Reforço escolar · Matemática ·

Real ou imaginário?

Dinâmica 1

3º Série | 3º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	3ª Série do Ensino Médio	Algébrico Simbólico	Números Complexos

Aluno

Primeira Etapa
Compartilhar ideias

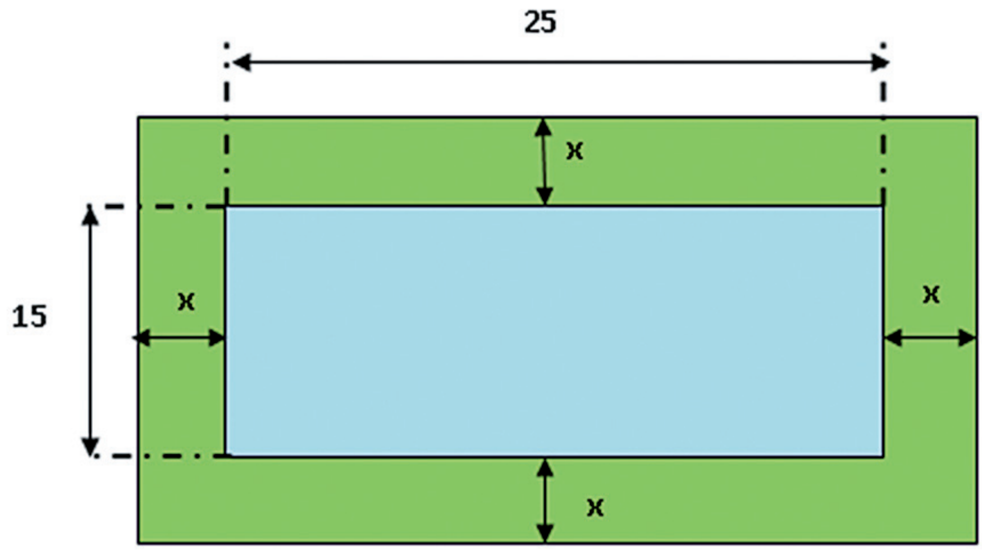
Atividade • A calçada da piscina

Você se lembra da equação do 2º grau e de sua resolução? Vamos usá-la aqui.

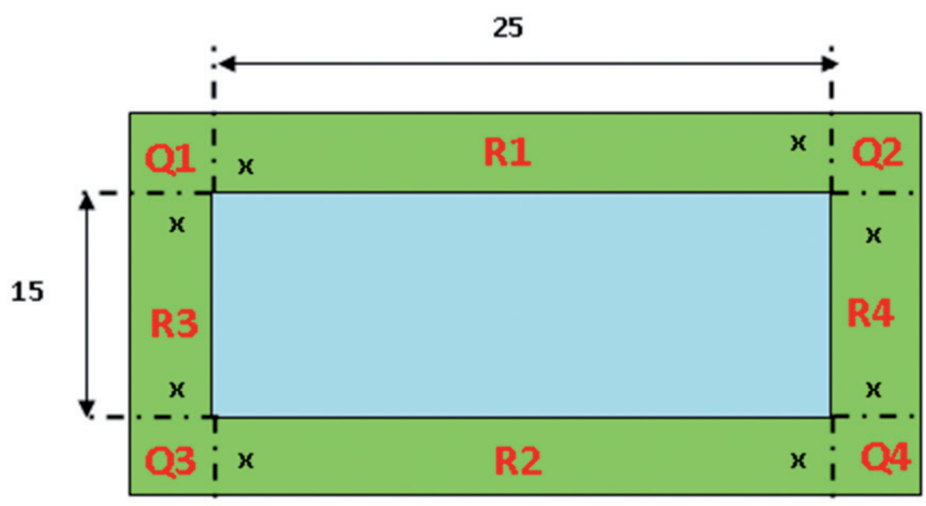
Questão 1:

Um clube quer construir uma calçada em volta de uma piscina retangular, que mede 25 m por 15 m. A calçada terá sempre a mesma largura que deve ser a maior possível. Porém, não se pode gastar mais do que 500 m^2 de lajotas. Qual deve ser a largura da calçada?

