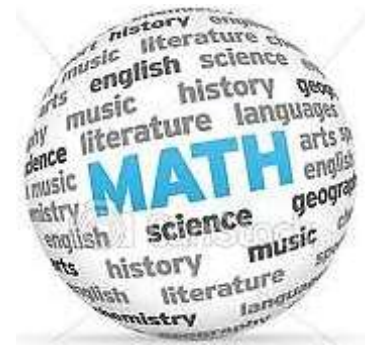
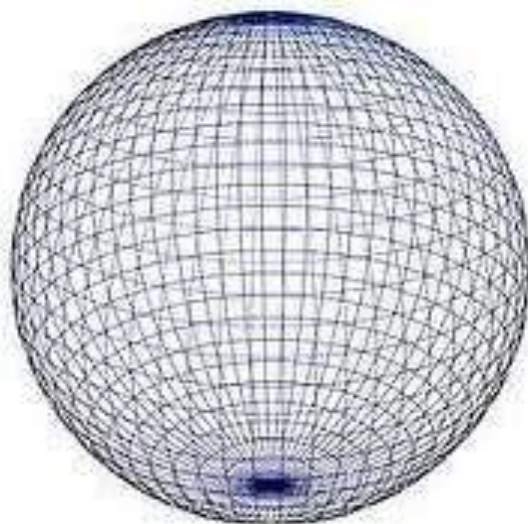


# Formação continuada em Matemática

## Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 2º ano / 4º Bimestre/ 2012

# ESFERA



### TAREFA 4:

Cursista: Vanessa de Souza Machado

Matrícula: 00/0974440-0

Tutor: Deivis de Oliveira Alves

# SUMÁRIO

Introdução.....	3
Desenvolvimento.....	4
Avaliação.....	13
Fonte de Pesquisa.....	14

# INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem por objetivo permitir que os alunos primeiramente diferencie uma figura plana de uma figura não plana. A partir de suas observações e construções reconheça os elementos que compõem os sólidos geométricos e aprofunde seus estudos nesse momento na Esfera.

Geralmente os alunos apresentam dificuldades na parte da Geometria inclusive na parte da geometria espacial seja pela dificuldade em se entender os desenhos e as formas ou até pelas complexidades e não compreensão das fórmulas.

Para a totalização do plano, serão necessários nove tempos de cinquenta minutos para desenvolvimento dos conteúdos juntamente com a avaliação da aprendizagem.

# DESENVOLVIMENTO

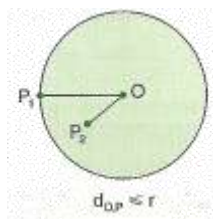
## ATIVIDADE 1 – Conceituando esfera e seus elementos

- HABILIDADE RELACIONADA: Apresentação de sólido geométrico / Identificação e localização de seus elementos e de partes que constituem uma esfera.
- PRÉ-REQUISITOS: Círculo e circunferência.
- TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos
- RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Quadro, data show e caderno.
- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.
- OBJETIVOS:
  - Compreender o conceito de esfera.
  - Definir e localizar os elementos de uma esfera
  - Reconhecer elementos de uma esfera como: pólos, equador, paralelo e meridiano.
- METODOLOGIA ADOTADA: Através da utilização de slides iniciar o estudo sobre esferas definindo conceitos e discriminando seus elementos.

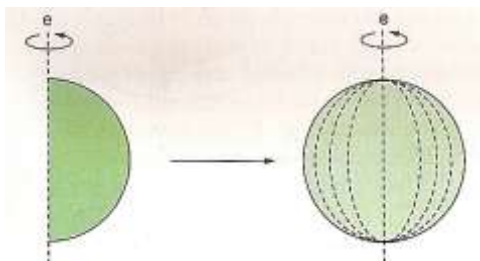
### Conceitos

#### Esfera

Consideremos um ponto  $O$  e um segmento de medida  $r$ . Chama-se **esfera** de centro  $O$  e raio  $r$  o conjunto de pontos  $P$  do espaço, tais que a distância  $OP$  seja menor ou igual a  $r$ .



