Formação Continuada em Matemática

Matemática 9º Ano – 2º bimestre/2013

Grupo 01

Equações do 2° Grau

Tarefa 01
Cursista: Silvana de Andrade e Silva
Tutor (a): Emílio Rubem Batista

Sumário

Introdução

A proposta do deste trabalho é levar o aluno a perceber como a resolução de equações data de um período muito distante e que surgiu como uma necessidade e não por mero acaso. Uma das formas de se alcançar este objetivo é utilizando a História da Matemática.

O trabalho é composto por três atividades. Nas atividades 1 e 2 os alunos participam da construção do seu conhecimento ao passo que vai executando as atividades propostas nos roteiros de atividade 1 e 3.

Como a turma na qual o trabalho vai ser aplicado é de EJA por problemas técnicos o roteiro 3 não será todo aplicado.

A atividade 3 insere o conteúdo e explicita a fórmula para resolver uma equação do segundo grau assim como algumas propriedades das suas raízes.

Para o desenvolvimento do presente trabalho foi necessário revisar pré-requisitos como resolução de equações algébricas e produtos notáveis.

Atividade 1 – Estudando problemas com duas soluções possíveis

Duração prevista: 100 minutos
Área de conhecimento: Matemática
Assunto: Equação do 2º grau
Objetivos: Construir o conceito de Equação do 2° grau através da interpretação de problemas com duas soluções possíveis.
Pré-requisitos: Cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica.
Material necessário: Folha de atividade
Organização da classe: Turma organizada em pequenos grupos (3 a 4 alunos), propiciando trabalho organizado e colaborativo.
Descritores associados:
H48 – Resolver situações-problema envolvendo equação do 2º grau.
H52 – Resolver problemas com números reais envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).

Metodologia:

I- Um pouco da História da Matemática:

Entre 780 e 859 d. C., viveu um matemático e astrônomo persa-muçulmano de grande importância para o desenvolvimento da Matemática, chamado Al-Khwarizmi. Seu trabalho serviu de base para que o sistema de numeração hindu (usado por nós até hoje) e a álgebra árabe chegassem à Europa.
Em seu livro sobre álgebra, datado de 820, Al-Khwarizmi utilizava equações para resolver problemas de herança, processos legais e de comércio, medição de terra, escavação de canais, entre outras situações vivenciadas no cotidiano. Este livro recebeu o nome de Hisab al-jabr w'al-muqabala (A arte de reunir desconhecidos para igualar ao conhecido). O nome Al-Jabr deu origem a palavra álgebra.

Atividades

A - Vamos ver um dos problemas proposto no livro Al-jabr:

"Dividir 10 em duas partes de modo que a soma dos produtos obtidos, multiplicando cada parte por si mesma, seja igual a 58."

Neste momento é necessário que o professor ajude os alunos a interpretarem o problema e entender o cálculo matemático que existe por traz dele. Então, pode-se explorar inicialmente o texto do problema para depois, juntamente com seus alunos, encontrar uma possível solução.

1. Ler o problema proposto com bastante atenção. Então, você conseguiria pensar em dois números naturais que dividam o número 10 em duas partes? Quais seriam esses números?

2. Apresente a soma da multiplicação de cada parte por si mesma.

3. Deu 58?

Nesse momento o professor pode dar como exemplo para seus alunos um par de números que não seja solução do problema e, junto com eles, faça os cálculos.
Esse primeiro contato com exemplos numéricos é de grande importância para que eles entendam a representação algébrica do problema. Deixe claro para seus alunos, que essa representação é importante para perceber que não é tão simples encontrar, através de tentativas e erros, o par de números procurado.
Se você ainda não conseguiu encontrar o par de números que desejamos, não desanime. Realmente não é algo tão simples. Mas vamos tentar mais um pouco. Afinal, não são tantos os pares de números possíveis.

4. Com a ajuda de seus colegas e de seu professor, faça novas tentativas até encontrar o par de números que procuramos. Registre suas tentativas no espaço a seguir.

5. Agora que você encontrou o par de números procurado, vamos representar esse problema por meio de uma equação. Que equação seria essa? Reflita com seus colegas e registre as conclusões:

Para chegar à equação, mostre o passo a passo a seguir para os seus alunos:

Chamando de x e y os números naturais que dividem 10 em duas partes, temos:

$$x + y = 10 \quad (i)$$
$$x^2 + y^2 = 58 \quad (ii)$$

Da equação (i), obtemos:

$$y = 10 - x$$

Substituindo na equação (ii):

$\Rightarrow x^2 + (10 - x)^2 = 58$
$\Rightarrow x^2 + 100 - 20x + x^2 = 58$
$\Rightarrow 2x^2 - 20x + 42 = 0$

⇒ $x^2-10x+21=0$

6. Vamos testar a solução na equação encontrada? Ou seja, substitua a incógnita x pelos números que você encontrou (um de cada vez) e verifique se a igualdade da equação é verdadeira. Registre suas conclusões.

