FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ

COLÉGIO: Colégio Estadual Francisco Varella

PROFESSOR: José Miguel de Castro Citrangulo

MATRÍCULA: 00/0807112-8

SÉRIE: 1º ano – Ensino Médio

TUTOR: Maria Tereza Baierl

PLANO DE TRABALHO SOBRE TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

José Miguel de Castro Citrangulo

Jmiguel1962@hotmail.com

1. Introdução:

- Ensinarei o conteúdo proposto através de aulas participativas e trabalhos em grupos.

- Motivarei o estudo da trigonometria na circunferência trabalhando com fenômenos e funções periódicas, estimulando os alunos a descrevê-las e representa-las de forma escrita e oral.

- Farei com meus alunos uma revisão do que foi estudado no Ensino Fundamental, o conceito de ângulo e suas medidas em graus.

- Apresentarei para meus alunos através do notebook e do data show duas atividades, uma para conhecerem a unidade radiano para arcos e ângulos e outra para construir o ciclo trigonométrico.

Pré-requisitos:

- Noções de periodicidade.

- Conceito de função.

- Arcos e ângulos na circunferência.

- Unidade de medida de arcos e ângulos (graus).

2. Estratégias adotadas no Plano de Trabalho:

O plano de trabalho está distribuído em quatro atividades.

Atividade 1:

Apresentarei aos alunos uma atividade através de uma poesia cujo teor nos remete a exemplos de padrões periódicos de comportamento.

Atividade 2:

Apresentarei aos alunos uma atividade para conhecerem a unidade de medida radiano para arcos e ângulos.

Atividade 3:

Apresentarei aos alunos uma atividade para conhecerem a estrutura do ciclo trigonométrico e visualizar, de forma dinâmica, a representação dos arcos no ciclo trigonométrico.

Atividade 4:

Apresentarei aos alunos uma atividade para relacionarem as unidades de medidas grau e radiano.

Atividade 1: A Matemática é poesia...

- . **Área de conhecimento:**

  Trigonometria.

- **Pré-requisitos:**

  Noções de periodicidade e conceito de função.

- **Tempo de duração:**

  100 minutos.

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

  Folha de atividades, apresentada em arquivo anexo.

- **Organização da turma:**

  Turma disposta em grupos de dois alunos.

- **Objetivos:**

  Apresentar aos alunos uma poesia cujo teor nos remete a exemplos de padrões periódicos de comportamento. Reconhecer padrões periódicos de comportamento que sirvam para exemplificar, e justificar o estudo de funções periódicas. Identificar nas situações do cotidiano padrões periódicos de comportamento.

- **Metodologia adotada:**

  - Entregar a cada grupo a folha de atividades.
  - Orientar a cada grupo para interpretarem a poesia produzida com a utilização de alguns conceitos matemáticos.
  - Explorar o texto e junto com cada grupo encontrar os diversos fenômenos naturais descritos na poesia.
  - Pedir a cada grupo para responder as questões propostas em anexo.
  - Recolher as atividades prontas.

Atividade 2: O que é mesmo esse tal de radiano?

- **Área de conhecimento:**

  Trigonometria.
  .

- **Pré-requisitos:**

  Arcos e ângulos na circunferência.

- **Tempo de duração:**

  100 minutos.

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

  Folha de atividades em anexo, software Geogebra, projetor multimídia e notebook.

- **Organização da turma:**

  Turma disposta em grupos de dois alunos.

- **Objetivos:**

  Conhecer a unidade de medida radiano para arcos e ângulos.

- **Metodologia adotada:**

  - Entregar a cada grupo a folha de atividades com a sequência de passos para serem seguidos no software Geogebra.
  - Abrir o software Geogebra no notebook junto com o data show.
  - Mostrar para os alunos passo a passo no Geogebra o ângulo e arco de medida 1 radiano.
  - Pedir a cada grupo para seguir a sequência de passos da folha de atividades em anexo no notebook.
  - Orientar a cada grupo que esta nova unidade de medida radiano é para arcos e ângulos.

Atividade 3: Construindo o ciclo trigonométrico

- **Área de conhecimento:**

  Trigonometria.

  .

- **Pré-requisitos:**

  Arcos e ângulos na circunferência; unidades de medida de arcos ângulos (graus e radianos).

- **Tempo de duração:**

  100 minutos.

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

  Folha de atividades em anexo, software Geogebra, projetor multimídia e notebook.