A esfera é o sólido de revolução gerado pela rotação completa de um semicírculo em torno de um eixo que contém um diâmetro.



Passarei em slides o

conceito e outros conteúdos

sobre esfera. Espera-se que este momento seja de interação com a turma para possíveis questionamentos.

# O estudo geométrico da Esfera

<http://www.>

Veronica Machado

Consideremos um ponto  $O$  e um segmento de medida  $r$ . Chama-se **esfera** de centro  $O$  e raio  $r$  o conjunto de pontos  $P$  do espaço, tais que a distância  $OP$  seja menor ou igual a  $r$ .

A **esfera** é o sólido de revolução gerado pela rotação completa de um semicírculo em torno de um eixo que contém um diâmetro.

## Superfície esférica

Superfície esférica de centro  $O$  e raio  $r$  é o conjunto dos pontos  $P$  do espaço que distam  $r$  do ponto  $O$ .

A superfície gerada pela rotação de uma semicircunferência em torno de um eixo que contém o diâmetro é uma superfície esférica.

Veronica Machado

## Elementos

Considerando a superfície de uma esfera de eixo  $e$ , temos:

- pólos são as interseções da superfície com o eixo;
- equador é a seção (circunferência) perpendicular ao eixo, pelo centro da superfície;
- paralelo é qualquer seção (circunferência) perpendicular ao eixo, é "paralela" ao equador;
- meridiano é qualquer seção (circunferência) cujo plano passa pelo eixo.

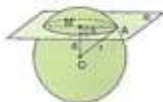
Veronica Machado

## Paralelos

## Meridianos

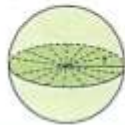
### Seção da esfera

Toda seção plana de uma esfera é um círculo.  
Sendo  $r$  o raio da esfera,  $d$  a distância do plano secante ao centro e  $s$  o raio da seção, vale a relação:



$$s^2 = r^2 - d^2$$

Se o plano secante passa pelo centro da esfera, temos como seção um **circulo máximo** da esfera.



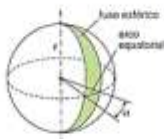
Vanessa Machado



### Partes da esfera

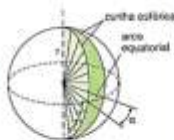
#### Fuso esférico

Se uma semicircunferência com as extremidades num eixo gira  $\alpha$  graus ( $0^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ ) em torno do eixo, ela gera uma superfície que é chamada **fuso esférico**.



#### Cunha esférica

Se um semicírculo com o diâmetro num eixo gira a  $\alpha$  graus ( $0^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ ) em torno do eixo, ele gera um sólido que é chamado **cunha esférica**.



Vanessa Machado

Você certamente já partiu uma laranja em 4 ou mais pedaços. Foi o que fiz com essa laranja. Eu a parti em 4 grandes pedaços e depois a saboreei e por fim eu a "escaneei" para colocá-la aqui, planificada. Pois é assim que fica um globo quando o partimos em muitas fatias, em muitos "fusos"....e os estendemos no plano.



### AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE 1:

*Avaliação Informal:* Citar objetos que se assemelhem a uma esfera e realizar comparações com os elementos da esfera e partes de uma esfera.

*Avaliação Formal:* No caderno propor uma atividade:

1- Suponha que se consiga cortar uma laranja esférica em doze gomos idênticos, de modo que apareça como corte, um gomo completo. O gomo constitui uma cunha esférica, enquanto a parte da casca constitui um fuso esférico. Como há doze iguais, quanto mede o ângulo de cada fuso?

## ATIVIDADE 2 – Área e volume

HABILIDADE RELACIONADA: **H25** Resolver problemas envolvendo noções de volume./ Resolver problemas com noções de área.

