FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ

Matemática 1º Ano – 2º Bimestre/2013

Plano de Trabalho

Papiro Rhind, Museu de Londres.

Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Tarefa 2
Cursista: Nivaldo Batista Macedo
Tutor: Wagner Rambaldi Telles

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 3

METODOLOGIA 4

DESENVOLVIMENTO 5

AVALIAÇÃO 23

FONTES DE PESQUISA 24

INTRODUÇÃO

Este Plano de Trabalho foi a priori escrito para apresentar a primeira etapa do Currículo Mínimo, relativas às razões trigonométricas no triângulo retângulo, e para permitir que as habilidades e competências relacionadas sejam desenvolvidas.

Ao fim deste trabalho iniciaremos o estudo da lei dos senos e da lei dos cosenos, complementando o currículo.

O desenvolvimento deste trabalho foi caracterizado por aulas expositivas, suportadas quanto necessário no Geogebra culminando com uma atividade em grupo onde os alunos terão a oportunidade de por em prática o que foi estudado fazendo medições utilizando de um teodolito rústico, onde procuraremos aproximar o quanto mais prática e teoria.

METODOLOGIA

A dinâmica metodológica será desenvolvida a partir de aulas teóricas e/ou expositivas preferencialmente dialogadas e acompanhadas de exercícios práticos com a apresentação e discussão dos resultados, incentivando a criatividade e a maturação matemática do estudante.

O professor agirá como agente orientador e mediador no raciocínio do estudante nos processos mentais de investigação e na análise de problemas e situações reais.

Sempre que julgar-se necessário e possível usaremos de softwares de geometria dinâmica para que o aluno possa verificar os resultados ou dar corpo a seus cálculos além de poder investigar situações análogas.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1

Trigonometria

PRÉ-REQUISITOS: Nenhum
TEMPO DE DURAÇÃO: 40 minutos
RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Trivial/Aula expositiva
ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.
OBJETIVOS: Apresentar uma abordagem histórica ao tema e mostrar sua aplicação.
HABILIDADES/COMPETÊNCIAS RELACIONADAS: Não há.

Nesta atividade apresentaremos e discutiremos o texto "Trigonometria", reproduzido em sua íntegra do site InfoEscola:

A **trigonometria**, palavra formada por três radicais gregos: **tri** (três), **gonos** (ângulos) e **metron** (medir), têm por objetivo o cálculo das medidas dos lados e ângulos de um triângulo.

Medir distâncias é uma necessidade antiga da humanidade, facilmente atendida no caso de envolver pontos próximos. Basta verificar quantas vezes uma dada unidade de medida está contida no comprimento a ser medido. Este é o princípio dos instrumentos mais comuns para medir comprimentos: réguas, fitas métricas, trenas, etc.

Por que estudar Trigonometria?

Há situações, em que se deseja efetuar medidas envolvendo objetos que não são diretamente acessíveis. Atualmente, a trigonometria não se limita apenas a estudar os triângulos. Sua aplicação se estende a outros campos da Matemática, como análise, e a outros campos da atividade humana, como a Eletricidade, a Mecânica, a Acústica, a Música, a Topologia, a Engenharia Civil etc.

Observem algumas situações:

a. Você já parou para imaginar como os navegadores da antiguidade faziam para calcular a que distância da terra eles encontravam-se enquanto navegavam?
b. Seria impossível medir a distância da Terra à Lua, porém com a trigonometria se torna simples.
c. Um engenheiro precisa saber a largura de um rio para construir uma ponte, o trabalho dele é mais fácil quando ele usa dos recursos trigonométricos.
d. Um cartógrafo (desenhista de mapas) precisa saber a altura de uma montanha, o comprimento de um rio, etc. Sem a trigonometria ele demoraria anos para desenhar um mapa.