- **Organização da turma:**

  Turma disposta em grupos de dois alunos.

- **Objetivos:**

  Conhecer a estrutura do ciclo trigonométrico; visualizar, de forma dinâmica, a representação dos arcos no ciclo trigonométrico.

- **Metodologia adotada:**

  - Entregar a cada grupo a folha de atividades com a sequência de passos para serem seguidos no software Geogebra.
  - Abrir o software Geogebra no notebook junto com o data show.
  - Orientar a cada grupo que o ciclo trigonométrico é uma circunferência de raio unitário com centro na origem do sistema de eixos cartesianos.
  - Mostrar para os alunos no Geogebra toda a sequência de passos e construir o ciclo trigonométrico.
  - Pedir a cada grupo para seguir a sequência de passos da folha de atividades em anexo no notebook.

- Incentivar cada grupo a mexer no programa, a fim de buscar novos conhecimentos.

Atividade 4: Transformando grau em radiano ou vice-versa

- **Habilidade relacionada:**

  H21 – C1 e C2 - Transformar grau em radiano ou vice-versa.

  .

- **Pré-requisitos:**

  Conhecer as unidades de medidas de ângulos, grau e radiano.

  Noções de regra de três simples.

- **Tempo de duração:**

  100 minutos.

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

  Folha de atividades e calculadora comum.

- **Organização da turma:**

  Turma disposta em grupos de dois alunos.

- **Objetivos:**

  Apresentar aos alunos, a relação entre as unidades grau e radiano.

- **Metodologia adotada:**

  - Entregar a cada grupo a folha de atividades em anexo e a calculadora.

  - Orientar a cada grupo para fazer a transformação de grau para radiano através de uma regra de três simples, como o exemplo abaixo:

  $180° \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \pi$

  $\alpha \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ x$

- Orientar a cada grupo para fazer a transformação de radiano para grau através de uma regra de três simples, como exemplo abaixo:

180° ____________ π rad

x ____________ α

- Mostrar a cada grupo um método mais prático para transformar radiano para grau, substituindo π por 180°.
- Pedir a cada grupo para resolver as atividades em anexo.
- Recolher as atividades prontas.

Anexos das atividades 1, 2, 3 e 4:

Atividade 1: A Matemática é poesia...

Pôr do Sol Trigonométrico

Pôr do sol.

Oscila a onda
Baixa a maré
Vem o pôr do sol
A noite cai
O pêndulo marca a hora
Chega a onda sonora
Os fenômenos sucedem-se em ritmos amenos
Os ciclos repetem-se com simetria
O cientista estudou
E tudo são senos e co-senos
Da trigonometria

Maria Augusta Ferreira Neves

1. O texto acima faz alusão a diversos fenômenos naturais que se manifestam, segundo a autora, em ritmos amenos. Em sua opinião, todos os fenômenos descritos no verso acima são de fato periódicos? Justifique.

2. A natureza de um fenômeno dito periódico reside no fato de que conhecendo um ciclo completo de sua manifestação podemos prever todo o comportamento deste fenômeno, em qualquer momento. Cite dois fenômenos do texto acima que são periódicos.

3. Você seria capaz de fornecer três exemplos de outros fenômenos físicos que possuem essa propriedade?

4. Pesquise sobre algum fenômeno que possa servir de exemplo para ilustrar fenômenos periódicos.

Atividade 2: O que é mesmo esse tal de radiano?

1. Abra uma tela do *GeoGebra*.
2. Trace uma circunferência clicando no botão (6º menu de botões). Dessa forma, você construirá uma circunferência de centro A e que passa pelo ponto B. Logo, podemos considerar o segmento *AB* como sendo o raio dessa circunferência.
3. Marque o segmento *AB:*
   - Clique no botão (3º menu de botões)
   - Clique nos pontos A e B.

   Pronto! O segmento *AB* está marcado.
4. Vamos medir o segmento AB?
   - Clique no botão (8º menu de botões)
   - Clique sobre o segmento *AB* .
   - Surgirá a expressão *a* = ... no canto esquerdo da tela (Janela da Álgebra).
   - Clique em (1º menu de botões).

Agora, você pode mover os pontos livres do seu desenho. Clique no ponto B e movimente-o. Repare que o raio da circunferência variará à medida que você altera a posição do ponto B.

• Observe o que acontece para os valores de *a*.

Note que esse valor indica exatamente o tamanho do raio da circunferência.

