Formação Continuada Em Matemática

Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 2º Ano – 3º Bimestre / 2012

Plano de Trabalho

Matrizes e Determinantes

Tarefa 1
Cursista: Eunice Augusta da Silva
Tutor: Ana Paula

SUMARIO

INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem o objetivo de orientar aos alunos quanto ao conteúdo Matrizes e Determinantes em situações algébricas e rotineiras. Seu desenvolvimento tem o objetivo de fixar o conhecimento utilizando atividades práticas e lúdicas construídas e desenvolvidas com a participação e percepção dos alunos da abrangência e importância do assunto.

As matrizes são utilizadas diariamente em diversas situações cotidianas, por este motivo é essencial que o aluno consiga compreender sua aplicabilidade e associar com assuntos rotineiros, evitando simplesmente "decorar" como resolver problemas prontos.

Serão abordadas situações-problemas e exemplos que estimulem a descoberta pelo próprio aluno do conceito. Serão propostas atividades que necessitam de conhecimento de calculo de porcentagem e em função disto, será necessário reservar um tempo para relembrar este assunto. Além de sugerir a utilização de recursos gráficos para a fixação do conceito. Serão necessários nove tempos de cinquenta minutos para o desenvolvimento dos conteúdos mais um tempo para realização de avaliação.

DESENVOLVIMENTO

Aula 1 e 2

HABILIDADE RELACIONADA: H33 - Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes.

PRÉ-REQUISITOS: -

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folha, Quadro Branco, Projetor

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Em duplas.

OBJETIVOS:
Apresentar o conceito de matriz e suas aplicações. Conceituar e representar. Classificar os tipos de matrizes. Mostrando aos alunos a importância do tema que será estudado e sua aplicabilidade em assuntos do cotidiano.

METODOLOGIA ADOTADA:
Apresentar aos alunos através de figuras expositivas levando o aluno a visualizar como é possível organizar dados em linhas e colunas dispostas ordenadamente.

O professor deverá iniciar a aula, com argumentos que levem o aluno a visualizar a existência de formas matriciais de informação e consolidação de dados. Muitas vezes, para designar com clareza certas situações, é necessário formar um grupo ordenado de números que se apresentam dispostos em linhas e colunas numa tabela. Em Matemática, essas tabelas são chamadas de matrizes. Com o advento da computação e acrescente necessidade de guardar muita informação, as matrizes adquiriram uma grande importância. Para termos uma ideia dessa importância, basta saber que o que vemos na tela do computador é uma enorme matriz, e cada valor guardado nas linhas e colunas da matriz representa um ponto colorido mostrado na tela (pixel).

Poderá citar outros exemplos como informações em jornais, revistas e na própria internet organizadas em forma de tabelas, com linhas e colunas.

Se possível, expor via projetor ou mesmo cartaz a informação sobre um pouco de história, conforme abaixo:

Um pouco de história

As matrizes teriam surgido com a escola inglesa Trinity College, em um artigo do matemático Arthur Cayley (1821-1895), datado de 1858. Vale lembrar, no entanto, que, bem antes, no século III a. C., os chineses já desenvolviam um processo de resolução de sistemas lineares em que aparecia implícita a ideia de matrizes.

Cayley ciou as matrizes no contexto de estrutura algébrica, sem pensar em suas aplicações prática que apareceriam posteriormente.

INTRODUÇÃO

O professor irá propor o seguinte problema:

Em uma editora, a venda de livros de matemática, Física e Química no primeiro trimestre de um ano pode ser expressa pela tabela a seguir:

	JANEIRO	*FEVEREIRO*	*MARÇO*
MATEMÁTICA	20.000	32.000	45.000
FISICA	15.000	18.000	25.000
QUIMICA	16.000	17.000	23.000

Questionar aos alunos:
- Quantos livros de Matemática foram vendidos em fevereiro ?
- Quantos livros de Física foram vendidos em janeiro ?
- Quantos livros de Química foram vendidos em março ?

Deixar que os alunos observem a tabela proposta e concluam:
- Para saber quantos livros de matemática foram vendidos em Fevereiro, basta olharmos o número que está na primeira linha e na segunda coluna;
- Para saber quantos livros de Física foram vendidos em Janeiro, basta olharmos o número que está na segunda linha e na primeira coluna;
- Para saber quantos livros de Química foram vendidos em Março, basta olharmos o número que está na terceira linha e na terceira coluna;

O professor deverá complementar utilizando material expositivo, como quadro branco ou projetor.