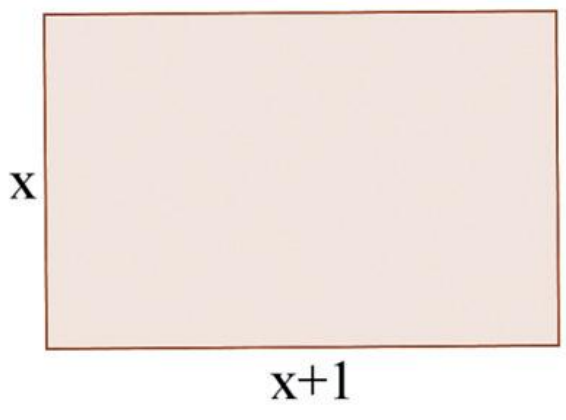
O professor deverá explicar para seus alunos que o par de números 3 e 7 são as soluções da equação e, portanto, esta é uma representação na forma algébrica para a solução do problema proposto no livro Al-jabr.

Deixar claro para os alunos que as equações do tipo ax2+bx+c=0, onde a, b, c são números reais e a é diferente de zero são conhecidas como equações do 2° grau e que esse tipo de equação pode ter até duas soluções.

Vamos pensar agora em outro problema que também envolve uma equação de 2º grau de uma forma um pouco diferente da que você viu acima?

Uma sala de aula retangular tem 20m² de área. Qual a medida de cada lado dessa sala, se a medida da base supera a medida da altura em 1m?

7 - Desenhe uma figura que represente a situação do problema descrito acima. Junte-se aos seus amigos para pensar e desenhe a seguir a figura que vocês conceberam!



8. Você consegue descobrir a medida dos seus lados? Tente vários números até conseguir, assim como fez para o problema anterior. Registre suas tentativas no espaço a seguir.

Os alunos deverão encontrar os valores 5m e 4m para as medidas da base e da altura da sala retangular, respectivamente.

9. Agora, assim como no problema anterior, escreva a forma algébrica da área dessa sala retangular. Discuta sobre isso com seus colegas e registre que tipo de equação você encontrou.

Nesse momento, pretende-se que o aluno comece a pensar em como escrever uma situação-problema desse tipo usando uma equação do 2° grau. Deixe-os tentarem até chegar à seguinte equação referente ao problema.

10. Agora, substitua o valor de x, que você encontrou para a altura desse retângulo, na equação do 2° grau que acabou de encontrar. O que aconteceu?

11. Você acha que essa equação pode ser considerada representação, na forma algébrica, do problema de área descrito acima? Justifique sua resposta.

Atividade 2 – Completando os quadrados

Duração prevista: 100 minutos
Área de conhecimento: Matemática
Assunto: Equação do 2º grau
Objetivos: Resolver um problema modelado por uma equação do 2° grau, utilizando o método "completar quadrados".
Pré-requisitos: Cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica; cálculo da área de figuras planas; resolução de equações do 1° grau; conceito de equações do 2° grau; e produtos notáveis.
Material necessário: Folha de atividade.
Organização da classe: Turma organizada em pequenos grupos (3 a 4 alunos), propiciando trabalho organizado e colaborativo.
Descritores associados:
H48 – Resolver situações-problema, envolvendo equação do 2º grau.
H52 – Resolver problemas com números reais, envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).
H05 [C4] – Identificar a conservação ou modificação de medidas de áreas de quadriláteros ou triângulos.

Metodologia:

Neste roteiro, buscamos apresentar aos alunos o método de resolução de uma equação do 2° grau, proposto por Al-Khwarizmi, conhecido como "completar quadrados".
Você se lembra do famoso matemático e astrônomo Al-Khwarizmi que comentamos no primeiro roteiro? Então, ele propôs um interessante método para resolver equações do 2° grau, conhecido hoje em dia como "Completar quadrados".
Vamos conhecê-lo? Para isso, que tal pensarmos em uma nova situação-problema?

Senhor Ricardo quer construir uma caixa d'água nova para sua casa. Ele quer que essa nova caixa tenha a base quadrada, altura de 1m e que sua superfície (sem a tampa) tenha 5m² de área total. Mas, não sabe qual o tamanho da base quadrada que deve tomar. Vamos ajudá-lo a construir essa caixa d'água?

