FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO: C.E. Cardeal Arcoverde
PROFESSORA: Janete Maria Jesus de Sá
MATRÍCULA: 0825192-8
SÉRIE: 2ª série do Ensino Médio
TUTOR: Maria Cláudia Padilha Tostes
GRUPO: 4

PLANO DE TRABALHO SOBRE FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Janete Maria Jesus de Sá

janetemjdesa@ig.com.br

1. Introdução

A palavra Logaritmo já assusta o aluno, portanto é importante inicialmente apresentar o significado do termo que é a junção das palavras gregas: logos + arithmos = razão + número. E antes de citar o termo Logaritmo é necessário fazer uma revisão de Potência e Equação Exponencial, apesar de Função Exponencial fazer parte do Currículo Mínimo do 4º bimestre da 1ª série do Ensino Médio. Estes conteúdos são pré-requisitos para o ensino de Logaritmo e deve-se levar em consideração que pode não ter sido bem trabalhado ou que o aluno tem dificuldades ou nem lembra mais do conteúdo.

A abordagem de Logaritmo deve ser feita o mais natural possível, deixando o aluno perceber como o Logaritmo veio para facilitar os cálculos. De uma maneira intuitiva o aluno será levado a notar que utilizando os expoentes facilitará o cálculo, pois o Logaritmo é o expoente. Só então o aluno poderá valorizar a história da criação do Logaritmo, sua definição, nomenclaturas, propriedades, além da apresentação gráfica aliada a comparação com a Função Exponencial. Exemplos contextualizados, envolvendo diversos assuntos como crescimento populacional, terremotos, química, além de matemática financeira e progressão (conteúdos do próximo bimestre) serão trabalhados.

Em temos históricos a descoberta dos logaritmos é dada ao escocês John Napier (1550-1617), embora tenha tido contribuições de outros matemáticos como Jobst Bürgi (1552-1632) e Henry Briggs (1561-1630). Os logaritmos facilitaram o desenvolvimento do comércio, da navegação e da Astronomia, pois multiplicação e divisão com números muitos grandes eram feitas utilizando relações trigonométricas, o que tornava tudo mais trabalhoso. Com o avanço da tecnologia através da criação de computadores e calculadoras o objetivo inicial do Logaritmo deixou de ser. Todavia o Logaritmo pode representar diversos fenômenos físicos, biológicos e econômicos, valorizando a sua existência.

A ideia base de Napier foi associar sequências, e é essa ideia que será trabalhada com o aluno através de tabelas para o mesmo preencher e obter resultados de alguns cálculos, utilizando os expoentes. Tendo como objetivo principal a construção do conhecimento que proporciona uma aprendizagem completa.

Na definição de Logaritmo temos que o logaritmo de b na base a é o expoente x ao qual se deve elevar a base a de modo que a potência a^x seja igual a b. Para tanto a e b são números reais e positivos com a diferente de 1. Onde o aluno será questionado o porquê das restrições, isto é, o que aconteceria se a ou b fossem negativos e a fosse igual a 1. É importante que o aluno entenda cada detalhe do conteúdo, e não somente aceite.

Desenvolvimento

Atividade:

- **Habilidade relacionada:**

  Observação e cálculos.

  Descritores:
  H41- Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números (padrões).
  H34 – Efetuar operações utilizando as propriedades operatórias do logaritmo.

  Pré-requisitos:
  Potenciação.

- **Tempo de Duração:**

  4 tempos de aula ou 1 semana de aula (no ensino noturno corresponde a 180 minutos).

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

  Folha com tabela para completar e contas para resolver, lápis, calculadora e gravuras (ou apresentação das mesmas no data show).

- **Organização da turma:**

  Divisão da turma em duplas.

- **Objetivos:**

  -Levar o aluno a completar a tabela;

  -Levar o aluno a observar que aplicando as propriedades de potência facilita os cálculos;

-Levar o aluno a compreender a definição de logaritmo;

-Levar o aluno compreender as propriedades operatórias de logaritmos;

-Levar o aluno a fixação do conteúdo;

-Levar o aluno a socialização do trabalho em grupo.

