferência, utilizamos o processo de fatoração de trinômio quadrado perfeito para transformá-la na equação reduzida e , assim, determinamos o centro e o raio da circunferência.

Para tanto, a equação geral deve obedecer a duas condições:

- os coeficientes dos termos x^2 e y^2 devem ser iguais a 1;
- não deve existir o termo xy.

Então, vamos determinar o centro e o raio da circunferência cuja equação geral é $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$.

Observando a equação, vemos que ela obedece às duas condições. Assim:

- 1º passo: agrupamos os termos em **x** e os termos em **y** e isolamos o termo independente

$x^2 - 6x + \_ + y^2 + 2y + \_ = 6$

- 2º passo: determinamos os termos que completam os quadrados perfeitos nas variáveis **x** e **y**, somando a ambos os membros as parcelas correspondentes.

$$x2 - 6x + 9 + y2 + 2y + 1 = 6 + 9 + 1$$
$$x \quad 2x \quad 3 \quad y \quad 2y\,.\,1$$

- 3º passo: fatoramos os trinômios quadrados perfeitos

$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$

- 4º passo: obtida a equação reduzida, determinamos o centro e o raio.

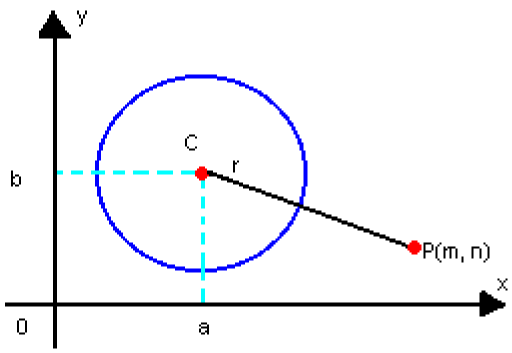
$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ b = -1 \end{array}\right\} C(3, -1)$$

$$r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$$

Posição de um ponto em relação a uma circunferência

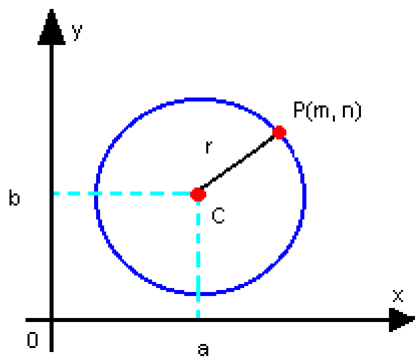
Em relação à circunferência de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, o ponto P(m, n) pode ocupar as seguintes posições:

a) **P** é exterior à circunferência



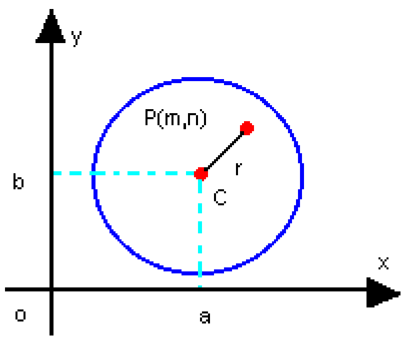
$$CP > r \Rightarrow \sqrt{(Xp - Xc)^2 + (Yp - Yc)^2} > r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(m - a)^2 + (n - b)^2} > r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 > r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 > 0$$

b) **P** pertence à circunferência



$$CP = r \Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 = r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 = 0$$

c) **P** é interior à circunferência



$$CP < r \Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 < r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 < 0$$

Assim, para determinar a posição de um ponto P(m, n) em relação a uma circunferência, basta substituir as coordenadas de P na expressão $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$:

- Se $(m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 > 0$, então **P** é exterior à circunferência;
- Se $(m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 = 0$ então P pertence à circunferência;
- Se $(m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 < 0$, então **P** é interior à circunferência.

Determinação do centro e do raio da circunferência, dada à equação geral.

Dada à equação geral de uma circunferência, utilizamos o processo de fatoração de trinômio quadrado perfeito para transformá-la na equação reduzida e, assim, determinamos o centro e o raio da circunferência.

Para tanto, a equação geral deve obedecer a duas condições:

- Os coeficientes dos termos x^2 e y^2 devem ser iguais a 1;
- não deve existir o termo xy.

Então, vamos determinar o centro e o raio da circunferência cuja equação geral é $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$.