5. Marque agora um ponto C sobre a circunferência: clique em (2º menu de botões); em seguida, clique em um ponto sobre a circunferência distinto de B.
6. Marque o segmento *AC.* Caso tenha dúvidas consulte o item 3 acima.

Qual a medida de *AC?* Ela é a mesma de *AB?* Por quê?

Com os três pontos A, B e C é possível traçar ângulos. Estamos interessados no ângulo cujo vértice é o ponto A, ou seja, o centro da circunferência. Esse ângulo BÂC determina sobre a circunferência o arco *BC.* ÄB

Vamos construir esse arco.

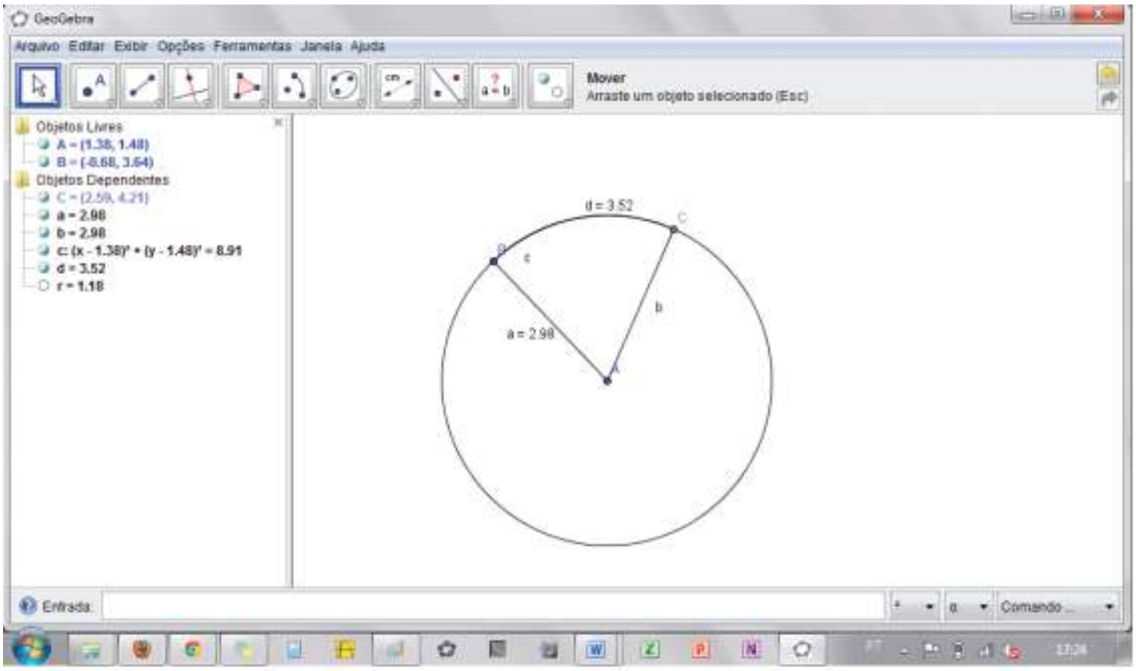
Clique no botão (6º menu de botões), e, sequencialmente, em A, B e C.

Surgirá o arco *BC* indicado por d. Observe no canto esquerdo da tela, na "Janela da Álgebra", que aparece associada ao objeto "d" uma medida, que indica o comprimento do arco *BC,* ou seja, a medida linear desse arco.

7. Vamos agora usar a relação que define o radiano, calculando a razão r entre o comprimento do arco e o do raio da circunferência.

Digite na caixa Entrada (parte inferior da tela) r=d/a seguido de ENTER.

Na Janela de Álgebra (parte esquerda da tela) você verá o resultado *r* = ..., que indicará o valor da razão.r $=\frac{d}{a}$. Repare que, conforme a definição, r é a medida em radianos do ângulo BAC e do arco *BC.*



Tela do Geogebra

8. Experimente agora fazer C variar.

O que acontece com os valores de r?