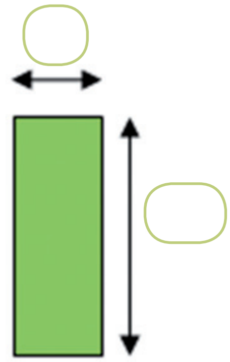
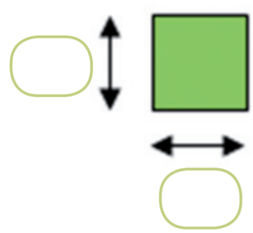
Governo do Rio de Janeiro — Secretaria de Estado de Educação
Governo do Rio de Janeiro — Secretaria de Ciência e Tecnologia
Fundação CECIERJ — Consórcio cederj



<u>1º passo</u>: A resolução começa por recortar a figura em quadrados e retângulos. A seguir, deve ser feito o cálculo das áreas parciais de cada figura obtida pelo recorte. Sendo x a largura da calçada, observe a figura a seguir e complete a tabela, com o cálculo da área total da calçada:



Aluno

FIGURA		ÁREA
Retângulo maior R1		
Retângulo maior R2		
Retângulo menor R3		15x
Retângulo menor R4		
Quadrado Q1		
Quadrado Q2		
Quadrado Q3		
Quadrado Q4		
Total		

2º passo: E, agora, igualando essa área ao total da área das lajotas disponíveis, você chega a uma equação. Escreva a equação e determine os coeficientes que vão ser usados na fórmula de resolução (conhecida em alguns textos didáticos como fórmula de Bhaskara).

Igualando a área da calçada à área das lajotas disponíveis	
Equação do 2º grau com 2º membro igual a zero	= 0
Você pode simplificar esta equação, dividindo todos os coeficientes por 4	= 0
a	
b	
c	– 125

3º passo: A solução desta equação pode ser calculada de várias formas mas, nesta dinâmica, interessa-nos usar a fórmula para o tema das etapas seguintes. Tente, então, escrever a fórmula aqui e compare com a "dica" que está no final do seu Encarte:

x = ______________________________

4º passo: Quais são as soluções da equação obtida no 2º passo?

Aluno

5º passo: Qual a solução do problema da calçada?

Questão 2:

Se a equação encontrada tivesse sido $x^2 + 20x + 125 = 0$, qual teria sido a solução do problema da calçada?

Na etapa seguinte, você verá o que foi feito para superar este obstáculo!

Segunda Etapa
Um novo olhar...

Atividade • Superando obstáculos.

Questões:

1. Quais foram os primeiros números que você conheceu?

2. Os romanos não consideravam o zero como número, eles não precisavam desse símbolo. Por exemplo, eles escreviam cento e cinco como CV, cento e cinquenta como CD e quinze como XV. No sistema posicional, porém, era preciso distinguir cento e cinco de quinze e de cento e cinquenta. Surgiu, então, a necessidade da criação de um símbolo para o zero. Em 105, 15 e 150, o zero indica qual o valor de 1 e de 5 em cada um desses números. A maioria dos livros chama os números 0, 1, 2, etc. de números naturais e seu conjunto de $\mathbb{N}$. Observe que você pode somar quaisquer dois números naturais e obtém ainda um número natural. Dê alguns exemplos.

3. Qual é a operação inversa da adição?

Fonte: http://www.cbat.org.br/competicoes/fundo_pista/galeria.asp

4. **1º obstáculo**: No campo dos números naturais, você pode subtrair quaisquer 2 números? Por exemplo, qual será o número natural resultado de 8 – 5? E de 5 – 8?

5. O conjunto dos números naturais foi aumentado para superar este obstáculo. Você sabe quais foram os números que resolveram este problema?

Matemática

6. Você pode multiplicar quaisquer dois números inteiros e obter ainda um número inteiro. Por exemplo, quanto é $2 \times (-5)$? E quanto é $(-2) \times (-5)$?

7. Qual a operação inversa da multiplicação?

Fonte: http://www.cbat.org.br/competicoes/fundo_pista/galeria.asp

8. **2º obstáculo**: Você pode dividir quaisquer 2 números inteiros? Por exemplo, qual o número inteiro resultado de $8 \div 4$? E de $8 \div 5$?

9. O conjunto dos números inteiros foi aumentado para superar este obstáculo (sem considerar aqui o obstáculo da divisão por zero). Você sabe quais foram os números que resolveram este problema?

Observe que, nos números racionais, a divisão é possível, desde que o divisor seja diferente de 0. A divisão por 0 continua não sendo possível com as quatro operações básicas definidas nos conjuntos numéricos que conhecemos até agora..., nem mesmo nos complexos.

10. A representação decimal de um número racional é uma representação finita (com um número finito de algarismos, com vírgula, ou não) ou uma dízima periódica (um número sem fim de algarismos depois da vírgula que, a partir de certo ponto, passam a se repetir, na mesma ordem, indefinidamente). Que tipo de representação decimal pode existir ainda e como se chamam os números assim representados?

11. Qual é o conjunto obtido pelo conjunto dos números racionais, completado pelos números irracionais?

Aluno

Fonte: http://www.cbat.org.br/competicoes/fundo_pista/galeria.asp

12. **3º obstáculo**: Uma operação que se pode fazer entre os números reais é elevar ao quadrado. Qual é a operação inversa desta? Quando se pode calcular esta inversa e quando não se pode?

