

## **FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ

COLÉGIO: CIEP 457 DR. JOSÉ ELIAS MELLO DOS SANTOS

PROFESSOR: NEI MACIEL CALDAS

MATRÍCULA: 0950467-1

SÉRIE: 3ª série do E.M.

TUTOR(A): LEANDRO MENDONÇA DO NASCIMENTO

### **AVALIAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DO PT-1**

#### **PONTOS POSITIVOS**

- mostra a importância e a necessidade da criação de um novo conjunto numérico para resolver equações do 2º grau com discriminante negativo.
- auxilia na análise das correntes elétricas residenciais.
- extremamente importante no desenvolvimento tecnológico.
- o estudo dos números complexos de forma contextualizada, buscou a problematização deste conteúdo e a motivação.

#### **PONTOS NEGATIVOS**

- pouco interesse por parte dos alunos nas operações entre números complexos.
- dificuldade na interpretação da linguagem abstrata dos números complexos.

#### **IMPRESSÃO DOS ALUNOS**

- interessados pelo enfoque da matemática contextualizada.
- desperta a atenção e o interesse dos alunos para a resolução de equações do 2º grau com delta negativo.

- associação de tal conceito ao seu dia-a-dia, tornando o processo de ensino aprendizagem mais interessante e construtivo.

## **MELHORAS A SEREM IMPLEMENTADAS ( ALTERAÇÕES )**

- Comentaria na introdução sobre a importância do aprendizado dos números complexos, devido a sua utilização na Engenharia Elétrica, assim como, a sua grande importância no desenvolvimento tecnológico.

- No desenvolvimento acrescentaria os seguintes recursos: utilização da sala de vídeo para mostrar alguns vídeos interativos sobre a história e a importância dos números complexos; laboratório de informática para mostrar aos alunos o cálculo das correntes elétricas residenciais por meio dos números complexos, juntamente com o professor de Física da turma. Essa aula representaria um prática bem sucedida dentro da escola.

## **PLANO DE TRABALHO SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS**

**(Total de aulas: 12 tempos)**

### **1-INTRODUÇÃO**

Em 1539, Cardano ( Girolamo Cardano, 1501-1576) convenceu Tartaglia ( Niccolò Fontana Tartaglia, 1499-1557) a revelar seu método de resolver equações cúbicas. Ao começar a estudar a fórmula de Tartaglia, Cardano se deparou com raízes de números negativos. Escreveu para Tartaglia, relatando suas dificuldades com tais raízes, mas Tartaglia, arrependido de ter revelado sua fórmula, recusou-se a ajudá-lo.

Em 1543, Cardano descobriu, ao tomar conhecimento do trabalho de Del Ferro ( Scipione del Ferro, 1465-1526), que Tartaglia não havia sido o único a descobrir a fórmula para resolver as equações cúbicas. Assim, publicou em 1545 sua obra *Ars Magna*, na qual revelava a solução de equações cúbicas e quárticas. Cardano e Del Ferro foram creditados pela descoberta, e Tartaglia ficou furioso.

Bombelli ( Rafael Bombelli, 1526-1572) estudou profundamente o trabalho de Cardano, principalmente os casos irreduzíveis das equações cúbicas, que levaram a raízes de números negativos. Foi o primeiro matemático a definir as regras de adição e multiplicação para raízes de números negativos. Com suas regras, a fórmula de Cardano-Tartaglia funcionava perfeitamente em qualquer

caso, o que o deixava seguro de seus resultados. Foi o primeiro a dar alguma importância aos números complexos.

Ao longo dos anos, cada matemático que tratava a questão dos números complexos o fazia de um modo diferente. Coube ao suíço Euler ( Leonhard Euler, 1707-1783), num trabalho de 1777, mas só publicado em 1794, definir a raiz quadrada de -1 como sendo “i”, de forma que  $i^2 = -1$ . Essa mesma notação foi depois usada pelo alemão Gauss ( Johann Karl Friedrich Gauss, 1777-1855) em 1801, e, dada a sua autoridade, essa notação acabou tornando-se padrão.