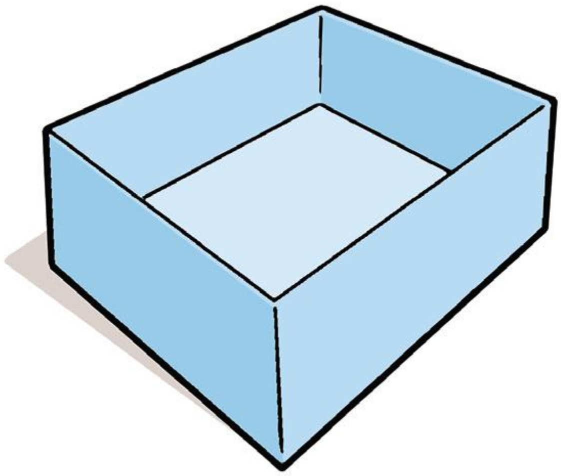


Figura I: Caixa d'água que senhor Ricardo deseja construir

1. Você saberia como calcular a área total da superfície dessa caixa? Converse com seus colegas e descubra junto com eles! Registre as conclusões.

2. Você acha que a Figura II abaixo pode lhe auxiliar na tarefa de calcular essa área? De que forma?

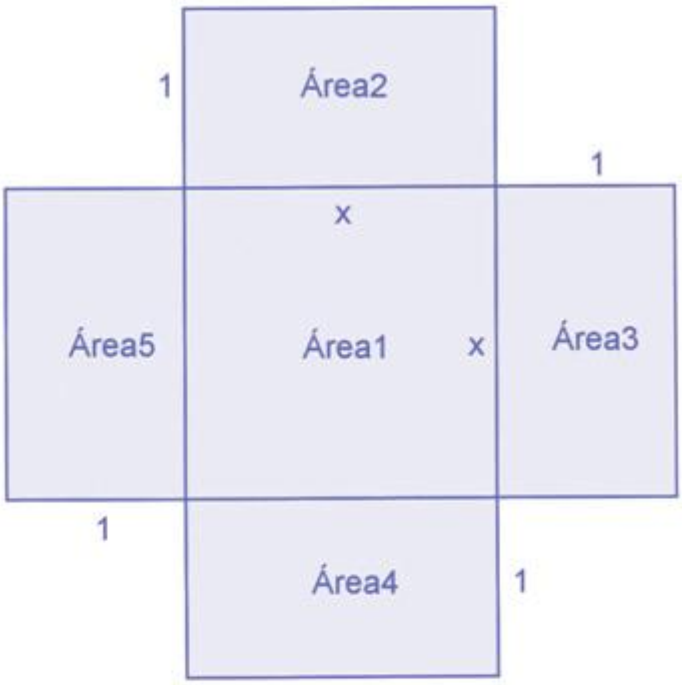


Figura II: Imagem planificada da caixa d'água.

A partir da Figura II, você deve ter observado que se "desmontássemos" a caixa d'água obteríamos uma figura como essa. Para calcular sua área total bastaria somar as áreas 1, 2, 3, 4 e 5.

3. Com essas informações, escreva a expressão algébrica que representa a área total dessa caixa d'água? Junte-se com seus colegas para pensar e registre-a a seguir!

Aqui, com essas questões, a intenção é que os alunos observem que nessa situação podemos decompor o sólido geométrico em figuras planas. E da mesma forma que nos roteiros anteriores, podemos calcular a área total da sua superfície, somando a área das figuras planas que o compõe. Com isso, eles devem obter a seguinte representação algébrica para essa área:

$$\text{Área total} = \text{Área 1} + \text{Área 2} + \text{Área 3} + \text{Área 4} + \text{Área 5}$$

Sabemos que Senhor Ricardo pretende que a caixa d'água tenha superfície de $5m^2$ de área total, logo:

$$x^2 + 1.x + 1.x + 1.x + 1.x = 5 \Rightarrow x^2+4x - 5=0$$

O importante nessa etapa é conduzir o pensamento dos alunos a construírem a solução do problema. Questione-os e instigue-os até conseguirem construir a equação do segundo grau acima.

4. Você saberia dizer qual o tipo de equação que você encontrou?

5. Até quantas soluções podemos encontrar para esse problema? Justifique sua resposta.

Espera-se que os alunos reconheçam a equação $x^2+4x- 5=0$ como uma equação do 2° grau e percebam que, por isso, podem obter até duas soluções para esse problema.

Atividade 3 – Resolvendo Equações do 2º Grau.

Duração prevista: 100 minutos
Área de conhecimento: Matemática
Assunto: Equação do 2º grau
Objetivos: Resolver equações do 2º grau através de uma fórmula.
Pré-requisitos: Cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica, produtos notáveis.
Material necessário: Folha de atividade
Organização da classe: Turma organizada em pequenos grupos (3 a 4 alunos), propiciando trabalho organizado e colaborativo.
Descritores associados:
H48 – Resolver situações-problema envolvendo equação do 2º grau.
H52 – Resolver problemas com números reais envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).