- **Metodologia adotada:**

1ª - Divisão da turma em duplas;

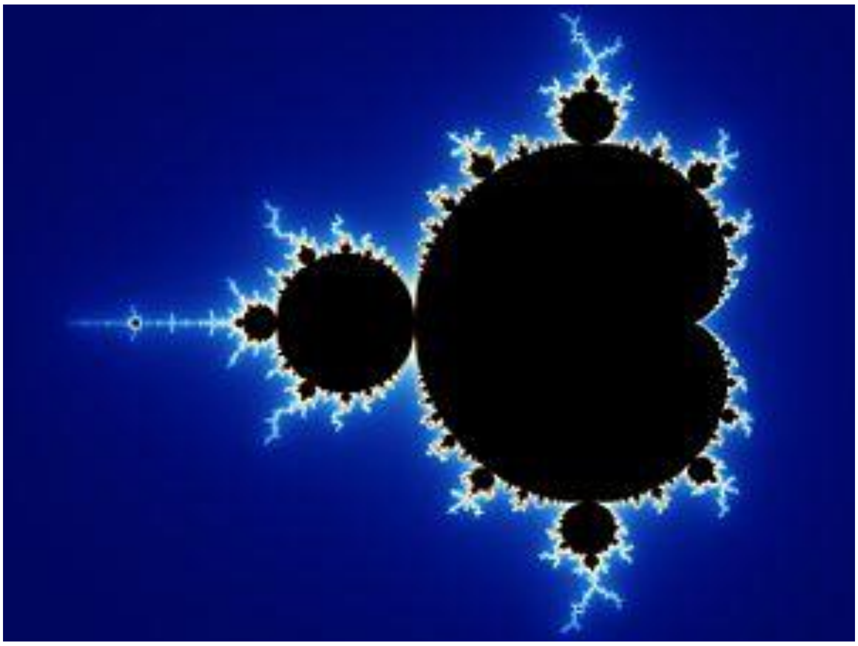
2ª- Cada dupla recebe uma folha com uma tabela incompleta;

0	1	2	3										
1	3	9	27										

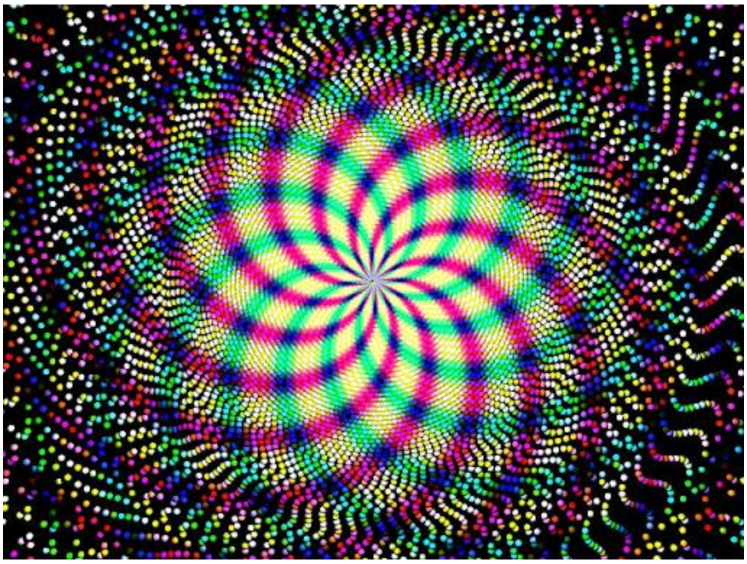
3ª - O professor irá pedir que os alunos percebam o desenvolvimento das duas sequências de números e completem as mesmas utilizando uma calculadora se sentirem necessidade;

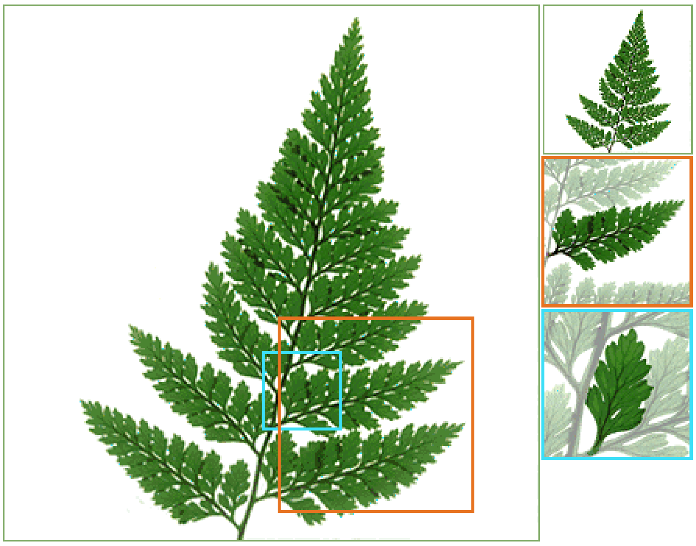
4ª - O professor questionará qual a expressão que representa a segunda linha da tabela;