A definição que uma tabela deste tipo, em que os números estão dispostos em 3 linhas e 3 colunas, denominam-se matriz 3 x 3 (lê-se três por três) e podemos representá-las por:

$$\begin{pmatrix} 20.000 & 32.000 & 45.000 \\ 15.000 & 18.000 & 25.000 \\ 16.000 & 17.000 & 23.000 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 20.000 & 32.000 & 45.000 \\ 15.000 & 18.000 & 25.000 \\ 16.000 & 17.000 & 23.000 \end{bmatrix}$$

DEFINIÇÃO

Sejam m e n números naturais não nulos.

Uma matriz do tipo m x n é uma tabela de m . n números dispostos em m linhas (filas horizontais) e n colunas (filas verticais).

Exemplo:

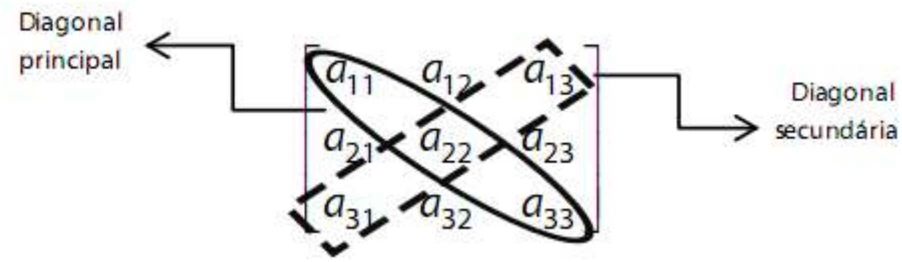
$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 2 (dois por dois)

- O elemento que está na linha 1, coluna 1, é $a_{11}= 2$
- O elemento que está na linha 1, coluna 2, é $a_{12}=3$
- O elemento que está na linha 2, coluna 1, é $a_{21}=5$
- O elemento que está na linha 2, coluna 2, é $a_{22}=1$

$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 3 x 3 (três por três)

Há diferentes tipos de matrizes. Podemos diferenciá-las pela ordem ou por outras características.

- **Matriz quadrada** – aquela que têm o número de linhas igual ao número de colunas. Numa matriz quadrada, os elementos aij , tais que i = j, constituem a diagonal principal. Os elementos aij tais que i+j=n+1 compõem a diagonal secundária.



- **Matriz identidade** – matriz quadrada de ordem n (nxn) em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e todos os demais são nulos.
- **Matriz diagonal** – matriz em que todos os elementos que não pertencem à diagonal principal são nulos. A matriz identidade é um exemplo de uma matriz diagonal.
- **Matriz linha** – matriz que possui apenas uma linha.
- **Matriz coluna** – matriz possui apenas uma coluna.
- **Matriz transposta –** Dada uma matriz M de ordem mxn, sua matriz transposta Mt é uma matriz de ordem n x m, que tem como linhas as colunas da matriz M e como colunas as linhas de M. Assim, a primeira linha da matriz M é igual a primeira coluna da matriz MT , a segunda linha de M é igual a segunda coluna de Mt e assim por diante.
- **Matriz simétrica –** Uma matriz quadrada é chamada de simétrica quando é igual à sua transposta, ou seja, quando cada elemento a_{ij} de M é igual ao elemento a_{ji} de Mt

O nome simétrica refere-se à simetria dos valores da matriz em torno da diagonal principal.

- **Matriz nula** – matriz na qual todos os elementos são iguais a zero.

ATIVIDADE PROPOSTA

Reunir os alunos em dupla e em uma folha separada propor a seguinte atividade de fixação:

Estimular os alunos a auxiliarem um ao outro, pensando em situações cotidianas e realizar anotações quanto a cabeçalho e linha.

1. Escreva a matriz correspondente a tabela de notas de três alunos no primeiro bimestre:

	Matemática	*Física*	*Química*	*Biologia*
Ana	6	4	5	8
Antônio	5	7	5	5
Beatriz	5	6	7	4

Acompanhar em revista se cada aluno conseguiu registrar a matriz conforme abaixo:

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 8 \\ 5 & 7 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Identifique o tipo das seguintes matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

a) Verificar se o aluno compreendeu a posição de cada elemento, respondendo que esta matriz é uma matriz do tipo 2 x 2

b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) Verificar se o aluno compreendeu a posição de cada elemento, respondendo que esta matriz é uma matriz coluna, do tipo 3 x 1.

3. Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, em que $a_{ij} = i - j$

Neste momento, o professor deve enfatizar as referencias quanto a linha e coluna, por definição a utilização de i (linha) e j (coluna). Demonstrando para o aluno que a posição de cada elemento será determinada pela combinação entre a linha e a coluna. Neste exemplo, com o auxilio das coordenadas, o aluno deverá perceber que existe uma diferença entre a posição (localização) do elemento na matriz e de seu conteúdo.

$a_{11} = 0$
$a_{12}=-1$
$a_{13}=-2$
$a_{21}=1$
$a_{22}=0$
$a_{23}=-1$

A matriz determinada será:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aula 3

HABILIDADE RELACIONADA: H33 - Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes.

PRÉ-REQUISITOS: Equação do 1º Grau

TEMPO DE DURAÇÃO: 50 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:Sala de aula com espaço para realização de dinâmica, quadro branco.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Divisão da turma em três grupos

OBJETIVOS:
Conceituar igualdade de matriz, utilizando e relembrando equação do 1º grau.

METODOLOGIA ADOTADA:
Levar o aluno a fixar o conceito de matriz, interação entre a turma.

Igualdade de Matrizes

O professor deverá iniciar a aula complementando os conceitos que foram iniciados na aula anterior e expondo no quadro dois exemplos de matrizes.

Duas matrizes A e B de mesmo tipo m x n são iguais quando todos os seus elementos correspondentes são iguais, isto é, sendo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, temos que $A = B$ quando $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i (i = 1, 2, ..., m) e para todo j (j = 1, 2, ..., n).

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6:2 & 2-1 \\ 5:1 & 4+2 \end{bmatrix}$$

Exemplo Algébrico:

$$\begin{bmatrix} 3x+2y & 2 \\ 2 & 3x-3y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Como as duas matrizes tem a mesma ordem (2) é possível a montagem de um sistema de equação para determinar os valores desconhecidos. *Neste momento, recordar com os alunos aplicação e a utilização da equação de 1º grau.*

$$\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 3x-3y=-3 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema de equações do 1º grau, temos:

$5y = 10$ logo $y = 2$

Substituindo o valor de y encontrado em uma das equações :

$3x + 2y = 7$
$3x + 2(2) = 7$
$3x + 4 = 7$
$3x = 3$
$x = 3/3$ logo $x = 1$

ATIVIDADE PROPOSTA

Gincana Rápida como fixação

Dividir a turma em 3 equipes. Propor a resolução do exercício para cada grupo, com tempo máximo determinado para o desenvolvimento. O desafio pode estar em folha ou cartão separado.

Cada grupo deverá resolver sua questão e apresentá-la ao final do tempo proposto para toda a turma.

A equipe que concluir a atividade em menos tempo e apontar o maior número de erro das demais equipes vence a competição.

A equipe vencedora será premiada com pontuação extra na nota final do bimestre.

SUGESTÕES DE QUESTÕES:

GRUPO 1	***Yasmin e Alice com os algarismos que formam o número do ano em que nasceram formaram as matrizes A e B, quadradas de ordem 2, assim podemos afirmar que $(A + B)^2$ terá como resultado:*** ***Solução:*** $A^2 + AB + BA + B^2$ *O grupo deverá calcular a matriz produto de C =A.B, percebendo que neste caso, por ser uma multiplicação de matrizes, o resultado não é o mesmo esperado como nos produtos notáveis.*
GRUPO 2	**Para controlar a quantidade necessária de ingredientes na montagem das três principais refeições oferecidas em um restaurante popular montou-se a seguinte matriz que, na 1ª linha descreve a quantidade em gramas de batata e na 2ª linha descreve a quantidade em gramas de carne/frango utilizados.** **Qual matriz que descreve a quantidade de batata e carne/frango necessárias para atender 15 clientes no consumo de cada uma das refeições.**

