Reforço escolar • Matemática •

Fácil e Poderoso

Dinâmica 1

3ª Série | 4º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	3ª do Ensino Médio	Algébrico-Simbólico	Polinômios e Equações Algébricas.

Aluno

Primeira Etapa
Compartilhar ideias

Atividade • Uma divisão diferente.

Questão 1

Quando você divide um número natural por outro, pode obter resto nulo ou não. No primeiro caso, a divisão é exata e garante que o dividendo é múltiplo do divisor. No segundo, a relação entre os quatro números envolvidos, dividendo (D), divisor(d), quociente(q) e resto(r),

D	d
r	q

pode ser resumida num produto seguido de uma soma, observando que o resto é sempre menor que o divisor.

GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Como você indica, numa única expressão numérica, que a divisão de 20 por 3 tem quociente 6 e resto 2?

Operações análogas podem ser feitas com polinômios. Você se lembra de como operar com polinômios? Vamos relembrar? Calcule os valores de a e de b a fim de que a igualdade a seguir seja verdadeira:

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 = (x^2 - 5)(x^2 - 3x + 9) + (ax + b)$$

Nesse caso, do mesmo modo como se trata a divisão de números naturais com resto, pode-se dizer que a **divisão de $x^4 - 3x^3 + 4x^2$ por $x^2 - 5$ tem quociente $x^2 - 3x + 9$, com resto $(-15x + 45)$**, ou seja:

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 = (x^2 - 5)(x^2 - 3x + 9) + (-15x + 45)$$

Isso pode ser feito entre dois polinômios P(x) e S(x), desde que o grau de P(x) (dividendo) seja maior do que ou igual ao grau de S(x) (divisor). O resto R(x) deverá ter grau menor do que o de S(x).

Isto é, se o grau de P(x) é maior que ou igual ao grau de S(x), é possível determinar polinômios Q(x) e R(x) tais que:

P(x) = S(x) × Q(x) + R(x), sendo o grau de R menor que o grau de S.

Como na divisão entre números inteiros, Q(x) diz-se o quociente de P(x) por S(x) e R(x) será resto da divisão.

Questão 2

Seja $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 8$ e $S(x) = x - 2$. Sabendo que o quociente de P por S é $Q(x) = x^2 - x - 1$, encontre o resto dessa divisão. Antes de fazer o cálculo, analise qual deve ser o seu grau.

Questão 3

Seja $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ e $S(x) = x - 2$, sabendo que o quociente de P_2 por S é $Q(x) = x^2 - x - 1$, encontre o resto dessa divisão.

Segunda Etapa

Um novo olhar...

Atividade • É fácil provar...

Questão

1. Calcule os valores de $P_1(2)$ e $P_2(2)$ diretamente por substituição nos polinômios

   $P_1(x) = x^3 - 3x^2 + x + 8$ e $P_2(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$.

2. Compare esses resultados com os restos da divisão de P_1 e de P_2 por $(x - 2)$ e veja como justificar esse resultado a partir das identidades:

   $P_1(x) = Q(x) \times (x - 2) + 6$ e $P_2(x) = Q(x) \times (x - 2)$.

3. Numa situação geral, em que você divida um polinômio de qualquer grau $n \geq 1$ pelo binômio do 1º grau, $(x - a)$, analise as seguintes situações:

a. Se a divisão de P por $(x - a)$ tem quociente $Q(x)$ e resto $R(x)$, qual é o grau de $R(x)$?

b. Sabendo, então, que $P(x) = Q(x)(x - a) + R$, qual será o valor de P para $x = a$, isto é, quanto vale $P(a)$?

Parabéns! Você acaba de provar o Teorema do Resto, que diz:

Dado um polinômio $P(x)$, de grau $n \geq 1$ que dividido por $(x - a)$ tem quociente $Q(x)$ e resto R, tem-se que R é constante e

$$P(a) = R.$$

Parece um resultado simples e ingênuo, certo?

Errado: ele é um resultado bem poderoso, como você vai ver na próxima etapa.

Terceira Etapa

Fique por dentro!

Atividade • Esse teorema é poderoso.

E, então: Qual o poder deste teorema?

Questão 1

Na etapa anterior, você viu que o resto na divisão de $P_2(x)$ por $(x - 2)$ foi 0. Você concluiu, então, que $P_2(2) = 0$, mas concluiu também que $P_2(x)$ era o produto do quociente $Q(x)$ por $(x - 2)$. Isto é, você viu também que $(x - 2)$ é um fator de $P_2(x)$. Você se lembra do que é "fatorar"?