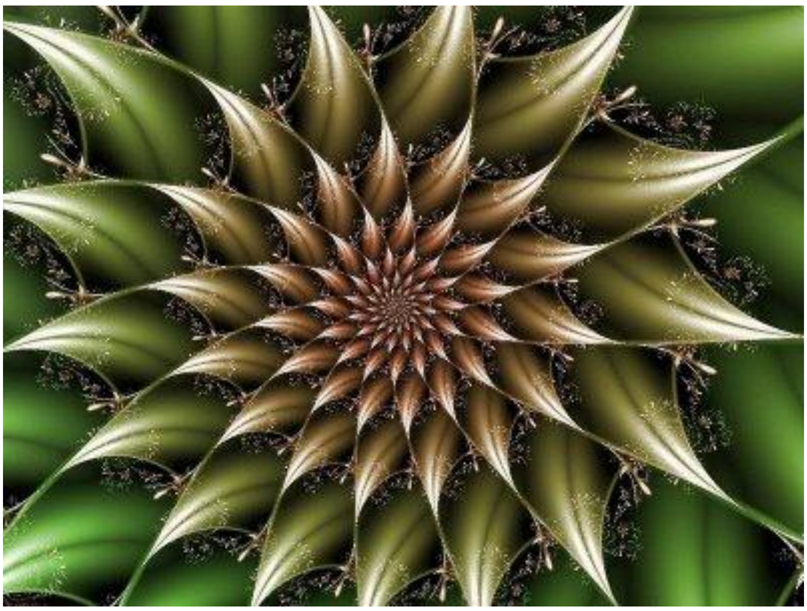
5ª - O professor explicará que as características se mantêm, assim como os fractais. Então serão mostradas gravuras de fractais que seguem esse padrão;