	Solução: *O professor deve verificar se o estudante realizou a multiplicação da matriz por um número real, o que representa todo o ingrediente para a elaboração de todas as refeições de cada tipo. Encontrando a matriz* $\begin{bmatrix} 2.250 & 1.800 & 1.050 \\ 1.875 & 2.100 & 2.625 \end{bmatrix}$
GRUPO 3	A Cinderela Calcados realizou uma liquidação total dos produtos de inverno. Neste período ofereceu comissão diferenciada aos vendedores de acordo com a forma de pagamento realizada pelos clientes. A cada venda realizada com pagamento a vista, o vendedor terá uma comissão de R$ 5,00. Vendas a prazo no cartão, R$ 3,00 e no carnê R$ 1,00. Cada vendedor receberá o valor da comissão de acordo com suas vendas. É correto afirmar que a matriz que melhor representa o valor total a ser pago em comissão aos dois vendedores por dia será : **Vendas – Liquidação**:

Vendedor 1	1º Dia	2º Dia	3º Dia
Pagamento a Vista	80	100	85
Pagamento no Cartão de Crédito	90	100	110
Pagamento no Carnê	70	90	90

Vendedor 2	1º Dia	2º Dia	3º Dia
Pagamento a Vista	90	95	105
Pagamento no Cartão de Crédito	70	80	80
Pagamento no Carnê	100	100	91

Solução:
(R$ 1500,00 R$ 1705,00 R$ 1701,00)

O professor deve observar a construção e chegada ao resultado. Orientando o aluno quanto a atenção no que está sendo solicitado.

Professor, neste ponto, você deverá avaliar a necessidade de alguma atividade complementar de acordo com o nível de conhecimento de sua classe e do tempo disponível.

Aula 4 e 5

HABILIDADE RELACIONADA: H33 - Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes.

PRÉ-REQUISITOS: Equação do 1º Grau

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Quadro, canetas coloridas, Projetor

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Duplas.

OBJETIVOS:
Conceituar as operações de adição, subtração e multiplicação de matrizes por numero real. Mostrando aos alunos a importância do tema que será estudado e sua aplicabilidade em assuntos do cotidiano.

METODOLOGIA ADOTADA:
Levar o aluno a compreender e materializar situações cotidianas através do uso das operações com matrizes, utilizando recursos visuais como quadro branco e projetor.

Adição

De maneira expositiva, o professor irá iniciar o trabalho de operação com matrizes, propondo uma situação corriqueira.

As tabelas abaixo representam as vendas, em uma concessionária, de dois veículos 0 km, modelos A e B, de acordo com o tipo de combustível durante os dois primeiros meses de um ano.

JANEIRO			
Modelo	**Flex**	**Gasolina**	**Álcool**
A	4.453	1.985	415
B	2.693	1.378	289

FEVEREIRO			
Modelo	**Flex**	**Gasolina**	**Álcool**
A	5.893	2.031	531
B	3.412	1.597	402

Questionar aos alunos: De que maneira podemos determinar as vendas de cada tipo de veículo no primeiro bimestre desse ano ?
Intuitivamente, sabemos que é preciso somar os elementos correspondentes das tabelas anteriores, isto é:

$$\begin{bmatrix} 4453 & 1985 & 415 \\ 2693 & 1378 & 289 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5893 & 2031 & 531 \\ 3412 & 1597 & 402 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10346 & 4016 & 946 \\ 6105 & 2975 & 691 \end{bmatrix}$$

Definição

Dadas duas matrizes do mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a soma de A com B (representa-se por A + B) é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

ATIVIDADE PROPOSTA

Em duplas, resolver a equação matricial A + X = B, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Solução

A matriz procurada é do tipo 2 x 3 e podemos representá-la por

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Do conceito de igualdade, poderemos realizar a soma dos elementos equivalentes, da seguinte forma:

3 + a = 7, logo a = 4   2 + b = 5, logo b = 3   1 + c = 1, logo c = 0

-1 + d = 1, logo d = 2   - 4 + e = 6, logo e = 10   2 + f = 7, logo f = 5

Matriz Oposta

Seja a matriz A = $(a_{ij})_{m \times n}$, chama-se oposta de A à matriz representada por – A, tal que A + (-A) = $0_{m \times n}$, A matriz – A é obtida de A trocando-se o sinal de cada um de seus elementos:

Subtração de Matrizes

Propor o seguinte questionamento para a classe, de que maneira podemos determinar qual foi o acréscimo de vendas por tipo de combustível entre o mês de Fevereiro e Janeiro ?