Astrolábio (no passado)

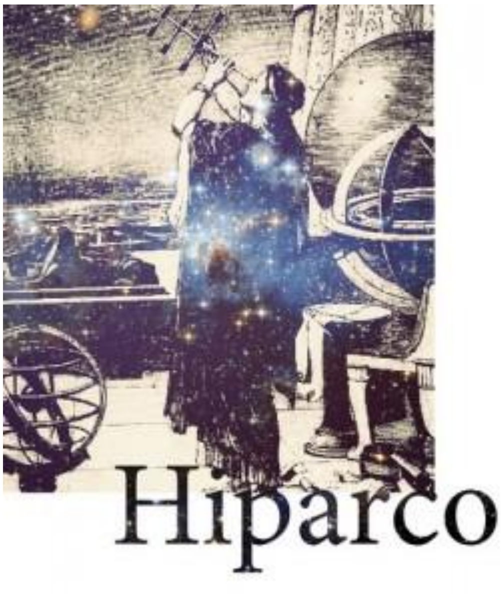
Um dos mais antigos instrumentos científicos, que teria surgido no século III a.C. A sua invenção é atribuída ao matemático e astrônomo grego Hiparco.

Teodolito (no presente)

Instrumento geodésico, que serve para levantar plantas, medir ângulos reduzidos ao horizonte e distâncias.

Pode-se dizer que foi a Astronomia a grande impulsionadora da Trigonometria, pois foi o astrônomo grego Hiparco (190 A.C – 125 A.C) quem empregou pela primeira vez relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo.

Na Grécia antiga, entre os anos de 190 A.C. e 125 A.C., viveu Hiparco, um matemático que construiu a primeira tabela trigonométrica. Esse trabalho foi muito importante para o desenvolvimento da Astronomia, pois facilitava o cálculo de distâncias inacessíveis, o que lhe valeu o título de PAI DA TRIGONOMETRIA.



Referências Bibliográficas:

LIMA, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. Temas e problemas Elementares. Rio de Janeiro 2ª Ed. SBM, 2005.

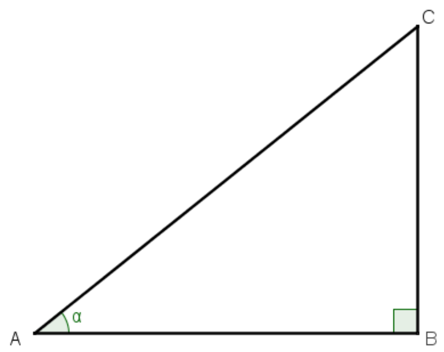
(**Trigonometria**
<http://www.infoescola.com/matematica/trigonometria/ >. Acesso em 17/05/2013.

Atividade 2

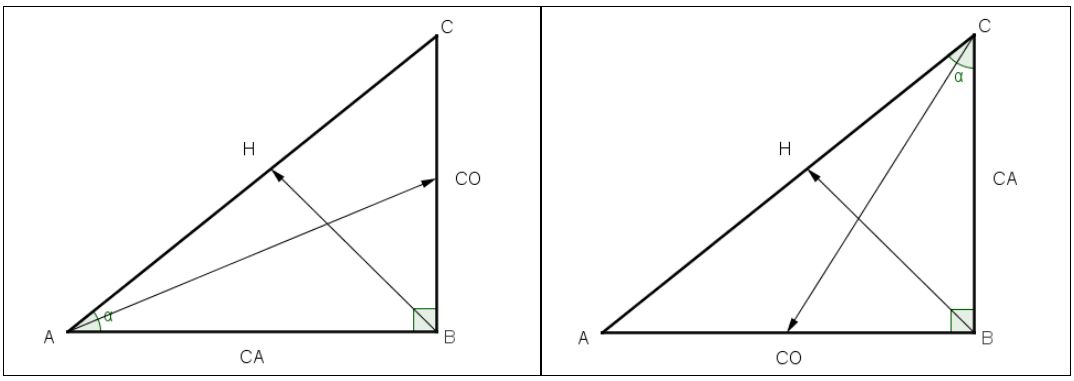
Razões Trigonométricas: Seno, Coseno e Tangente

PRÉ-REQUISITOS: Classificação dos triângulos quanto aos ângulos internos; reconhecimento de um triângulo retângulo.
TEMPO DE DURAÇÃO: 20 minutos
RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Trivial/Aula expositiva
ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.
OBJETIVOS: Reconhecer a hipotenusa, o cateto oposto e o cateto adjacente em um triângulo retângulo conhecido um de seus ângulos agudos. Revisar as razões seno, coseno e tangente.
HABILIDADES/COMPETÊNCIAS RELACIONADAS: Utilizar as razões trigonométricas para calcular o valor do seno, coseno e tangente dos ângulos 30°, 45°e 60°.