A grande obra a favor dos números complexos apareceu em 1831, na qual Gauss inventou o termo “números complexos”. Nesse trabalho, ele apresentou uma detalhada explicação de como os números complexos poderiam ser desenvolvidos segundo uma teoria exata, apoiada na representação desses números no plano cartesiano. Gauss já visualizava os números complexos dessa forma desde 1811.

Finalmente, em 1837, Hamilton ( Sir Wiliam Rowan Hamilton, 1805-1865) galgou o último degrau dessas descobertas reconhecendo os números complexos como um par ordenado de números reais (a, b) e reescrevendo as definições geométricas de Gauss na forma algébrica.

Atualmente, os números complexos são utilizados de diversas maneiras: nas aplicações de matrizes à computação gráfica; na Engenharia Elétrica, através dos circuitos de corrente alternada das instalações elétricas residenciais; nos movimentos em fluidos como ar e água; na aerodinâmica, dentre outras.

## 2-DESENVOLVIMENTO

Como ponto de partida no desenvolvimento desse plano de trabalho, será mostrado aos alunos um vídeo interativo relatando um pouco da História dos Números Complexos, conforme descrito na introdução.

O conjunto C é um conjunto cujos elementos – os números complexos – devem ser tais que possam ser somados e multiplicados, e também possibilitem a extração da raiz quadrada de um número negativo. Logicamente, os números reais precisam ser elementos desse conjunto C, e as operações de adição e multiplicação feitas sobre os números reais no conjunto C devem ser as mesmas já conhecidas.

Será feita a definição desse conjunto, mostrando a proposta de Gauss em 1831 e reforçada por Hamilton em 1837, segundo o qual o conjunto dos números complexos é um conjunto de pares ordenados de números reais, em que estão definidas: Igualdade :  $(a,b) = (c,d)$  se somente se  $a = c$  e  $b = d$ ; Adição :  $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$  e Multiplicação :  $(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad +$

bc). Nas operações de adição e multiplicação serão satisfeitas as seguintes propriedades: Adição (comutativa, associativa, elemento neutro e inverso aditivo ou oposto); Multiplicação (Comutativa, Associativa, Elemento neutro, inverso multiplicativo e multiplicação distributiva em relação à adição).

A unidade imaginária dos números complexos será representada pelo símbolo "i", e será identificado com o número complexo  $(0, 1)$ . Será mostrado que  $i^2 = i \cdot i = (0,1)(0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1$ . Com isso,  $i^2 = -1$ . Um número complexo terá sua forma algébrica ou forma binomial representada por  $Z = a + bi$ , com  $a$  e  $b$  pertencentes aos reais e  $i^2 = -1$ . Nessa forma algébrica, temos: parte real de  $Z = a$  e parte imaginária de  $Z = b$ . Será escrito também a equivalência:  $(a,b) = a + bi$ .

Na representação geométrica dos números complexos, iremos associar a cada número complexo  $Z = a + bi$  o ponto  $P$  do plano de coordenadas  $a$  e  $b$ , isto é,  $P(a,b)$ . O plano cartesiano no qual estão representados os números complexos é denominado plano complexo ou plano de Argand-Gauss. Dizemos que o ponto  $P(a,b)$  é o afixo do número complexo  $a + bi$ . Nessa representação, não podemos deixar de informar as seguintes informações: a) os números complexos reais pertencem ao eixo  $Ox$ ; b) os números imaginários puros pertencem ao eixo  $Oy$ ; c) os demais números complexos pertencem aos vários quadrantes, de acordo com os sinais de  $a$  e  $b$ ; d) para cada número complexo existe um único ponto do plano e vice-versa.

Dando sequência ao plano de estudo, será dada a definição de conjugado de um número complexo, assim como, a divisão de números complexos. Até porque, esses dois itens estão diretamente ligados. Em seguida, será definido o módulo de um número complexo, que geometricamente, é a distância da origem do sistema de coordenadas  $O$  ao afixo de  $Z$ . Através do teorema de Pitágoras pode-se concluir que o módulo de  $Z$  representa a raiz quadrada da soma dos quadrados das partes real e imaginária do número complexo.