Vamos ver como a Matemática fez para saltar esse obstáculo?

Ela considerou um outro tipo de número: os números imaginários. Para isso, definiu um novo número chamado de unidade imaginária e indicado pela letra i tal que:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Terceira Etapa

Fique por dentro!

Atividade • Complexos, mas ... não tanto.

A definição da unidade imaginária, i, propicia a construção de um conjunto bem maior de números que estende o conjunto dos números reais. Entre esses números, as operações são definidas de modo que se mantenham grande parte das propriedades que elas possuíam nos números reais. Por exemplo:

Dadas as definições:

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^{n+1} = i^n \times i$, se $n \geq 1$, n natural.

Têm-se:

- Se r e s são números inteiros, para a base i valem as propriedades que valiam para bases reais positivas: $i^r \times i^s = i^{r+s}$ e $(i^r)^s = i^{r \times s}$.
- Vale ainda a propriedade que permite o cálculo da raiz quadrada de qualquer número real, mesmo que ele seja negativo:

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}.$$

Usando estas propriedades, você vai conhecer alguns outros números imaginários nas próximas questões:

Questão 1:

Complete a tabela a seguir:

$\sqrt{-1} =$	
$\sqrt{-4} =$	$\sqrt{4\times(-1)} = \sqrt{4}\times\sqrt{-1} = 2i$
$\sqrt{4} =$	
$\sqrt{-0{,}25} =$	$\sqrt{0{,}25\times(-1)} = \sqrt{0{,}25}\times\sqrt{-1} = 0{,}5i$
$\sqrt{-100} =$	
$i^{20} =$	$(i^4)^5 = 1^5 = 1$
$i^{30} =$	$i^{28} \times i^2 = (i^4)^7 \times (-1) = 1^7 \times (-1) =$ $= 1 \times (-1) = -1$
$i^{100} =$	$(i^4)^{25} = 1^{25} = 1$

$i^2 =$	
$i^3 =$	$i^2 \times i = (-1) \times i = -i$
$i^4 =$	
$i^5 =$	
$i^6 =$	
$i^{21} =$	
$i^{31} =$	
$i^{102} =$	

Aluno

Questão 2:

Como você agora já tem como calcular $\sqrt{-100}$, qual é a solução dada pela fórmula, dita de Bhaskara, da segunda equação da primeira etapa, $x^2 + 20x - 125 = 0$, cujo discriminante é $\Delta = -100$?

Os números desta fórmula, com uma parte real (– 10) e uma parte imaginária (+5i ou –5i) são chamados números complexos.

Quarta Etapa

Quiz

Questão: (Saerjinho 3º bimestre – 2011 – adaptada)

O conjunto solução da equação $x^2 - 2x + 2 = 0$, com x complexo, é

a. o conjunto vazio.

b. $\{1 + i , 1 - i\}$

c. $\{-1 + i , -1 - i\}$

d. $\{1 + \sqrt{12} , 1 - \sqrt{12}\}$

e. $\{-1 + \sqrt{12} ,$

Matemática

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao Quiz

Etapa Flex
Para saber +

1. Em:

http://mathextrema.blogspot.com.br/p/numeros-complexos.html, Você pode ler que *"Alguns matemáticos europeus, em particular os italianos Girolamo Cardano (1501 – 1576) e Rafaello Bombelli (1526 – 1572), introduziram os números complexos na Álgebra, durante o Século XVI, apesar de considerarem tais raízes "números impossíveis" e, assim, denominá-los "números imaginários". Por esse motivo, até hoje perdura o nome de números imaginários quando nos referimos a raízes quadradas de números negativos."*

2. Em

http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1282,

Você poderá ouvir a Ópera complexa, cuja sinopse é a seguinte:

O programa apresenta a história dos números complexos. Durante o programa a professora conta a Joãozinho e Sofia como surgiu a ideia dos números complexos e como essa ideia revolucionou a Matemática e dividiu opiniões de grandes matemáticos ao longo da história até chegar *ao conceito que temos hoje.*

Agora, é com você!

1. (CEFET-RJ) A equação de 2º grau, com coeficientes reais, que tem uma das raízes igual a $2 + 3i$ é:

a. $x^2 - 4x + 13 = 0$

b. $x^2 - 2x + 3 = 0$

c. $x^2 + 4x - 9 = 0$

d. $x^2 + 4x + 13 = 0$

e. $x^2 + 2x + 3 = 0$

Para responder a este teste, resolva todas as equações acima, como exercício. A questão pode ser resolvida de outra forma, mas precisa de resultados que nem sempre são focalizados no ensino básico.

Dica:

As raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, são dadas pela fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aluno