Aluno

Fatorar é escrever como um produto. Como o resto da divisão era 0, você pôde escrever: $P_2(x) = (x^2 - x - 1)(x - 2)$.

Da mesma forma, será que $(x - 5)$ é um fator de $P(x) = x^4 - 5x^2 - 500$?

Questão 2

E qual será o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^4 - 5x^2 - 500$ por $(x + 5)$?

Como ocorre com a adição e a multiplicação de polinômios, a divisão de polinômios também pode ser feita de modo análogo à divisão de números naturais. O algoritmo que melhor se adapta à divisão de polinômios é aquele chamado "algoritmo longo", porque separa a multiplicação da subtração. Por enquanto, você não precisa fazer essa divisão, mas vai analisar a operação já pronta.

Questão 3

Nas questões anteriores, você viu que o polinômio $P(x) = x^4 - 5x^2 - 500$ é divisível por $(x + 5)$ e por $(x - 5)$. Então, como acontece com os números naturais, $P(x)$ será divisível pelo produto $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 5$.

A equação $P(x) = 0$ é $x^4 - 5x^2 - 500 = 0$. Como $P(5) = P(-5) = 0$, então 5 e -5 são suas raízes. Será que existem outras raízes dessa equação?

Observe a divisão a seguir e dê a resposta.

x^4	$-5x^2$	-500	$x^2 - 25$
$-x^4$	$+25x^2$		$x^2 + 20$
0	$+20x^2$	-500	
	$-20x^2$	$+500$	
	0	$+0$	

Questão 4

a. Observe a divisão de $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ por $(x - 1)$ e responda se 1 é, ou não, raiz da equação $P(x) = 0$.

x^3	$-3x^2$	$-x$	$+3$	$x-1$
$-x^3$	$+x^2$			x^2-2x-3
0	$-2x^2$	$-x$	$+3$	
	$2x^2$	$-2x$		
	0	$-3x$	$+3$	
		$+3x$	-3	
		0	$+0$	

b. Observe a divisão de $x^2 - 2x - 3$ por $(x + 1)$ e dê uma fatoração de

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

em binômios do 1º grau.

x^2	$-2x$	-3	$x+1$
$-x^2$	$-x$		$x-3$
0	$-3x$	-3	
	$+3x$	$+3$	
	0	$+0$	

c. Quais são, então, as raízes da equação $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$?

Deu para perceber o poder do Teorema do Resto?

Ele pode fatorar polinômios e resolver equações algébricas!

Estes exemplos são exemplos particulares, mas você pode verificar que esses fatos são gerais:

Se o quociente da divisão de $P(x)$ por $(x - a)$ é $Q(x)$ com resto 0, então

$$P(x) = Q(x)\,(x - a) \qquad \text{e} \qquad P(a) = 0.$$

Isto é, $(x - a)$ é um fator de P e a é uma raiz da equação algébrica $P(x) = 0$.

Quarta Etapa

Quiz

Questão

(*FUVEST – Vestibular da USP, 2009*)

O polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx$, em que a e b são números reais, tem restos 2 e 4 quando dividido por $x - 2$ e por $x - 1$, respectivamente. Assim, o valor de a é:

a. -6

b. -7

c. -8

d. -9

e. -10

QUINTA ETAPA

ANÁLISE DAS RESPOSTAS AO QUIZ

Aluno

Etapa Flex

Para saber +

Você encontra alguns exercícios, com resolução, em:

http://www.profcardy.com/cardicas/dalembert.php

e

http://www.brasilescola.com/matematica/teorema-dalembert.htm

E agora é com você!

1. Quais são as raízes da equação do 4º grau: $x(x-2)(2x+3)(x+1)=0$?

2. Qual é o resto da divisão de $P(x) = x^5 - x^3 - x + 1$ por $(x - 2)$? E 2 é solução da equação $P(x) = 0$?

3. Quanto deve valer m a fim de que o resto da divisão de $P(x) = x^4 - mx^3 + 7$ por $(x + 2)$ seja igual a 15?

4. Qual deve ser o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ por $(3x - 6)$.

Matemática

5. Qual deve ser o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $(ax + b)$, onde $a \neq 0$?

Aluno