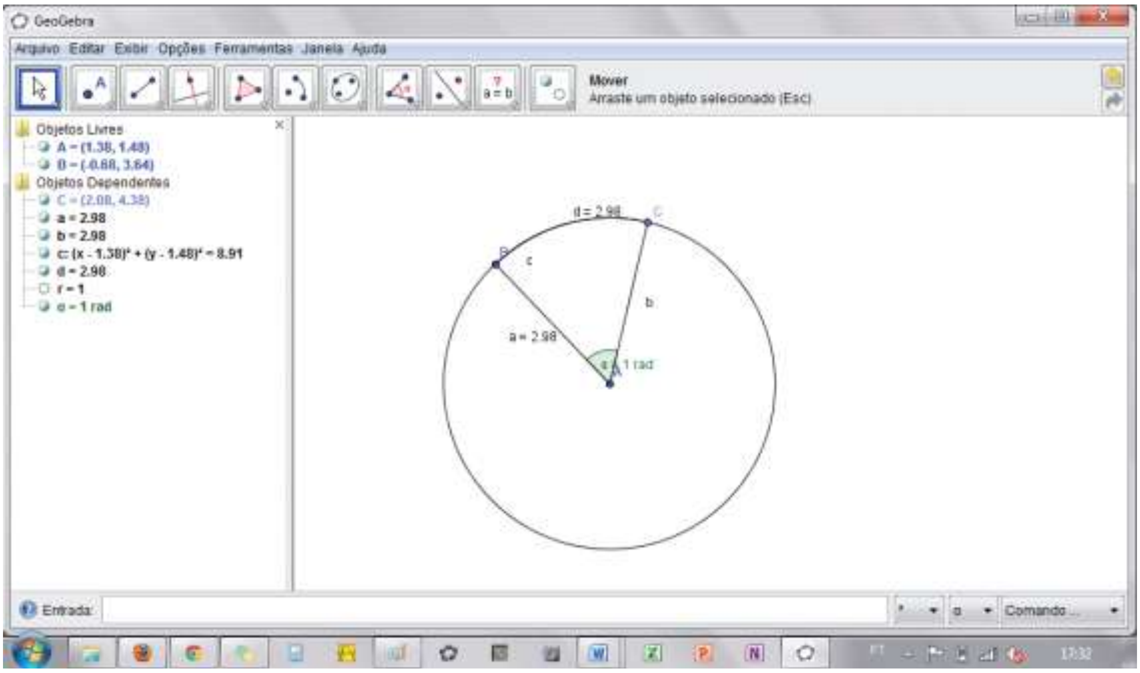
9. Tente colocar o ponto C numa posição tal que o comprimento do arco □*BC* seja exatamente o valor do raio da circunferência, inçados na janela da álgebra por *a* e *b*. O que acontece com o valor de r? Observe na janela de Álgebra.

É isso mesmo, vale 1! E sabe o que isso significa?

Que o arco □*BC* tem medida 1rad, assim como o ângulo central *BÂC* também tem medida 1rad.

10. O *GeoGebra* também tem uma ferramenta para medir ângulos em graus ou em radianos. Vamos usá-la para medir o ângulo *BÂC?*

Clique no botão (8º menu de botões) e a seguir, sequencialmente, nos pontos B, A e C – você passará a ver a medida do ângulo *BÂC* em graus. Vamos mudar a unidade para radianos? No menu *Opções/Unidade de medida de ângulos* selecione *radianos* e observe a medida do ângulo *BÂC* .



Tela do *GeoGebra*.

Como já sabíamos, este é o ângulo de 1rad e o arco de medida angular 1rad.

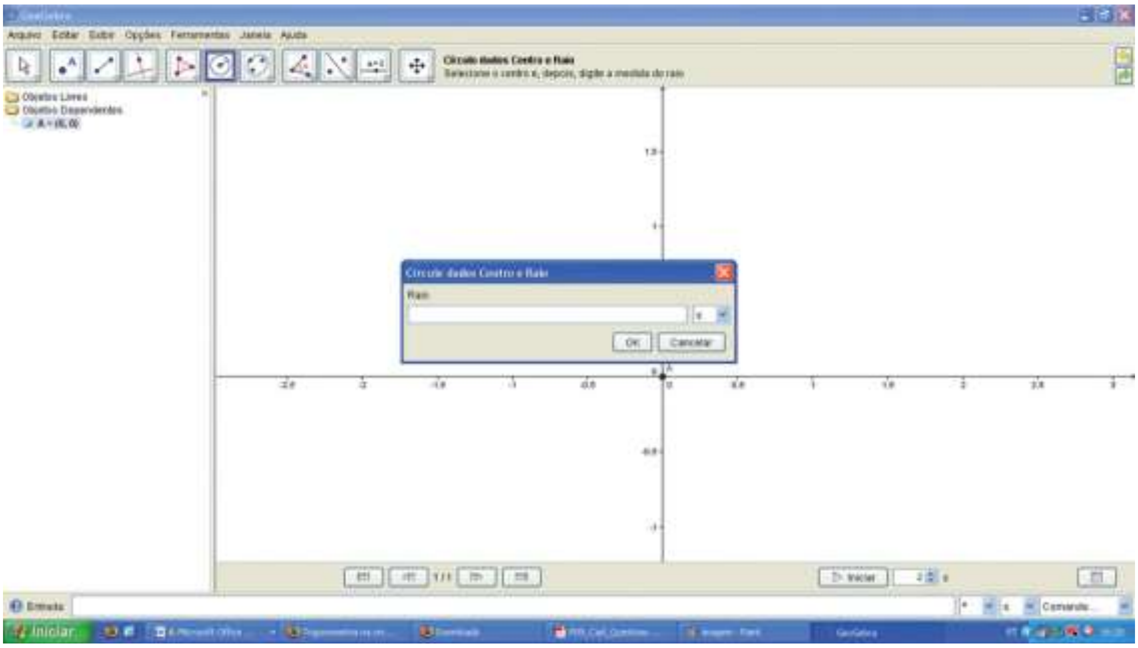
Atividade 3: Construindo o ciclo trigonométrico.