### **3-AVALIAÇÃO**

Serão adotados 3 instrumentos de avaliação: um teste valendo 3,0 pontos; um trabalho de pesquisa sobre a História dos Números Complexos e suas aplicações valendo 3,0 pontos e uma prova de valor 4,0 pontos.

Sobre o trabalho de pesquisa, a turma será dividida em grupos de 5 alunos, perfazendo um total de 6 grupos (30 alunos). A pesquisa deve conter obrigatoriamente: capa, introdução, desenvolvimento, conclusão e bibliografia. Os itens a serem pesquisados serão: os matemáticos responsáveis que deram origem aos números complexos e as aplicações dos números complexos nos dias atuais.

As questões inseridas nas avaliações serão:

1- Calcule  $x$  e  $y$ , para que seja verificada a igualdade:  $(3x, -4) + (y, x+y) = (2, -3)$

2- Dados os números complexos:  $Z' = (1, 2)$ ;  $Z'' = (-1, 3)$ ;  $Z''' = 2, -2$ , calcule o valor de  $(Z''')^2 + (Z''')^2 - (Z')^2$

3- Mostre que os números complexos  $Z' = 1 + i$  e  $Z'' = 1 - i$  são as soluções da equação  $z^2 - 2z + 2 = 0$ .

4- Determine o valor de  $x$ , real, para que o número complexo  $(x^2 - x) + 3i$  seja um número imaginário puro.

5- Efetue a operação indicada, escrevendo o resultado na forma algébrica  $Z = a + bi$ .

$$(-2 + 3i) + (1 - 2i) + (3 - 5i)$$

6- Num mesmo plano complexo, localize os pontos correspondentes aos seguintes números complexos:

$Z_1 = -3 + 3i$ ,  $Z_2 = 1 + 4i$ ,  $Z_3 = 2i$ ,  $Z_4 = -4i$ ,  $Z_5 = 2 - 3i$ ,  $Z_6 = 3$  e  $Z_7 = -4$

7- Determine o conjugado do complexo  $Z = -4 + 2i$

8- Efetue a divisão:  $(2 + 3i)/(1 + 2i)$

9- Calcule o módulo do número complexo:  $(2 + 3i)^2/i$

10- Determine uma equação do 2º grau que, em  $\mathbb{C}$ , tenha como raízes  $-5 + 2i$  e  $-5 - 2i$ .

11- Qual número complexo, na forma algébrica, deve ser usado para se conseguir uma rotação de  $180^\circ$  anti-horário?

12- Dado  $AB$ , lado de um triângulo equilátero  $ABC$ , com  $A(2, 1)$  e  $B(6, 3)$ , obtenha o vértice  $C$  sabendo que ele pertence ao 1º quadrante.

13- Seja a função  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   $f(z) = 13z^2 - 24z + 13$ . Expresse  $f(z)$  na forma de um produto de fatores do 1º grau com coeficientes complexos.

14- Considere os números complexos  $Z$  que satisfazem a condição:

$$|Z + 6 - 8i| = 15$$

Represente geometricamente  $Z$  e identifique o afixo de  $Z$  cujo módulo é mínimo.

15- (UFMT-2002) O número complexo  $Z = a + bi$  é representado geometricamente por um ponto  $P(a, b)$  no plano de Argand-Gauss que se denomina afixo. Seja  $Z = 2 + 3i$  e  $Z'$  seu conjugado. Os afixos de  $Z$ ,  $Z'$ ,  $-Z$  e  $-Z'$ ,

representados no plano de Argand-Gauss, são os vértices de um quadrilátero Q. Determine o perímetro de Q.

#### **4-REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

MORGADO, Augusto César et alii, Trigonometria e números complexos. Rio de Janeiro, SBM, 1992. (Coleção do Professor de Matemática.)

DAVIS, Harold T. Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula. São Paulo, Atual, 1992.

DANTE, Luiz Roberto, Matemática, volume único: livro do professor, 1.ed. São Paulo, Ática, 2005