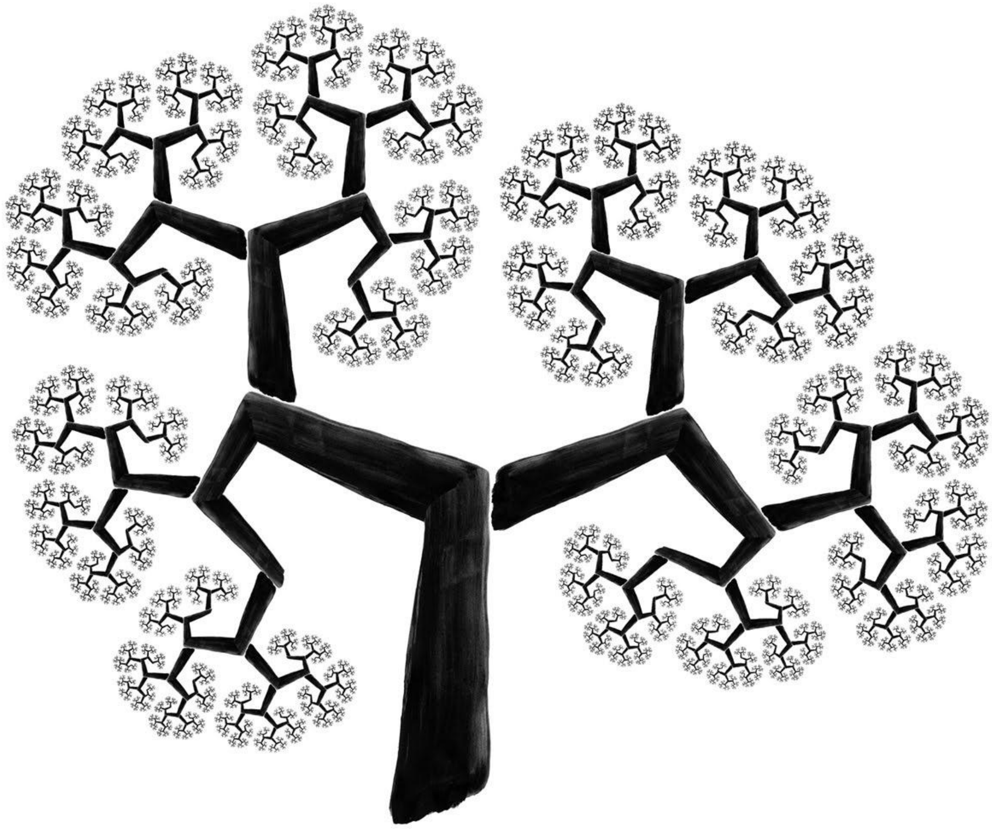


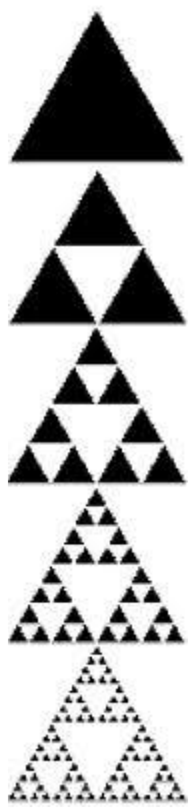
Conjunto de Mandelbrot











A sequência de figuras abaixo representa os cinco primeiros passos da construção do conjunto de Sierpinski. Os vértices dos triângulos brancos construídos são os pontos médios dos lados dos triângulos escuros da figura anterior. Denominamos a1 , a2 , a3 , a4 e a5, respectivamente, as áreas das regiões escuras da primeira, segunda, terceira, quarta e quinta figuras da sequência.

6ª - O professor colocará no quadro questões e pedirá que resolvam sem o uso da calculadora, apenas observando a tabela pela dupla preenchida:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	177147	531441	1594323

Efetue as seguintes operações e veja se você percebe algum padrão, observando a tabela:

a) 2 187 X 27 = $3^7 \times 3^3 = 3^{7+3} = 3^{10} = 59049$

b) 6 561 X 243 = $3^8 \times 3^5 = 3^{8+5} = 3^{13} = 1594323$

c) 177 147 ÷ 6 561 = $3^{11} \div 3^8 = 3^{11-8} = 3^3 = 27$

d) 59049 ÷ 6561 = $3^{10} \div 3^8 = 3^{10-8} = 3^2 = 9$

e) 243 X 729 = $3^5 \times 3^6 = 3^{5+6} = 3^{11} = 177147$

f) 2187 X 81 = $3^7 \times 3^4 = 3^{7+4} = 3^{11} = 177147$

g) 531441 ÷ 19683 = $3^{12} \div 3^9 = 3^{12-9} = 3^3 = 27$

h) 1594323 ÷ 81= $3^{13} \div 3^4 = 3^{13-4} = 3^9 = 19683$

Obs: O que está em vermelho é o que a dupla deverá desenvolver, tendo a orientação do professor caso seja necessário.

7ª - O professor aproveitará esse momento e mostrará as gravuras dos matemáticos: alemão Michael Stifel (1487-1567) que no século XVI utilizou tabelas semelhantes para efetuar multiplicações que influenciaram o matemático John Napier (1550-1617) na criação dos Logaritmos, além das contribuições de outros matemáticos como Jobst Bürgi (1552-1632) e Henry Briggs (1561-1630);

Michel Stifel

John Napier

Jobst Bürgi

Henry Briggs

8ª- O professor então irá apresentar o termo Logaritmo com seu significado (logos = razão + arithmos = números) que nada mais é do que o expoente:

- 4 é o logaritmo de 81 na base 3 ⇔ $\log_3 81 = 4$;
- 6 é o logaritmo de 729 na base 3 ⇔ $\log_3 729 = 6$;
- 8 é o logaritmo de 6561 na base 3 ⇔ $\log_3 6561 = 8$.

9ª – Cada dupla sorteará um papel para ler para turma, completando. Exemplos:

O logaritmo de 27 na base 3 é -------.
$\log_3 243$ = --------
O logaritmo de 1 na base 3 é --------.
$\log_3 2187$ = -------
O logaritmo de 3 na base 3 é --------.