Vamos usar o *Geogebra* novamente para construir o ciclo trigonométrico?

Bem, o ciclo trigonométrico é uma circunferência de raio unitário com centro na origem do sistema de eixos cartesianos. Vamos construir isso.

Abra uma tela nova no *GeoGebra* e verifique se os eixos cartesianos estão aparentes. Caso não estejam, acesse o menu "Exibir/ Eixos" para que eles apareçam.

Agora, no 6º menu de botões, clique no botão – círculo dado centro e raio – e clique primeiro na origem do sistema de eixos cartesianos (0,0) e, na caixa de diálogo que aparece, digite 1 para medida do raio da circunferência.

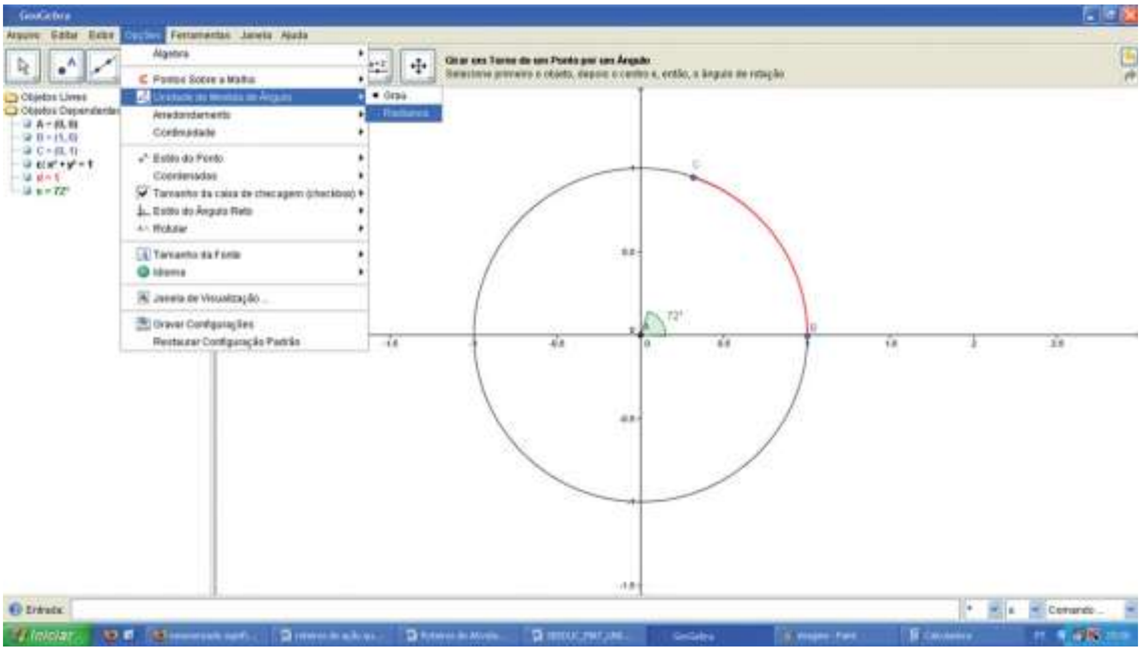


Tela do *GeoGebra.*

a) Quais os pontos de intersecção entre a circunferência e os eixos coordenados?