Observando a equação, vemos que ela obedece às duas condições. Assim:

- 1º passo: agrupamos os termos em **x** e os termos em **y** e isolamos o termo independente

$x^2 - 6x + \_ + y^2 + 2y + \_ = 6$

- 2º passo: determinamos os termos que completam os quadrados perfeitos nas variáveis **x** e **y**, somando a ambos os membros as parcelas correspondentes.

$$x2 - 6x + 9 + y2 + 2y + 1 = 6 + 9 + 1$$

$$x \quad 2x \quad 3 \quad y \quad 2y \,.\, 1$$

- 3º passo: fatoramos os trinômios quadrados perfeitos

$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$

- 4º passo: obtida a equação reduzida, determinamos o centro e o raio

$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ b = -1 \end{array}\right\} C(3, -1)$$

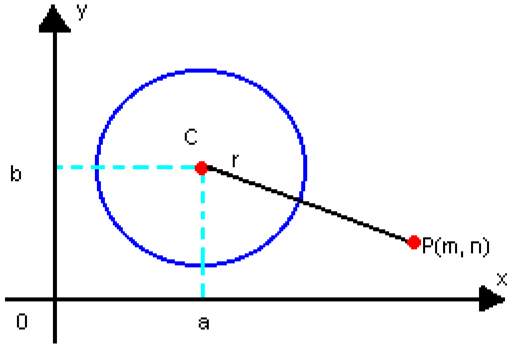
$$r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$$

Posição de um ponto em relação a uma circunferência

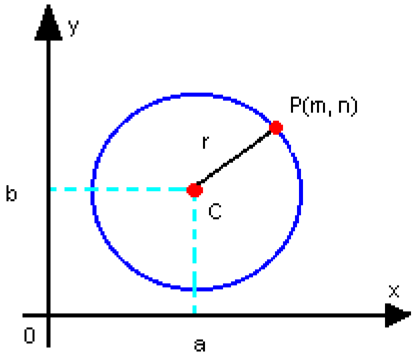
Em relação à circunferência de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, o ponto P(m, n) pode ocupar as seguintes posições:

a) **P** é exterior à circunferência

$$CP > r \Rightarrow \sqrt{(Xp - Xc)^2 + (Yp - Yc)^2} > r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(m - a)^2 + (n - b)^2} > r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 > r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 > 0$$

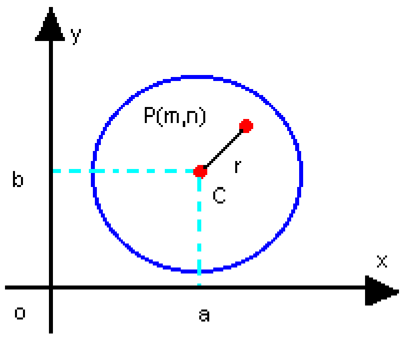


b) **P** pertence à circunferência



$$CP = r \Rightarrow (\mathrm{m} - \mathrm{a})^2 + (n - b)^2 = r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 = 0$$

c) **P** é interior à circunferência



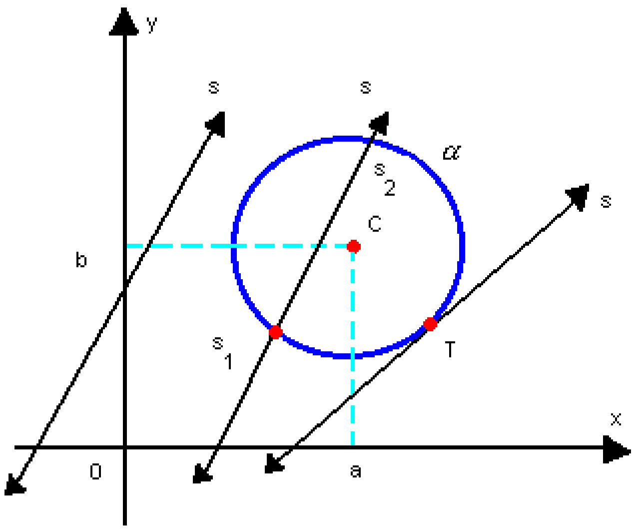
$$CP < r \Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 < r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 < 0$$

Assim, para determinar a posição de um ponto P(m, n) em relação a uma circunferência, basta substituir as coordenadas de P na expressão $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$:

- se $(m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 > 0$, então **P** é exterior à circunferência;
- se $(m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 = 0$, então **P** pertence à circunferência;
- se $(m - a)^2 + (n - b)^2 - r^2 < 0$, então **P** é interior à circunferência.