10ª – O professor pedirá que cada dupla complete as tabelas abaixo e responda as questões:

0	1	2	3											
1	2	4	8											

a) O logaritmo de 256 na base 2 é ________
b) 512 X 16 = ________
c) $\log_2 128$ = ________
d) 32 X 256 = _______

e) O logaritmo de 2 048 na base 2 é _________
f) $\log_2 64$ = _________
g) 4 096 ÷ 256 = _________

0	1	2	3										
1	1	1	1										

h) Qual é o valor do logaritmo de 128 na base 1?O que você conclui? Converse com seu colega.

11ª – O professor então apresenta a definição de logaritmo:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Para os números reais positivos a e b, com b ≠ 1, denomina-se logaritmo de a na base b o expoente real x, tal que $b^x = a$.

Comentários: As aulas seguintes serão trabalhadas as consequências e as propriedades operatórias (logaritmo do produto, do quociente e da potência) também associadas às tabelas já formadas por eles. O conteúdo será aplicado em questões contextualizadas. E o gráfico da função logarítmica será abordado com o auxílio do software Geogebra.

Exemplificando:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	177147	531441	1594323

$243 . 27 = 3^5 . 3^3 = 3^{5+3} = 3^8$

$\log_3 243 = 5$ e $\log_3 27 = 3$

Então $\log_3 243. 27 = \log_3 243 + \log_3 27 = 5 + 3 = 8$ Logaritmo do Produto

$243 \div 27 = 3^5 \div 3^3 = 3^{5-3} = 3^2$

$\log_3 243 = 5$ e $\log_3 27 = 3$

Então $\log_3 243 \div 27 = \log_3 243 - \log_3 27 = 5 - 3 = 2$ Logaritmo do Quociente

$243 = 3^5$

$\log_3 243 = 5$ e $\log_3 3 = 1$

$\log_3 243 = \log_3 3^5 = 5 . \log_3 3 = 5 . 1 = 5$ Logaritmo da Potência

Algumas questões contextualizadas que serão trabalhadas (sugestões do Fórum 1):

H58 Resolver problemas envolvendo a função exponencial.

H59 Resolver problemas envolvendo a função logarítmica.

1) O crescimento populacional em condições ideais é regido aproximadamente pela função $P(t) = P_0e^{kt}$, em que t é a variável tempo, k é a taxa de crescimento por unidade de tempo, P_0 é a população inicial e P(t) é a população no instante t. Essa mesma função modela também a decomposição radioativa, sendo que, nesse caso, P_0 é a massa inicial do material radioativo e k depende do material. Considere ln 2 = 0,7 e ln 3 = 1,1; aproximadamente, e julgue os itens que se seguem:

I) Se P0 = 72 e k = 0,1; então ln (P(10)) < 5.

II) Uma cultura com 100 bactérias, inicialmente, reproduz-se em condições ideais e, 12 horas após, existem 400 bactérias. Então, dois dias depois do início da experiência, existirão mais de 21600 bactérias.

III) Uma amostra de material radioativo reduz-se a 3/4 de sua quantidade inicial depois de 33600 anos. Então, é correto afirmar que, após 56000 anos, a sua massa estará reduzida a menos da metade da massa inicial.

2) A população de peixes de um lago é atacada por uma doença e deixa de se reproduzir. A cada semana, 20% da população morre. Se inicialmente havia 400.000 peixes no lago e, ao final da décima semana, restavam x peixes, assinale 10logx . Dado: use a aproximação: log2 aproximadamente 0,3 .

3) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui,desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático: h(t) = 1,5 + log de (t+1) na base 3 com h(t) em metros e t em anos. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 metros de altura, o tempo (em anos) desde o momento da plantação até o do corte foi de:
a)9
b)8
c)5
d)4
e)2

4) Segundo o censo realizado pelo IBGE no ano 2000,a população da cidade de Campina Grande era estimada em torno de 350000 habitantes.De acordo com o senso realizado em 2007, estima-se que a população cresceu 4% nos últimos sete anos.Considerando-se que esse mesmo índice de crescimento populacional seja mantido,em que ano,aproximadamente, a população de Campina Grande atingirá a marca de meio milhão de habitantes?

a)2077

b)2070

c)2063

d)2056

e)2049

5) Em uma determinada cidade a taxa de crescimento populacional e de 4% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população desta cidade irá dobrar, se a taxa de crescimento continuar a mesma?