Consideremos o triângulo retângulo ABC a seguir, do qual conhecemos um de seus ângulos agudos α:



- O lado AC, associado ao ângulo reto, denominamos hipotenusa (H)
- O lado BC, associado ao ângulo conhecido α, denominamos cateto oposto (CO)
- O lado AB, adjacente ao ângulo α, denominamos cateto adjacente (CA)



Conforme estudado anteriormente, as razões trigonométricas fundamentais são:

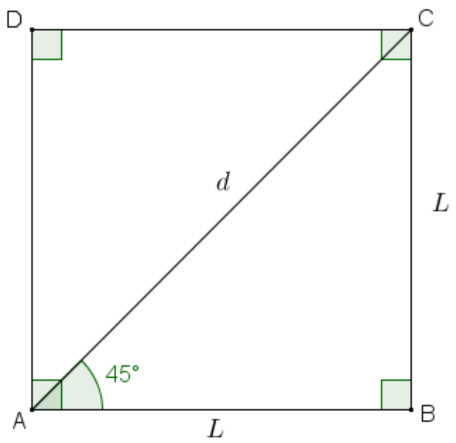
$sen\alpha = \dfrac{CO}{H}$	$cos\alpha = \dfrac{CA}{H}$	$tg\alpha = \dfrac{CA}{H}$

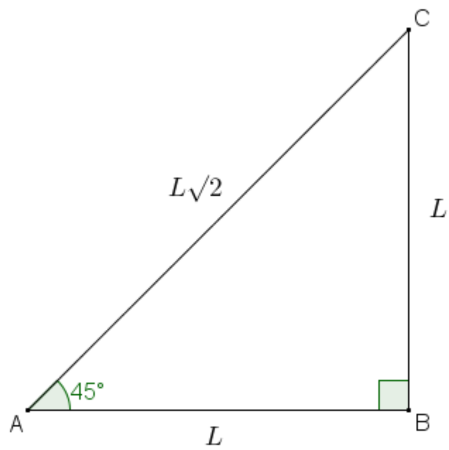
Utilizaremos essas razões a seguir para obtermos geometricamente os valores do seno, do coseno e da tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°.

Atividade 3
Os Arcos Notáveis:
30°, 45° e 60°

PRÉ-REQUISITOS: Figuras planas: Quadrado e Triângulo equilátero; Teorema de Pitágoras; operações com radicais.
TEMPO DE DURAÇÃO: 80 minutos
RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Trivial; Aula Expositiva.
ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual
OBJETIVOS: Obter os valores do seno, coseno e tangente dos arcos notáveis a partir do quadrado e do triângulo equilátero.
HABILIDADES/COMPETÊNCIAS RELACIONADAS: Utilizar as razões trigonométricas para calcular o valor do seno, coseno e tangente dos ângulos 30°, 45°e 60°.

Consideremos o quadrado ABCD a seguir, de onde estacamos sua diagonal d:





Aplicando o teorema de Pitágoras, temos no triângulo ABC:

$$d^2 = L^2+L^2 \Rightarrow d^2 = 2L^2 \Rightarrow \mathbf{d = L\sqrt{2}}$$

No triângulo ABC, observamos os seguintes dados:
Cateto Oposto: L
Cateto Adjacente: L
Hipotenusa: $L\sqrt{2}$

Calculando o seno de 45°:

Aplicando a razão $\text{sen}\alpha=CO/H$, teremos:
$\text{sen}45° = L/L\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$
Racionalizando o denominador:
$\text{sen}45° = 1.\sqrt{2}/ (\sqrt{2})^2$

$$\mathbf{sen45° = \sqrt{2}/2}$$

Calculando o coseno de 45°:

Aplicando a razão $\cos\alpha=CA/H$, teremos:
$\cos45° = L/L\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$
Racionalizando o denominador:
$\cos45° = 1.\sqrt{2}/ (\sqrt{2})^2$