Posição de uma reta em relação a uma circunferência

Dadas uma reta s: Ax + Bx + C = 0 e uma circunferência α de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, vamos examinar as posições relativas entre **s** e α:



$$s \cap \alpha = \emptyset \Rightarrow s \text{ é exterior a } \alpha$$

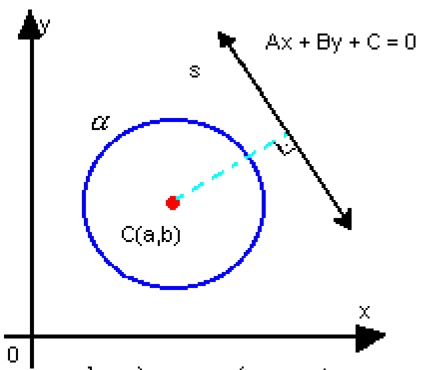
$$s \cap \alpha = \{T\} \Rightarrow s \text{ é tangente a } \alpha$$

$$s \cap \alpha = \{s_1, s_2\} \Rightarrow s \text{ é secante a } \alpha$$

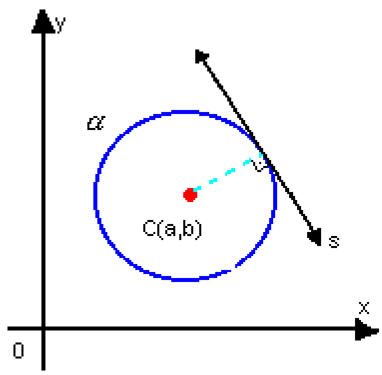
Também podemos determinar a posição de uma reta em relação a uma circunferência calculando a distância da reta ao centro da circunferência. Assim, dadas a reta **s**: Ax + By + C = 0 e a circunferência α:
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, temos:

$$d_{C_s} = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

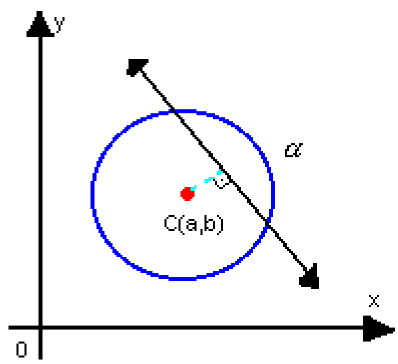
Assim:



$d_{C_s} > r \Rightarrow s$ é *exterior* a α



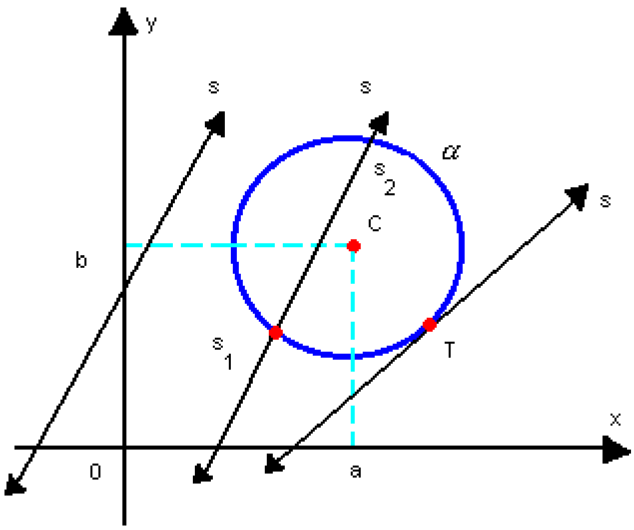
$d_{C_s} = r \Rightarrow s$ é tan *gente* a α



$d_{C_s} < r \Rightarrow s$ é secante a α

Posição de uma reta em relação a uma circunferência

Dadas uma reta s: Ax + Bx + C = 0 e uma circunferência α de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, vamos examinar as posições relativas entre **s** e α:



$s \cap \alpha = \varnothing \Rightarrow$ s é exterior a α

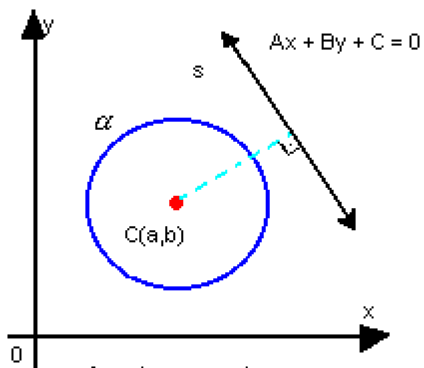
$s \cap \alpha = \{T\} \Rightarrow$ s é tangente a α

$s \cap \alpha = \{s_1, s_2\} \Rightarrow$ s é secante a α

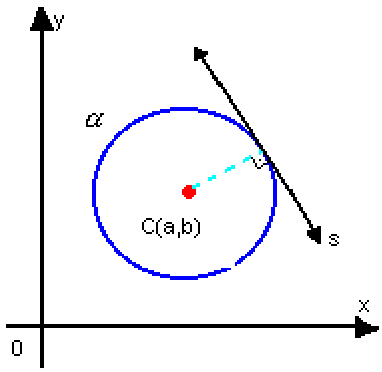
Também podemos determinar a posição de uma reta em relação a uma circunferência calculando a distância da reta ao centro da circunferência. Assim, dadas a reta **s**: Ax + By + C = 0 e a circunferência α: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, temos:

$$d_{C,s} = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

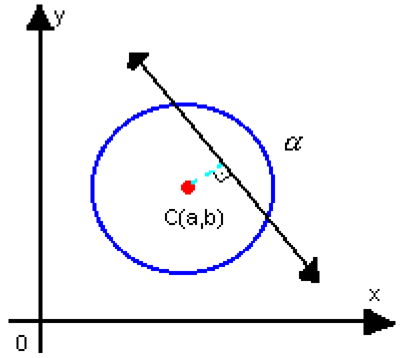
Assim:



$d_{C,s} > r \Rightarrow$ s é exterior a α



$d_{C,s} = r \Rightarrow$ s é tan gente a α

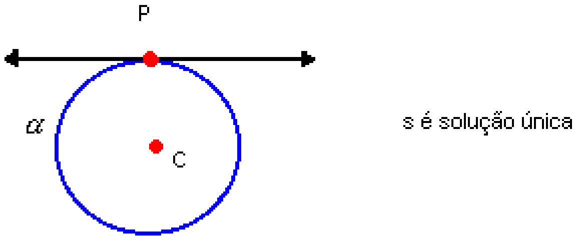


$d_{C,s} < r \Rightarrow s$ é secante a α

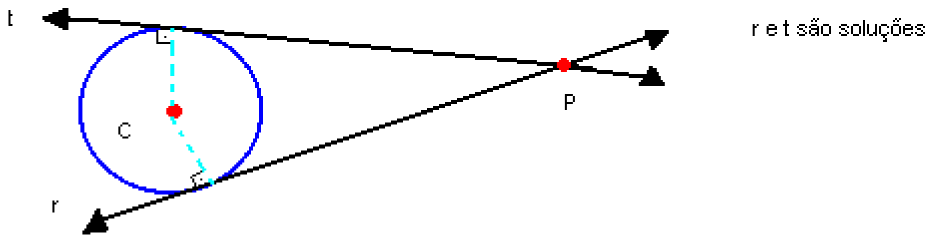
Condições de tangência entre reta e circunferência

Dados uma circunferência α e um ponto **P**(x, y) do plano, temos:

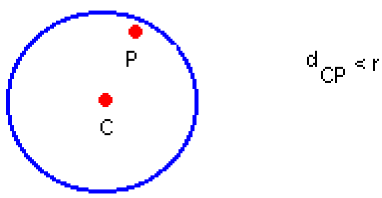
a) se **P** pertence à circunferência, então existe uma única reta tangente à circunferência por **P**.



b) se **P** é exterior à circunferência, então existem duas retas tangentes a ela por **P**.



c) se **P** é interior à circunferência, então não existe reta tangente à circunferência passando pelo ponto **P**.