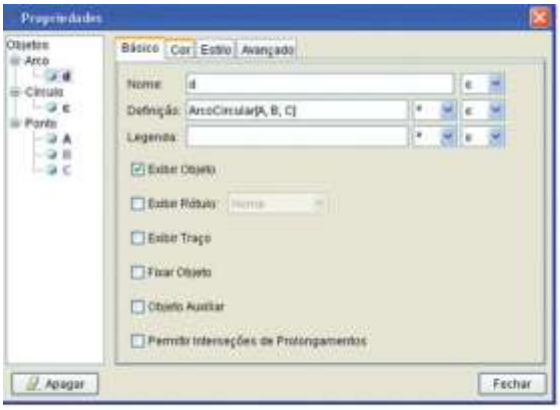
Os arcos no ciclo trigonométrico são orientados, ou seja, têm origem e extremidade. A origem desses arcos é no ponto (1,0) e a extremidade é em qualquer ponto do círculo trigonométrico.

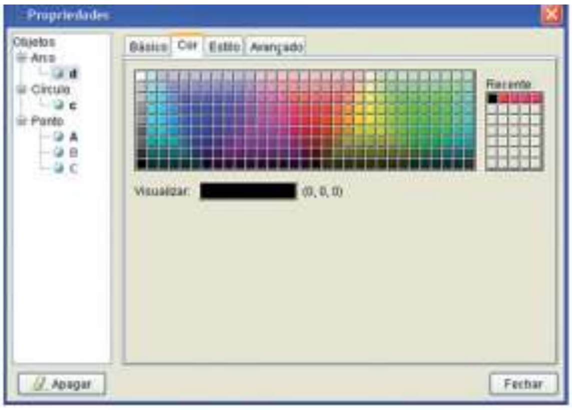
Vamos visualizar um arco no ciclo trigonométrico? Clique no botão – 2º menu de botões – e clique nos pontos (0,0) e (1,0) – o *GeoGebra* os nomeará como A e B, respectivamente – e em um outro ponto qualquer do círculo, que o software chamará de C. O arco *BC* é um arco no ciclo trigonométrico. Vamos traçá-lo? Clique no botão, disponível no 6º menu de botões, e sequencialmente nos pontos A, B e C – respectivamente centro, origem e extremidade do arco que desejamos traçar. Observe que na Janela da Álgebra aparece um elemento novo *d* = ... Podemos ainda editar o arco *BC*, fazendo com que ele se torne mais visível... Para isso, clique com o botão direito do mouse em d. Vai abrir-se uma janela de opções; nela, selecione a opção “propriedades”.



Tela do Geogebra

Aparece uma caixa de diálogo, mostrada na figura abaixo. Selecione a aba “cor” e escolha a cor vermelha; na aba “estilo”, selecionando espessura da linha 3,5 e a seguir em fechar. Agora o arco *BC* aparece mais grosso e na cor vermelha, facilitando a visualização.





Caixas de diálogo do *GeoGebra*.

b) Posicione o ponto C de maneira que se tenha $d = 1$. Quais as coordenadas do ponto C?

c) Agora reposicione o ponto C de maneira que suas coordenadas sejam *(-0,8; 0,6)*. Qual o valor de *d*?

d) Em que quadrante deverá ficar o ponto C tal que se tenha $d = 4$?