Convidar os alunos a demonstrarem no quadro branco como esta pergunta poderia ser respondida. A participação com a análise do ponto de vista de um colega auxilia na assimilação.

Professor, o objetivo é que o aluno perceba que, neste caso, a matriz A – B significa a diferença entre o número de carros vendidos entre os meses de janeiro e fevereiro e que é obtida subtraindo-se cada elemento da matriz B do seu correspondente na matriz A. Dessa forma, um elemento negativo da matriz A – B indica que a venda de carros de um determinado tipo diminuiu. Analogamente, um elemento positivo de A – B indica o crescimento da venda de carros de um determinado tipo.

Assim é possível concluir:

Dadas duas matrizes do mesmo tipo A = $(a_{ij})_{m \times n}$ e B = $(b_{ij})_{m \times n}$, chama-se diferença entre A e B (representa-se por A – B) a matriz soma de A com a oposta de B, isto é:

A – B = A + (-B)

ATIVIDADE PROPOSTA:
Solicitar que individualmente os alunos resolvam a seguinte questão:

Sejam A = $\begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ e C = $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$. Determine as matrizes:

a) A + B + C
b) A – B + C

Verifique se os alunos estão desenvolvendo a questão observando a correta soma dos elementos entre as matrizes citadas em cada questão.

Correção letra a:

$$\begin{pmatrix} 12+8+2 & 1+11+4 \\ 9+3+10 & 5+6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 20 \\ 22 & 18 \end{pmatrix}$$

Correção letra b:

$$\begin{pmatrix} 12-8+2 & 1-11+4 \\ 9-3+10 & 5-6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 16 & 6 \end{pmatrix}$$

Professor, de acordo com o desenvolvimento da aula e do nível de pré-requisitos da turma, propor quantos exercícios forem necessários para a fixação do conceito.

Multiplicação de um número real por uma matriz

Dividir a turma em equipes de no máximo 5 pessoas e propor que eles demonstrem em um "quadro" como ficará os valores dos preços em um loja, após o ajuste em 15% nos valores das mercadorias. Deixar os alunos livres para que façam os cálculos de acordo com o conhecimento que possuem até o momento.

Utilizar a tabela abaixo para representar as categorias de produtos que serão reajustados.

	Masculino	Feminino
Calça Jeans	R$ 75,00	R$ 55,00
Blusa de Malha	R$ 25,00	R$ 25,00

Tênis	R$ 145,00	R$ 120,00

Solicitar que cada grupo apresente a solução proposta, sem que as demais equipes interfiram na solução que está sendo apresentada.

Pontuar com pequenas correções eventuais erros numéricos ou de interpretação que possam ter sidos gerados, durante e no final da apresentação da solução proposta.

Ao final da apresentação, representar graficamente utilizando o quadro branco ou projeção, a tabela em forma de matriz.

$$\begin{pmatrix} 75 & 55 \\ 25 & 25 \\ 145 & 120 \end{pmatrix}$$

Chamando a atenção do aluno para a associação entre a tabela apresentada e a matriz obtida. A quantidade de linha e colunas representadas.

Na sequencia, relembrar aos alunos que um valor x, aumentado em 15%, torna-se 1,15.x., desta forma, o resultado representado é a multiplicação de cada elemento da matriz por 15 (termo constante). Os valores foram os mesmos encontrados pela maioria dos alunos.

Observamos então que podemos multiplicar uma matriz M por qualquer número real a, obtendo uma nova matriz aM de mesma ordem. Para isso, basta multiplicarmos todos os elementos da matriz M pelo número real a.

Aula 6

HABILIDADE RELACIONADA: H33 - Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes.

PRÉ-REQUISITOS: Equação do 1º Grau

TEMPO DE DURAÇÃO: 50 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folha de Atividade

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Duplas.

OBJETIVOS:
Fixar as operações de adição, subtração e multiplicação de matrizes por numero real.

METODOLOGIA ADOTADA:
Levar o aluno a fixar o conteúdo sobre matrizes e operações com matrizes, através de atividades de fixação.

O professor deve entregar aos alunos uma folha contendo as seguintes questões. Solicitar aos Após 30 minutos solicitar que os alunos, troquem entre si as avaliações, já nomeadas. Solicitar que o aluno que recebeu a avaliação, anote seu nome em um campo chamado "Responsável pela correção:" Solicitar que este aluno, verifique se o que o colega respondeu está de acordo com a correção que está sendo apresentada pelo professor e solicitar que este faça as correções. Recolher no final da correção a atividade.

1) Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{2\times 3}$, *tal que* $a_{ij} = 2i + j$

Resposta $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

2) Calcule A + B, sabendo que $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

Resposta $\mathbf{A + B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

3) Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, dê a matriz A + B – C

Resposta $\mathbf{A + B - C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

4) Calcule o produto de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ pelo numero real 3

$k.\,A = \begin{pmatrix} 3.1 & 3.(-2) \\ 3.0 & 3.3 \end{pmatrix}$ => $k\,.\,A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

Aula 7, 8 e 9

HABILIDADE RELACIONADA: H33 - Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes.

PRÉ-REQUISITOS: Equação do 1º Grau

TEMPO DE DURAÇÃO: 150 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Quadro, canetas coloridas, Projetor, Sala de micro informática com computadores com software de planilha eletrônica instalado.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Duplas.

OBJETIVOS:
Conceituar a operação de multiplicação de matrizes. Mostrando aos alunos a importância do tema que será estudado e sua aplicabilidade em assuntos do cotidiano.

METODOLOGIA ADOTADA:
Levar o aluno a compreender e materializar situações cotidianas através do uso das operações com matrizes, utilizando recursos visuais como quadro branco, projetor e o computador.

Multiplicação de Matrizes

Apresentar para os alunos a seguinte situação:

Durante a primeira fase da Copa do Mundo de futebol, realizada na Alemanha em 2006, o grupo F era formado por quatro países: Brasil, Croácia, Austrália e Japão. Observe os resultados (número de vitórias, empates e derrotas) de cada um, registrados em uma tabela e em matriz A, do tipo 4 x 3.

	Vitórias	Empates	Derrotas
Brasil	3	0	0
Croácia	0	2	1
Austrália	1	1	1
Japão	0	1	2

Pelo regulamento da Copa, cada resultado (vitória, empate ou derrota) tem pontuação correspondente (3 pontos, 1 ponto ou 0 ponto).

Assim dispostos em uma tabela:

	Número de Pontos
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

Terminada a primeira fase, foi verificado o total de pontos dos países participantes. Essa pontuação pode ser registrada numa matriz que é representada por AB (produto de A por B).

Brasil = 3 . 3 + 0 . 1 + 0 . 0 = 9
Croácia = 0 . 3 + 2. 1 + 1. 0 = 2
Austrália = 1 . 3 + 1 . 1 + 1. 0 = 4
Japão= 0 . 3 + 1 . 1 + 2. 0 = 1

Com os resultados obtidos podemos construir a matriz

$$AB = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Questione a turma; qual a relação existente entre as ordens das matrizes ? Como é determinado cada elemento de AB ?

Ouvir e anotar as respostas no quadro para que toda a turma faça as considerações.

Concluir exaltando que a matriz final (AB) foi composta pelo número de linhas da matriz A e pelo número de coluna da matriz B. Sendo assim, conclui-se:

$$A_{4 \times 3} \quad . \quad B_{3 \times 1} = AB_{4 \times 1}$$

A definição matemática da multiplicação de matrizes é a que se segue :

Dada uma matriz A = (a_{ij}) do tipo m x n e uma matriz B = (b_{ij}) do tipo n x p, o produto da matriz A pela matriz B é a matriz C = (c_{ij}) do tipo m x p tal que o elemento c_{ij} é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i, da matriz A, pelos elementos da coluna j, da matriz B, e somando-se os produtos obtidos. Utilizando a indicação AB como representação do produto entra as matrizes A e B.

ATIVIDADE PROPOSTA

Agora que todos os conceitos trabalhados em sala de aula, com a interação dos alunos, para efeito de fixação os alunos irão trabalhar com as operações apresentadas utilizando planilha eletrônica

Antes de iniciar a aula verificar se o laboratório possui ferramenta de planilha eletrônica em todos os equipamentos que serão utilizados.
Abrir a ferramenta.
Ao iniciar a aula, apresente a planilha destacando o objetivo das colunas e das linhas.
Oriente os alunos quanto a utilização do mouse, ícones e principais operações como salvar e abrir um arquivo.