Exercícios de fixação e revisão do conteúdo deste plano de trabalho

1 – Determine o ponto de encontro das retas cujas equações são:

a) $x + 2y - 3 = 0$ e $x - 2y + 7 = 0$

b) $2x + y - 1 = 0$ e $3x + 2y - 4 = 0$

c) $2x + 3y - 8 = 0$ e $2x - 4y + 13 = 0$

2 – Determine a equação da reta que passa pelo ponto **P** e é perpendicular à reta **r** em cada um dos seguintes casos:

a) **P**$(-3 ; 2)$ e equação de **r**: $3x + 4y - 4 = 0$

b) **P**$(2 ; 6)$ e equação de **r**: $2x - y + 3 = 0$

c) **P**$(1 ; 4)$ e equação de **r**: $x - y - 1 = 0$

d) **P**$(3 ; 5)$ e equação de **r**: $y - 4 = 0$

3 – Qual deve ser o valor de **k** para que as retas **r** e **s**, de equações $kx + y + 5 = 0$ e $3x + (k + 1)y - 9 = 0$, respectivamente, sejam perpendiculares?

4 – Qual é a posição da reta **r**, de equação $15x + 10y - 3 = 0$, em relação à reta s, de equação $9x + 6y - 1 = 0$?

5 – Se as retas de equações $(a + 3)x + 4y - 5 = 0$ e $x + ay + 1 = 0$ são paralelas, calcule o valor de a?

6 – Dados o ponto **P** e a circunferência λ, determine a posição de **P** em relação à λ.

a) **P**$(-1: 2)$ e λ: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 5^2$

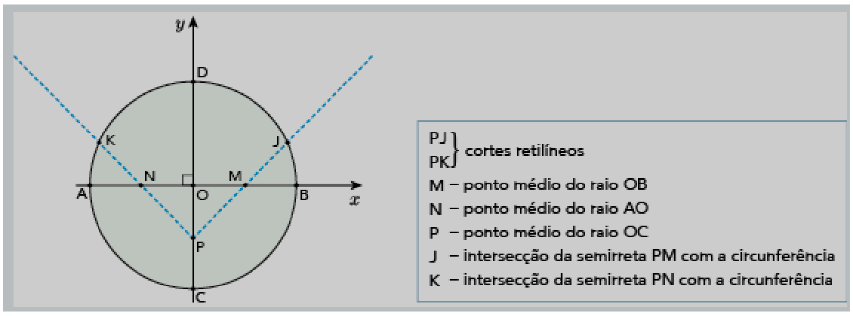
b) **P**$(2: 2)$ e λ: $x^2 + y^2 - 10x + 8y - 1 = 0$

c) **P**$(3: 1)$ e λ: $x^2 + y^2 - 8x - 5 = 0$

7 – Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$, qual é a posição do ponto **P**$(3; -4)$ em relação a essa circunferência?

8 – Encontre a equação da circunferência que passa pelos pontos **P**$(0; 0)$, **Q**$(3; 3)$ e **R**$(0; 8)$.

9 – (UERJ–2013) Um disco metálico de centro O e diâmetros AB = 4 dm, utilizado na fabricação de determinada peça é representado pelo seguinte esquema.



Calcule a distância entre os pontos J e K.

Aplicando o Roteiro de Ação 2 – Uma Investigação sobre Retas Perpendiculares

- **Duração prevista:** 100 minutos.

- **Área de Conhecimento:** Matemática.

- **Assunto: Geometria Analítica.**

- Objetivos: Deduzir a relação entre os coeficientes angulares de retas perpendiculares.

- **Pré-requisitos: Marcação de pontos no plano cartesiano, identificação da equação de uma reta.**

- **Material necessário:** Folha de atividade, lápis ou caneta.

- **Organização da classe:** Turma disposta em grupos de dois a três alunos de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

- **Descritores associados: H15 –** Identificar a equação de uma reta apresentada, a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

FOLHA DE ATIVIDADES

C. E. MONSENHOR MIGUEL SANTA MARIA MOCHÓN
ATIVIDADE SOBRE GEOMETRIA ANALÍTICA – RETAS PERPENDICULARES
DISCIPLINA: MATEMÁTICA PROFESSORA: MARTA
ALUNO (A): ____.
SÉRIE: 3ª TURMA: 3002 TURNO: MANHÃ
BIMESTRE: 4º DATA: ___/11 /2014 NOTA: _____________