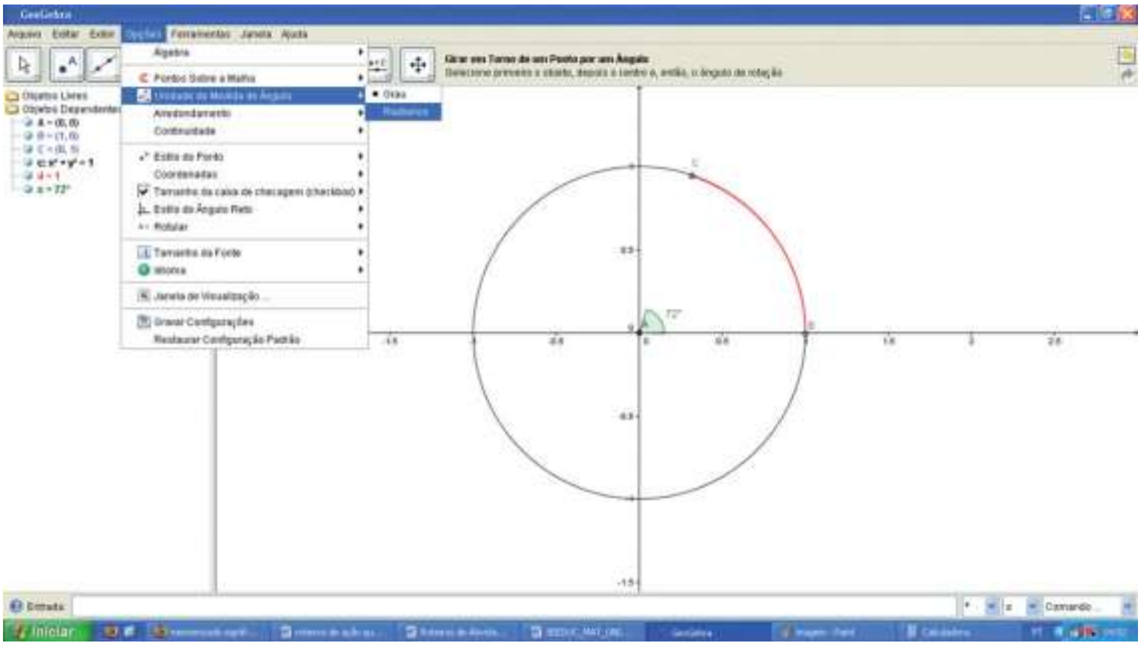
e) Escolha coordenadas para o ponto C de maneira que ele fique no quarto quadrante. Qual o valor de d para as coordenadas que você escolheu?

f) Quanto vale *d* quando C está sobre cada um dos pontos de intersecção do círculo com os eixos cartesianos?

Vamos medir o arco *BC?* O *GeoGebra* facilita este trabalho! O botão, disponível no 8º menu de botões, permite que determinemos a medida do ângulo $B\hat{A}C$. Clique, nesta ordem, nos pontos B, A e C e veja a medida desse ângulo. Ela provavelmente está dada em graus, que é a unidade de medida padrão para ângulos no *GeoGebra*.

g) Indique a medida do ângulo $B\hat{A}C$, em graus, em cada um dos itens *b*, *c*, *d* e *e* acima.

Podemos mudar a unidade de medida de ângulos do *GeoGebra* para radianos. Para isso, acesse o menu “opções/unidade de medida de ângulo”, selecionando a unidade “radianos”.



Tela do *GeoGebra.*

h) Refaça o item g acima, agora indicando a medida do ângulo $B\hat{A}C$ em radianos.

i) Relacione as medidas em radianos encontradas no item *h* com o valor *d* em cada um dos itens *b, c*, *d* e *e* acima. O que você observa?

A medida de um arco no ciclo trigonométrico, em radianos, é equivalente à medida do comprimento do arco, indicado por *d* em nossa construção.

Atividade 4: Transformando grau em radiano ou vice-versa

1) Exprima em radianos:

a) 60º

b) 15°

c) 75º

d) 225º

e) 240°

2) Exprima em graus:

a) $\frac{\pi}{4}$ rad.

b) $\frac{2\pi}{3}$ rad.

c) $\frac{\pi}{6}$ rad.

d) $\frac{5\pi}{6}$ rad.

e) $\frac{5\pi}{3}$ rad.

3) Disponha em ordem crescente as seguintes medidas de ângulo:

$\frac{7\pi}{12}$ rad, 50°, π rad, $\frac{4\pi}{9}$ rad, 90°

3. Avaliação:

Descritores avaliados em todas as atividades.

H21 – C1 e C2 - Transformar grau em radiano ou vice-versa.

- Avaliar cada grupo de acordo com sua participação em cada aula.

- Avaliar as atividades desenvolvidas em sala de aula.

- Avaliar se os objetivos descritos em cada aula foram alcançados pela turma.

4. Referências:

Currículo Mínimo. Secretaria Estadual de\Educação. 2012. Disponível em: WWW.rj.gov.br/web/seeduc/exibeconteudo?article-id=759820

Acesso em setembro de 2012.

Roteiros de Ação – Trigonometria na circunferência – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio – 3º bimestre/2012
http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/acessado em setembro/2012

MATEMÁTICA CIÊNCIAS E APLICAÇÕES, 2 ENSINO MÉDIO/Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida – 2ª Edição – São Paulo

Atual Editora 2004