Separe a turma em equipe de 2 e supervisione para que ambos executem as atividades:

Atividade 1

Orientar aos alunos que digitem as tabelas abaixo e encontrem a matriz que representa a solução para o calculo do total por tipo de garrafas de refrigerantes consumidas por turmas durante uma gincana interna, ocorrida durante 2 dias da semana. Que turma consumiu mais refrigerante ?

1º Dia			
	TURMA A	TURMA B	TURMA C
Garrafas PET 2 l	50	70	35
Garrafas 600 ml	60	60	50
Garrafas Pequenas (lata)	80	68	60

2º Dia			
	TURMA A	TURMA B	TURMA C
Garrafas PET 2 l	55	80	50
Garrafas 600 ml	70	65	60
Garrafas Pequenas (lata)	90	58	55

Resposta:

Acompanhar o desenvolvimento, verificando se os alunos estão realizando a soma de acordo com a posição de cada elemento disposto na matriz.

Sendo assim o resultado encontrado deve ser:

Resultado			
	TURMA A	TURMA B	TURMA C
Garrafas PET 2 l	50+55 = **105**	70+80=**150**	35+50=**85**
Garrafas 600 ml	60+70=**130**	60+65=**125**	50+60=**110**
Garrafas Pequenas (lata)	80+90=**170**	68+58=**126**	60+55=**115**

Atividade 2

(**UEL-PR**) Uma nutricionista recomendou aos atletas de um time de futebol a ingestão de uma quantidade mínima de certos alimentos (fruta, leite e cereais) necessária para uma alimentação sadia. A matriz D fornece a quantidade diária mínima (em gramas) daqueles alimentos. A matriz M fornece a quantidade (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida por cada grama ingerido dois alimentos citados.

Solicitar ao aluno que represente a quantidade diária mínima (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida pela ingestão daqueles alimentos.

Antes de qualquer coisa, é necessário que o aluno entenda o que está sendo pedido e que operação será utilizada para calculo.

A leitura e compreensão do texto tem fator fundamental para a solução do exercício. Interpretando adequadamente o conteúdo de cada matriz, para obter a quantidade diária, mínima de proteína fornecida pela ingestão daqueles alimentos é necessário saber a quantidade de cada alimento e quanto cada grama dele contém de proteína.

Relacionando uma matriz com a outra é possível verificar a dependência em quantidade para cada tipo de alimento:

$$D = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 600 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}006 & 0{,}033 & 0{,}108 \\ 0{,}001 & 0{,}035 & 0{,}018 \\ 0{,}084 & 0{,}052 & 0{,}631 \end{bmatrix}$$

Logo, é possível concluir que a matriz produto será dada por X = M . D

X =

$$\begin{bmatrix} 0{,}006 & 0{,}033 & 0{,}108 \\ 0{,}001 & 0{,}035 & 0{,}018 \\ 0{,}084 & 0{,}052 & 0{,}631 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}006x200+ & 0{,}033x300+ & 0{,}108x600 \\ 0{,}001x200+ & 0{,}035x300+ & 0{,}018x600 \\ 0{,}084x200+ & 0{,}052x300+ & 0{,}631x600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75{,}90 \\ 21{,}50 \\ 411{,}00 \end{bmatrix}$$

O aluno poderá incluir as informações tabuladas nas planilhas e utilizar as operações matemáticas da ferramenta.

AVALIAÇÃO

O professor poderá avaliar durante todas as aulas se o conteúdo está sendo fixado, através questionamentos individuais e pontuais.

Porém na ultima aula, o professor pode executar uma avaliação de multiplica escolha. Abaixo seguem sugestões para montagem da prova.

Avaliação:

1) Marina deseja montar um quadro com o somatório de suas notas em Português e Matemática para os dois semestres bimestres.

	1º Bimestre	2º Bimestre
Português	70	60
Matemática	60	50

:

	3º Bimestre	4º Bimestre
Português	80	55
Matemática	55	45

A matriz que melhor indica a representação deste somatório é:

a) (70 60)
b) (130 110)
c) (135 100)
d) $\begin{pmatrix} 150 & 115 \\ 115 & 95 \end{pmatrix}$ - Resposta Correta
e) $\begin{pmatrix} 265 \\ 210 \end{pmatrix}$

2) Um loja de vendas de automóveis teve uma queda na venda de seus produtos. A matriz que melhor indica a perda sofrida por esta loja é:

JANEIRO		
Modelo	***Tipo Flex***	***Tipo Gasolina***
A	***4453***	***3584***
B	***3500***	***3250***