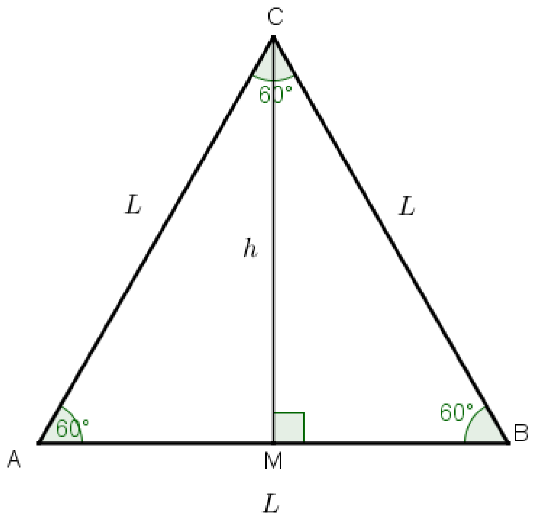
$$\mathbf{cos45° = \sqrt{2}/2}$$

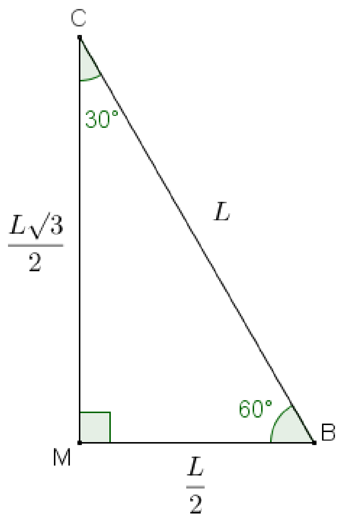
Calculando a tangente de 45°:

Aplicando a razão $\text{tg}\alpha=CO/CA$, teremos:
$\text{tg}45° = L/L$

$$\mathbf{tg45° = 1}$$

Consideremos a seguir o triângulo equilátero ABC a seguir, de onde baixamos a altura h a partir de C e destacamos o triângulo retângulo CMB:





Observe que, sendo o triângulo equilátero, os ângulos internos medem 60° e a altura CM equivale à bissetriz do ângulo C, nesse caso, o triângulo retângulo CMB tem ângulos agudos de 30° e 60°.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo CMB, teremos:
$h^2 + (L/2)^2 = L^2 \Rightarrow h^2 = L^2/4 + L^2 \Rightarrow h^2 = L^2 - L^2/4 \Rightarrow h^2 = 3L^2/4 \Rightarrow h = L\sqrt{3}/2$

No triângulo CMB, temos em relação ao ângulo de 30°:
Cateto oposto: $L/2$
Cateto adjacente: $L\sqrt{3}/2$
Hipotenusa: L

Calculando o seno de 30°:

Aplicando a razão $sen\alpha = CO/H$, teremos:
$sen30° = (L/2)/L$
$sen30° = (L/2).(1/L)$

$sen30° = 1/2$

Calculando o coseno de 30°:

Aplicando a razão $cos\alpha = CA/H$, teremos:
$cos30° = (L\sqrt{3}/2)/L$
$cos30° = (L\sqrt{3}/2).(1/L)$

$cos30° = \sqrt{3}/2$

Calculando a tangente de 30°:

Aplicando a razão $tg\alpha = CO/CA$, teremos:
$tg30° = (L/2) / (L\sqrt{3}/2)$
$tg30° = (L/2).(2/L\sqrt{3})$
$tg30° = 1/\sqrt{3}$
Racionalizando o denominador:
$Tg30° = 1.\sqrt{3}/(\sqrt{3})^2$

$tg30° = \sqrt{3}/3$

Já no triângulo CMB, temos em relação ao ângulo de 60°:
Cateto oposto: $L\sqrt{3}/2$
Cateto adjacente: $L/2$
Hipotenusa: L

Calculando o seno de 60°:

Aplicando a razão $sen\alpha = CO/H$, teremos:
$sen60° = (L\sqrt{3}/2)/(L)$
$sen60° = (L\sqrt{3}/2).(1/L)$