- PRÉ-REQUISITOS: Reconhecimento de uma esfera e seus elementos.
- TEMPO DE DURAÇÃO: 200 minutos
- RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: quadro, data show e caderno.
- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual
- OBJETIVOS:
  - Calcular a área e o volume de uma esfera e de suas partes.
- METODOLOGIA ADOTADA: A partir das orientações e discussões coletivas aplicar as fórmulas para o cálculo de área e volume da esfera.

Ainda utilizando o data show como ferramenta de trabalho continuarei apresentando outros slides.

**Áreas e volumes**  
As fórmulas que veremos a seguir serão apresentadas sem as respectivas deduções, pois estas exigem conhecimentos de cálculo diferencial e integral, assuntos vistos em cursos de ensino superior.

**Área da superfície esférica**  
A área de uma superfície esférica de raio  $r$  é igual a  $4r^2$

$$A = 4 \pi r^2$$

**Volume da esfera**  
O volume de uma esfera de raio  $r$  é igual a  $\frac{4}{3}r^3$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Vanessa Machado

### Área do fuso

Note que, quanto maior for o ângulo  $\alpha$ , maior será o fuso correspondente; a área do fuso é diretamente proporcional a  $\alpha$ . Assim, podemos estabelecer as seguintes regras de três simples:

• Para  $\alpha$  em graus

$$\left. \begin{array}{l} 360^\circ \text{ --- } 4\pi r^2 \\ \alpha^\circ \text{ --- } A_{\text{fuso}} \end{array} \right\} A_{\text{fuso}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90}$$

• Para  $\alpha$  em radianos

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \text{ rad --- } 4\pi r^2 \\ \alpha \text{ rad --- } A_{\text{fuso}} \end{array} \right\} A_{\text{fuso}} = 2r^2 \alpha$$

### Volume da cunha

Note que, quanto maior for o ângulo  $\alpha$ , maior será o volume da cunha correspondente; o volume da cunha é diretamente proporcional a  $\alpha$ .

Assim, podemos estabelecer as seguintes regras de três simples:

• Para  $\alpha$  em graus

$$\left. \begin{array}{l} 360^\circ \text{ --- } \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \alpha^\circ \text{ --- } A_{\text{cunha}} \end{array} \right\} A_{\text{cunha}} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270}$$

• Para  $\alpha$  em radianos

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \text{ rad --- } \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \alpha \text{ rad --- } A_{\text{cunha}} \end{array} \right\} A_{\text{cunha}} = \frac{2r^3 \alpha}{3}$$

## AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE 2:

*Avaliação Informal:* Promover uma discussão sobre quando deve-se calcular a área e quando deve-se calcular o volume. Exemplo: Para calcular a quantidade de cobertura de um bombom (noção de área), para se calcular a capacidade de recheio de um bombom (noção de volume) etc.

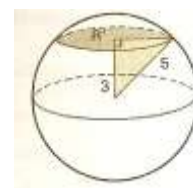
*Avaliação Formal:*

### Exercícios sobre Esfera

1- (FFT) Considere a Terra como uma esfera de raio 6.370km. Qual é sua área superficial? Descobrir a área da superfície coberta de água, sabendo que ela corresponde a aproximadamente 3/4 da superfície total.



2- Uma esfera de 5 cm de raio é seccionada a 3 cm do centro. Determine a área da seção plana obtida.



3- (CESGRANRIO-RJ) Uma laranja pode ser considerada uma esfera de raio R, composta por 12 gomos exatamente iguais. A superfície total de cada gomo mede:



a)  $2\pi R^2$     b)  $4\pi R^2$

c)  $\frac{3\pi}{4} R^2$     d)  $3\pi R^2$

e)  $\frac{4}{3} \pi R^2$

4-(UFPA-PA) O círculo máximo de uma esfera mede  $6\pi$  cm. Qual o volume da esfera?