FEVEREIRO		
Modelo	***Tipo Flex***	***Tipo Gasolina***
A	***3800***	***2560***
B	***2870***	***2800***

a) (4453 2560)
b) (3500 3250)
c) (3800 2560)
d) $\begin{pmatrix} 8253 & 6144 \\ 6370 & 6050 \end{pmatrix}$
e) $\begin{pmatrix} 653 & 1024 \\ 630 & 450 \end{pmatrix}$ Resposta Correta

3) Pablo trabalha em uma padaria que vende três tipos diferentes de salgados.Em um sábado foram registradas as vendas a seguir:

Salgado	Valor
Coxinha	R$ 2,50
Quibe	R$ 2,00
Esfirra	R$ 1,80

Salgado	Qtd Vendida
Coxinha	50
Quibe	70
Esfirra	65

A matriz que representa o total arrecadado é:

a) $\begin{pmatrix} 12{,}5 \\ 14{,}0 \\ 11{,}7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 45 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 55 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 125 \\ 140 \\ 117 \end{pmatrix}$ Resposta Correta

4) A Loja Bem Brasil realizou ajuste de 15% em todos os seus produtos. A matriz que melhor indica os preços reajustados é:

	Masculino	Feminino
Calca Jeans	R$ 80,00	R$ 80,00
Blusa Regata	R$ 18,00	R$ 15,00
Short Jeans	R$ 40,00	R$ 35,00

a) $\begin{pmatrix} R\$95{,}00 & R\$95{,}00 \\ R\$23{,}00 & R\$30{,}00 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} R\$95{,}00 & R\$95{,}00 \\ R\$23{,}00 & R\$30{,}00 \\ R\$55{,}00 & R\$50{,}00 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} R\$92{,}00 & R\$92{,}00 \\ R\$20{,}7 & R\$17{,}25 \\ R\$46{,}00 & R\$40{,}25 \end{pmatrix}$ Resposta Correta

d) (R$ 80,00 R$ 80,00)

e) $\begin{pmatrix} R\$80,00 & R\$80,00 \\ R\$50,00 & R\$70,00 \end{pmatrix}$

5) Em :final de semana, registrou-se o número de fregueses que fizeram compras em uma padaria, bem como o período (manhã, tarde ou noite) da visita. Na matriz a seguir, o elemento a_j indica o número de fregueses que foram a padaria no dia i e no período j.

$$\begin{bmatrix} 64 & 90 & 42 \\ 82 & 55 & 38 \end{bmatrix}$$

Sabendo que sábado e domingo correspondem, respectivamente, aos índices 1 e 2 e que manhã, tarde e noite são representados pelos índices 1, 2 e 3, respectivamente, o número de clientes que a padaria recebeu sábado a tarde é :

a) 64
b) 42
c) 90 Resposta Correta
d) 55
e) 38

6) A Cinderela Calcados realizou uma liquidação total dos produtos de inverno.

PRODUTO	MASCULINA	FEMININA
Sexta	R$ 5.000,00	R$ 8.000,00
Sábado	R$ 8.000,00	R$ 13.000,00

A matriz que melhor representa o total de vendas por sexo é:

a) (R$ 5.000,00 R$ 5.000,00)
b) (R$ 13.000,00 R$ 13.000,00)
c) (R$ 8.000,00 R$ 13.000,00)
d) (R$ 13.000,00 R$ 21.000,00) Resposta Correta
e) (R$ 5.000,00 R$ 8.000,00)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

ROTEIROS DE AÇÃO e TEXTOS – Razões Trigonométricas – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2o ano do Ensino Médio – 3o bimestre/2012. Disponíveis em: http://projetoseeduc.cecierj.edu.br.

MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES, Volume 2/IEZZI Gelson, DOLCE Osvaldo, DEGENSZAJN David, PERIGO Roberto, ALMEIDA Nilze – Ed. Saraiva – 6ª Edição - São Paulo: FTD, 2010.

MATEMÁTICA CONTEXTO E APLICAÇÕES, Volume 2/ DANTE Luiz Roberto– Ed. Ática – 1ª Edição - São Paulo: FTD, 2011.

MATEMATICA, Volume Único, FACCHINI Walter, Ed. Saraiva – 2ª Edição – São Paulo, FTD, 1997