6) Suponha que o tempo t (em minutos) necessário para ferver água em um forno de microondas seja dado pela função $\mathbf{t(n) = a \cdot n^b}$, sendo ***a*** e ***b*** constantes e ***n*** o número de copos de água que se deseja aquecer.

Número de copos	**Tempo de aquecimento**
1	1 minuto e 30 segundos
2	2 minutos

a) Com base nos dados da tabela , determine os valores de a e b.

Sugestão: use log2 = 0,30 e log3 = 0, 45.

b) Qual é o tempo necessário para se ferverem 4 copos de água nesse forno de micro-ondas?

7) Uma pessoa coloca R$1000,00 , num fundo de aplicação que rende em média,1,5% am.Em quantos meses essa pessoa terá no mínimo R$1400,00?

8) Qual é o pH de uma solução de ácido clorídrico cuja concentração hidrogemônica é de 2.10^{-4}? Dado: log 2= 0,30 e pela definição pH = -log $[H^+]$= - log (2.10^{-4}).

9) Em uma determinada cidade, a taxa de crescimento populacional é de 3% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população desta cidade irá dobrar, se a taxa de crescimento continuar a mesma?

10) Para melhor estudar o Sol, os astrônomos utilizam filtros de luz em seus instrumentos de observação. Admita um filtro que deixe passar da intensidade da luz que nele incide. Para reduzir essa intensidade a menos de 10% da original, foi necessário utilizar n filtros. Considerando log 2 = 0,301, o menor valor de n é igual a:

a) 9

b) 10

c) 11

d) 12

11) A energia nuclear, derivada de isótopos radiativos, pode ser usada em veículos espaciais para fornecer potência. Fontes de energia nuclear perdem potência

gradualmente, no decorrer do tempo. Isso pode ser descrito pela função exponencial na qual P é a potência instantânea, em watts, de radioisótopos de um veículo espacial; P^3 é a potência inicial do veículo; t é o intervalo de tempo, em dias, a partir de $t^3 = 0$; e é a base do sistema de logaritmos neperianos. Nessas condições, quantos dias são necessários, aproximadamente, para que a potência de um veículo espacial se reduza à quarta parte da potência inicial? (Dado: In2=0,693)

a) 336

b) 338

c) 340

d) 342

e) 346

12) Uma droga na corrente sanguínea é eliminada lentamente pela ação dos rins. Admita que, partindo de uma quantidade inicial de Q0 miligramas, após *t* horas a quantidade da droga no sangue fique reduzida a Q(t) = Q0 (0,64) ^t (***elevado*** a t) miligramas. Determine:

a) A porcentagem da droga que é eliminada pelos rins em 1 hora;

b) O tempo necessário para que a quantidade inicial da droga fique reduzida a metade.

3. Avaliação

O professor poderá atribuir 1,5 pontos para os alunos que participaram de maneira plena da atividade, tendo como critério da avaliação os seguintes itens:

Atividade

0,5 – a dupla preencheu as tabelas corretamente (H41).

0,5 – a dupla participou das soluções das questões (H41e H34).

0,5 – a dupla respondeu corretamente ao papel sorteado (H58 e H59).

4. Referências

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA. N. *Matemática ciência e aplicações.* Volume 1. Ensino Médio. São Paulo: Saraiva, 2010. p. 151-181.

Roteiro de Ação 1: *Fractais e os Logaritmos.* 2ª ano. 1º Bimestre. 1º Campo Conceitual. Fundação CECIERJ. Consórcio Cederj. Rio de Janeiro, 2013.

Roteiro de Ação 2: *Matemática Financeira e os Logaritmos.* 2ª ano. 1º Bimestre. 1º Campo Conceitual. Fundação CECIERJ. Consórcio Cederj. Rio de Janeiro, 2013.

Roteiro de Ação 4: *Entendo o gráfico da Função Logarítmica.* 2ª ano. 1º Bimestre. 1º Campo Conceitual. Fundação CECIERJ. Consórcio Cederj. Rio de Janeiro, 2013.

Roteiro de Ação 5: *A Função Logarítmica em Problemas Significativos.* 2ª ano. 1º Bimestre. 1º Campo Conceitual. Fundação CECIERJ. Consórcio Cederj. Rio de Janeiro, 2013.