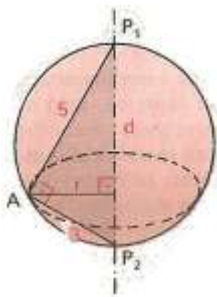


- a)  $12\pi \text{ cm}^3$     b)  $24\pi \text{ cm}^3$   
 c)  $36\pi \text{ cm}^3$     d)  $72\pi \text{ cm}^3$   
 e)  $144\pi \text{ cm}^3$

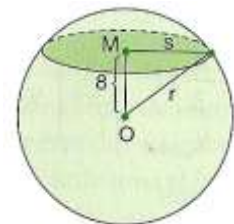
5-(UFPI-PI) Uma esfera com área de superfície igual a  $36\pi \text{ m}^2$  tem um volume de:

- a)  $36\pi \text{ m}^3$     b)  $52\pi \text{ m}^3$   
 c)  $108\pi \text{ m}^3$     d)  $216\pi \text{ m}^3$

6- Determinar a área do círculo da esfera cujas distâncias polares são de 5 cm e 3cm.



7- Uma esfera é seccionada por um plano a 8 cm do centro; a seção obtida tem área  $36\pi \text{ cm}^2$ . Determine a área da superfície da esfera e seu volume



8- (EEM-SP) Calcule o volume de chocolate que deverá ser utilizado para a cobertura de um bombom, supondo que a espessura dessa cobertura tenha 0,5 cm e que o recheio seja uma esfera com diâmetro igual a 3 cm.

---

### ATIVIDADE 3 – Curiosidades

---

HABILIDADE RELACIONADA: Apresentação do estudo geométrico de uma esfera questionando a menor distância entre dois pontos nessa superfície.

- PRÉ-REQUISITOS: Conhecimentos básicos sobre esfera
- TEMPO DE DURAÇÃO: 150 minutos

- RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Data show, folha com leitura complementar e caderno.
- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Grupos
- OBJETIVOS:
  - Promover reflexões e ampliar o conhecimento acerca do conteúdo sobre esferas.
- METODOLOGIA ADOTADA: Com a utilização de vídeos e posteriormente pesquisa sobre o tema promover a reflexão sobre como se calcular a menor distância entre dois pontos numa superfície esférica.

Finalizando a apresentação dos slides abaixo, passarei alguns vídeos sobre o tema.





Antes de apresentar a solução deste enigma, discutir com a turma possíveis soluções.



- **Leitura complementar:**



Riemann,

## O Grande Filósofo da Geometria

Qual a menor distância entre dois pontos? O leigo (porque é leigo) dirá que é a medida do segmento de reta com extremidades nesses pontos. Mas, e se se trata de dois pontos A e B sobre uma superfície esférica (da Terra por exemplo) e se procura o menor caminho de um ao outro sobre essa superfície? Ora, se os pontos estão perto um do outro, então o segmento de reta AB pode fornecer uma boa aproximação; caso contrário (pode-se provar), a resposta é o menor dos arcos do círculo máximo da esfera por esses dois pontos. Questões como essas levam às seguintes indagações: não seria importante uma geometria intrínseca da superfície esférica, em vez de considerá-la tão somente como uma parte do espaço tridimensional euclidiano? O mesmo não é válido

para outras superfícies?

A resposta afirmativa parece óbvia. No entanto, a geometria euclidiana reinava de maneira tão absoluta até as primeiras décadas do século XIX que nem sequer se cogitava dessas questões. Immanuel Kant (1724 – 1804), o mais respeitado filósofo do século XVIII, apoiava suas idéias numa suposta verdade inquestionável dessa geometria. Em

1826 Lobachevsky golpeou fatalmente o mito da unicidade da geometria euclidiana, mas por motivos vários, seu trabalho não alcançou grande repercussão nos primeiros tempos. De qualquer maneira, isso não bastava; era preciso buscar uma visão global da geometria, através de idéias gerais, em espaço de dimensão qualquer. Inclusive o quadro das geometrias não euclidianas se completaria como subproduto dessa abordagem. Quem brilhantemente inaugurou esse trabalho foi G. F. Bernhard Riemann (1826-1866).