Metodologia:

I – Formalização da Resolução de Equações do 2º Grau:

Uma equação do 2º grau da forma $ax^2+bx+c = 0$ pode ter até 2 soluções (raízes) reais, que podem ser determinadas através de uma fórmula.
Como se chegou até a fórmula de resolução de equações do 2º grau?
Considerando a equação: $ax^2+bx+c=0$, observe:
Multiplicando todos os termos por 4a teremos

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$
$$4a^2x^2+4abx=-4ac$$

Somando b^2 aos dois membros temos

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$$

Fatoramos o lado esquerdo e chamamos de Δ (delta) os termos do lado direito da igualdade, b^2-4ac, obtém-se:

$$(2ax+b)^2 = \Delta$$
$$\sqrt{(2ax+b)^2} = \sqrt{\Delta}$$
$$2ax+b = \pm\sqrt{\Delta}$$
$$2ax = -b\pm\sqrt{\Delta}$$
$$x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Logo, a equação possui as seguintes soluções:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Através dessa fórmula é possível determinar as soluções de uma equação do segundo grau.

Propriedades do discriminante (Δ) :

$\Delta > 0$	Duas raízes reais e diferentes
$\Delta = 0$	Duas raízes reais e iguais
$\Delta < 0$	Nenhuma raiz real

Relações entre coeficientes e raízes

Dado a equação ax²+bx+c=0, suas raízes ou soluções, são:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

A soma das raízes de uma equação do 2º grau é dada por:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Daí $S = -\frac{b}{a}$

O produto das raízes será:

$$x_1.x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} . \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Logo, o produto das raízes de uma equação do 2º grau é dado por:

$$P = \frac{c}{a}$$

Atividades:

1) Dentre os números -2, 0, 1, 4, quais deles são raízes da equação x^2-2x-8= 0?

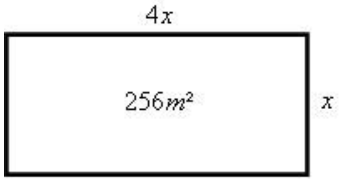
2) O número -3 é a raiz da equação x^2 - 7x - 2c = 0. Nessas condições, determine o valor do coeficiente c:

3) Se você multiplicar um número real x por ele mesmo e do resultado subtrair 14, você vai obter o quíntuplo do número x. Qual é esse número?

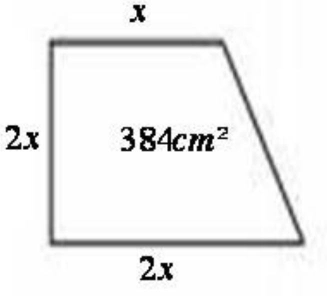
4)Determine quais os valores de k para que a equação $2x^2 + 4x + 5k = 0$ tenha raízes reais e distintas.

5)Calcule o valor de p na equação $x^2 – (p + 5)x + 36 = 0$, de modo que as raízes reais sejam iguais.

6)Um retângulo possui a medida de seu lado maior igual ao quádruplo do lado menor, e área medindo 256 m². Determine a medida de seus lados.



7)Um trapézio possui área medindo 384 cm². Temos que a medida da altura é o dobro da medida da base menor, e que a base maior possui a mesma medida da altura. Determine o comprimento da base maior, base menor e altura desta figura.



Avaliação

A avaliação do conteúdo consistirá de atividades que contemplem as habilidades previstas no curriculum mínimo. As atividades propostas no plano de trabalho já contarão como uma avaliação para investigar em que nível de raciocínio a turma se encontra, pois a avaliação não deve ser quantitativa e sim qualitativa.

Os grupos de trabalho deverão comentar quais foram os seus maiores desafios na execução da tarefa, principalmente no que se refere ao trabalho em grupo.

Referências Bibliográficas

Atividades Sobre equações do segundo grau. Disponível em <http://educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/relacionando-geometria-equacoes-2-o-grau.htm > Acesso 11de mai. 2013.

Curriculum Mínimo. Disponível em: <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=7> Acesso em 12 de mar. 2013.

Conteúdo sobre Equações do 2º grau. Disponível em <http://www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/equacoes-do-2-grau/equacao-do-2-grau-1.php> Acesso em 12 de mai. 2013.

Formação Continuada. Campo conceitual 1: Equação do Segundo Grau. Amarrando as ideias. Disponível em: <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=7> Acesso em 11de mai. 2013.

Formação Continuada. Campo conceitual 1: Equação do Segundo Grau. Roteiro de Atividades 1. Disponível em: <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=7> Acesso em 11de mai. 2013.

Formação Continuada. Campo conceitual 1: Equação do Segundo Grau. Roteiro de Atividades 3. Disponível em: <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=7> Acesso em 11de mai. 2013.