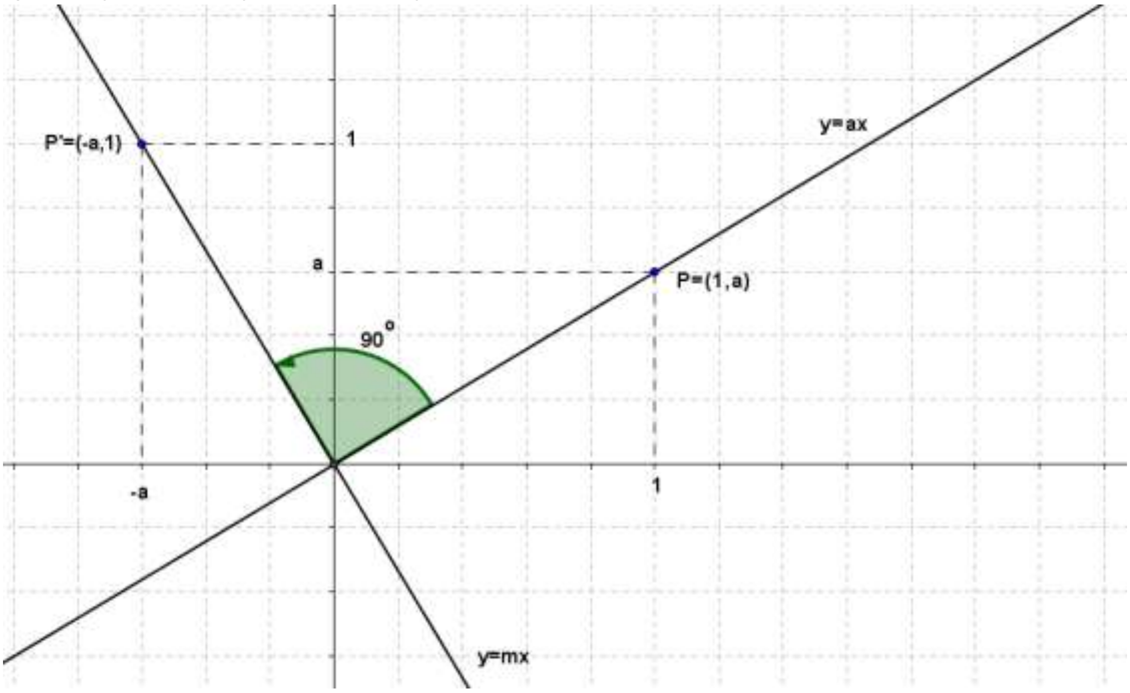
ATIVIDADES

De que forma as equações das retas perpendiculares se relacionam?

____

____

Vamos considerar duas retas perpendiculares passando pela origem com equações y = ax e y = mx respectivamente.



Repare que após uma rotação positiva (sentido anti-horário) de 90 ° em torno da origem, o ponto **P** = (1; a) irá cair sobre o ponto **P**' = (−a; 1).

1) Observando que o ponto P= (−a; 1) pertence a reta de equação y = mx, substitua as coordenadas de **P’** na equação da reta e estabeleça uma relação entre os coeficientes angulares **a** e **m**.

____

____

____

____

____

2) Agora, substitua o ponto **P** = (1; a) na equação y = mx. Que relação podemos estabelecer entre os coeficientes angulares **a** e **m**?

____
____
____
____

3) De acordo com o que você descobriu nos itens anteriores, se uma reta que passa pela origem tem equação y = ax, qual será a equação da reta que também contém a origem e é perpendicular a esta?

____
____
____
____

Você deve ter percebido que dada uma reta **r** contendo a origem, o coeficiente angular da reta perpendicular a **r** que contém a origem é o inverso negativo do coeficiente angular da reta **r**.

Ou seja, a equação da reta que é perpendicular a reta de equação y = ax e que passa pela origem é dada por $y = -\frac{1}{a}x$.

Será que essa relação se mantém para todas as retas?

____
____

Já vimos que duas retas de equação y = ax + b e y = a_1x + b_1 são paralelas se possuem o mesmo coeficiente angular e cortam o eixo y em locais diferentes, ou seja, se a = a_1 e b $\neq$ b_1.

4) Considere duas retas perpendiculares de equação y = ax e y = mx.
Qual será a relação entre as retas de equação y = ax + b e y = mx + c?
Discuta com seus colegas.

____
____
____

Duas retas de equação $y = ax + b$ e $y = mx + c$ são perpendiculares, se, e somente se, $a.m = -1$

5) Na sua opinião, dadas as retas de equações $ax + by = c$ e $a_1x + b_1y = c_1$ quais devem ser as condições dos coeficientes de **x** e **y** para garantir que as retas sejam perpendiculares? Converse com seus colegas.