Filho de um pastor luterano, Riemann nasceu na aldeia de Breselens, Hanover, na Alemanha. Além da pobreza, teve de lutar sempre contra a timidez e a fragilidade física. Aos 19 anos de idade, atendendo a orientação paterna, ingressava na Universidade de Göttingen para estudar filosofia e teologia. Mas sua vocação prevaleceu e acabou cursando matemática, o primeiro ano em Göttingen, transferindo-se depois para Berlim. De volta a Göttingen, obtém em 1851 o título de doutor, sob a orientação de Gauss, com uma tese que introduz as hoje chamadas *superfícies de Riemann*.

Sua carreira acadêmica foi rápida: em 1859 já sucedia Dirichlet na cadeira de matemática de Göttingen. Em 1862, um mês após seu casamento, adoece gravemente; os quatro anos seguintes passou-os em tratamentos. E morreu na Itália, ainda sem completar 40 anos, onde procurava um clima melhor para inutilmente combater sua tuberculose. Nessas condições não é de estranhar que a obra matemática de Riemann não seja vasta; mas é uma das mais importantes em todos os tempos pelos novos e produtivos campos que abriu.

Dos mais inovadores é um trabalho seu em 1854 sobre os fundamentos em que se baseia a geometria. Nele aparece a importante distinção entre “infinito” e “ilimitado”, que no futuro teria papel importante na teoria da relatividade. Por exemplo, os círculos máximos de uma esfera são finitos (percorrendo-os sempre se volta ao ponto de partida) mas ilimitados (pode-se percorrê-los indefinidamente). Daí a uma geometria sem retas paralelas não vai muito. Isso, contudo, exige dois outros afastamentos da geometria euclidiana para evitar contradições: que as “retas” sejam finitas (porém ilimitadas) e que eventualmente possam se cruzar em mais de um ponto.

Mas haverá alguma superfície cuja geometria intrínseca corresponda a tais imposições? Sim, a superfície esférica (por exemplo), tomando como “retas” os círculos máximos (que sempre se interceptam em dois pontos). Dois resultados dessa geometria podem ser visualizados na figura: “a soma dos ângulos de um triângulo é maior que  $180^\circ$ ” e “todas as perpendiculares a uma mesma ‘reta’ cortam-se num ponto”.

Enfim a Geometria estava totalmente livre.

### AVALIAÇÃO DA ATIVIDADE 3:

*Avaliação Informal:* Em grupos redigir um breve comentário do que entenderam sobre a aula.

*Avaliação Formal:* Realizar alguns exercícios propostos pelo livro didático do aluno.

# AVALIAÇÃO

A Avaliação acontece em todas as aulas planejadas de maneira formal e informal. O aluno pode ser avaliado de maneira qualitativa e quantitativa.

- ✓ Na atividade 1 a avaliação vem de encontro ao item: - Identificar elementos de uma esfera raciocinando sobre uma situação problema a partir de informações sobre a parte de uma esfera como é proposto no Currículo Mínimo 2012.
- ✓ Na atividade 2 a avaliação vem de encontro ao item: - Calcular a área e volume de esferas com ou sem a apresentação de fórmulas como são propostos no Currículo Mínimo 2012.
- ✓ Na atividade 3 a avaliação vem de encontro aos itens: - Instigar a curiosidade acerca do tema e reflexão sobre a geometria não euclidiana e resolver situações problema que envolvam o conhecimento sobre esfera como proposto no Currículo Mínimo 2012.

## FONTE DE PESQUISA:

- Currículo Mínimo 2012 de Matemática do Governo do Estado do Rio de Janeiro;
- Matriz do Saerjinho 2012;
- Roteiros de ação Cone e Pirâmide – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2012  
<http://projetoeduc.cecierj.edu.br/> acessado em 23/11/2012;
- MATEMATICA IEZZI, Volume único/Gelson IEZZI – 4º Edição – São Paulo:Atual, 2007;

### **Endereços eletrônicos acessados entre 21/11/2012 e 27/11/2012**

<http://www.youtube.com/>