____
____
____

6) Escreva as equações do item 5) na forma reduzida e encontre o coeficiente angular de cada uma das retas.

____
____
____

7) Lembrando que o coeficiente angular de uma reta é o oposto do inverso da outra, encontre uma condição algébrica para que as retas sejam perpendiculares.

____
____
____
____

Você deve ter percebido que para que as retas sejam perpendiculares a relação $a.a_1 + b.b_1 = 0$ deve ser satisfeita. O procedimento que acabamos de fazer nos leva ao seguinte resultado:

Duas retas de equações $ax + by = c$ e $a_1 + b_1y = c_1$ são perpendiculares se, e somente se, $a.a_1 + b.b_1 = 0$.

8) Verifique se as retas $3x + 7y = 9$ e $7x -03y = s$ são perpendiculares.

____
____
____
____

<u>Algumas questões contextualizadas ou não sobre Geometria Analítica que farão parte da avaliação interdisciplinar da unidade escolar</u>

1 – Sabe-se que a reta (s), de equação $ax + by = 0$, é paralela à reta (r), de equação $4x – 8y + 6 = 0$. Então, vale a/b:

a)1/2
b) 1
c) – 2
d) –1/2
e) 2

2 – As retas de equações $x - 2y + 1 = 0$ e $-x - 3y - 1 = 0$ são

a) concorrentes e não perpendiculares entre si.
b) paralelas e não coincidentes.
c) perpendiculares entre si.
d) coincidentes.
e) paralelas.

3 – 14) As retas $x + ay - 3 = 0$ e $2x - y + 5 = 0$ são paralelas, se **a** vale:

a) – 2
b) − 0,5
c) 0,5
d) 2
e) 8

4 – Pilates é um sistema de exercícios físicos que integra o corpo e a mente como um todo, desenvolvendo a estabilidade corporal necessária para uma vida mais saudável. A figura abaixo mostra um dos exercícios trabalhado no Pilates e é observado que o corpo da professora gera um arco AB. Supondo que o arco gerado pelo corpo da professora seja um quarto de uma circunferência de equação $100x^2 + 100y^2 – 600x – 800y + 2356 = 0$ (com medidas x e y em metros). O valor aproximado da altura da professora é:

Fonte: http://www.econtado.com.br

a) 1,72 m b) 1,76 m
c) 1,80 m d) 1,84 m
e) 1,88 m

AVALIAÇÃO

A avaliação envolve aluno e professor e deve ser realizada de maneira que ambos possam avaliar o quanto se desenvolveu cada uma das competências relacionadas ao tema estudado. As atividades a serem realizadas em duplas, descritas nas páginas 22 a 24, servirão para pesquisar as competências e habilidades adquiridas pelos alunos. Por isso, deve ser estimulada, portanto servirá como um instrumento de avalição de recuperação paralela. Desta forma, o professor poderá avaliar a reflexão e o argumento crítico usado pelos alunos.

É apropriado verificar os acertos dos alunos nas questões relacionadas com o tema que constarão no SAERJ (4º bimestre). Este será outro instrumento de avaliação e valerá até 2,0 pontos. Porém, nele o professor poderá verificar a aprendizagem não apenas do assunto que norteou este plano de trabalho, mas também em conteúdos estudados nos bimestres anteriores.

Selecionar questões contextualizadas ou não contemplando este conteúdo, para fazerem parte de uma avaliação interdisciplinar adotada pela unidade escolar que vale até 5,0 pontos no bimestre. Elas servirão para investigar a capacidade de utilização dos conhecimentos adquiridos e do raciocínio lógico para resolver problemas.

Os outros 3,0 pontos para completar os 10,0 pontos que os alunos têm direito, será o desempenho deles na elaboração e apresentação de um projeto que envolverá toda a escola sobre A Bomba de Hiroshima.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ROTEIRO DE AÇÃO 2 – Uma Investigação sobre Retas Perpendiculares – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 3º bimestre/2014 < file:///C:/Documents%20and%20Settings/Administrador/Meus%20documentos/Downloads/MAT_3B_3SER_1C_Complexos_Roteiro1%20(1).pdf> Acesso em 02/11/2014.

http://www.somatematica.com.br/emedio4.php
Acesso em 07/09/2014.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações.** Ensino Médio, São Paulo 2009.