$sen60° = \sqrt{3}/2$

Calculando o coseno de 60°:

Aplicando a razão senα=CA/H, teremos:
cos60° = (L/2) /(L)
cos60° = (L/2).(1/L)

cos60°= 1/2

Calculando a tangente de 60°:

Aplicando a razão senα=CO/CA, teremos:
sen60° = (L√3/2) / (L/2)
sen60° = (L√3/2).(2/L)

cos60°= √3

Organizando os valores obtidos, temos a seguinte tabela:

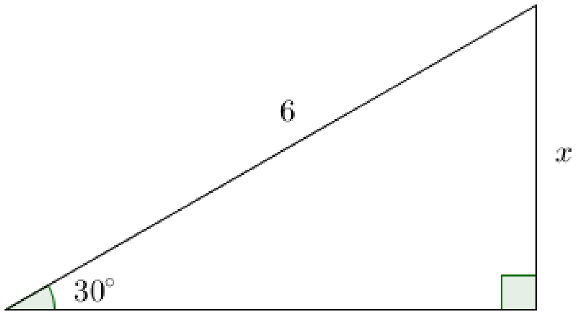
	30°	45°	60°
sen	1/2	√2/2	√3/2
cos	√3/2	√2/2	1/2
tg	√3/3	1	√3

Atividade 4
Exercícios Teóricos

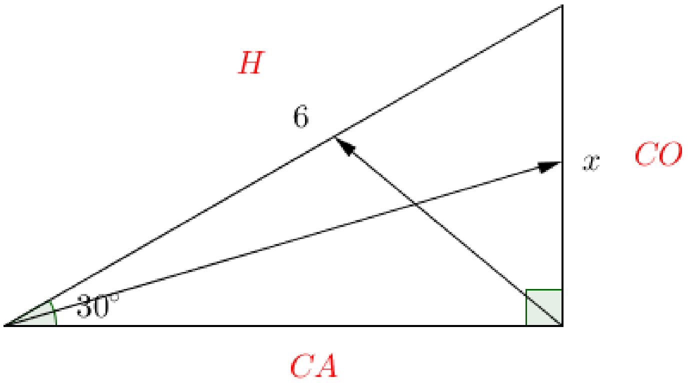
PRÉ-REQUISITOS: Razões trigonométricas no triângulo retângulo
TEMPO DE DURAÇÃO: 200 minutos
RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Trivial/Lista de Exercícios
ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual ou em duplas
OBJETIVOS: Compreender a aplicação das razões trigonométricas na resolução de situações problema.
HABILIDADES/COMPETÊNCIAS RELACIONADAS: Resolver problemas do cotidiano envolvendo as razões trigonométricas.

Exemplo 1:

Calcular a medida x no triângulo a seguir:



Vamos primeiramente identificar a hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente:



Observe que aqui não nos interessa o cateto adjacente, pois devemos utilizar o x a ser calculado e um valor conhecido que, nesse caso é a hipotenusa.

Daí temos:
CO = x e H = 6

Analisando as razões estudadas, observamos que só poderemos aplicar a razão seno:

senα = CO/H

sen30 = x/6

Consultando a tabela dos ângulos notáveis, temos que sen30 = 1/2

Substituindo esse valor:

1/2 = x/6

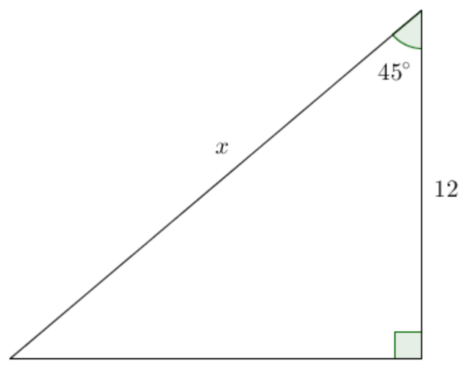
Multiplicando meios e extremos:

2x = 6

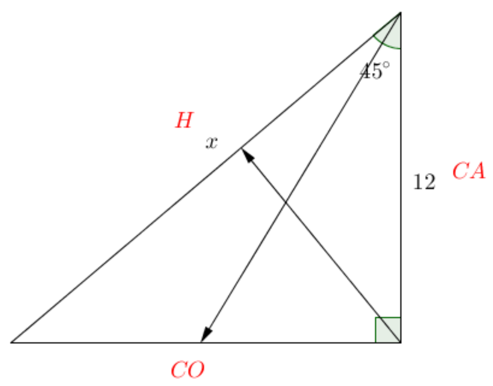
x = 3

Exemplo 2:

Calcular a medida x no triângulo a seguir:



Identificando a hipotenusa, o cateto oposto e o cateto adjacente:



Observamos que desta vez não nos interessa a medida do cateto oposto, pois estão envolvidas no problema o cateto adjacente (CA) e a hipotenusa (H).

Aplicando então a razão coseno, teremos:

$\cos\alpha = CA/H$

$\cos 45 = 12/x$

Substituindo $\cos 45 = \sqrt{2}/2$, teremos:

$\sqrt{2}/2 = 12/x$

Multiplicando meios e extremos:

$x\sqrt{2} = 24$

$x = 24/\sqrt{2}$

Racionalizando o denominador:

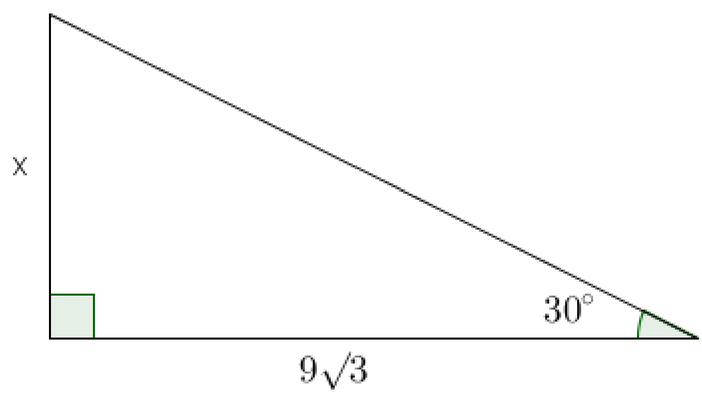
$x = 24.\sqrt{2}/ (\sqrt{2})^2$

$x = 24\sqrt{2}/2$

$\mathbf{x = 12\sqrt{2}}$

Exemplo 3:

Calcular a medida x no triângulo a seguir:



Identificando a hipotenusa, o cateto oposto e o cateto adjacente, observamos que os elementos que nos interessam para o cálculo são:

$CO = x$ e $CA = 9\sqrt{3}$

Aplicando a razão tangente, teremos:

tg30 = CO/CA

$\sqrt{3}/3 = x/9\sqrt{3}$

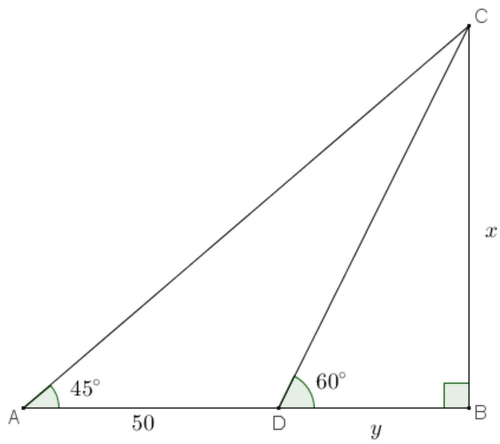
$3x = 9.\sqrt{3}.\sqrt{3}$

3x = 27

x = 9

Exemplo 4:

Calcule as medidas x e y no triângulo a seguir: (Considere $\sqrt{3} = 1,7$)



No triângulo ABC, temos:

tg45 = x/ (50+y) => 1 = x/ (50+y) => x = 50+y (I)
No triângulo DBC, temos:

tg60 = x/y => $\sqrt{3}$ = x/y => x= $\sqrt{3}$y => x = 1,7y (II)

Igualando (I) e (II) >

1,7y = 50+y

1,7y-y = 50

0,7y = 50

y = 50/0,7

y $\cong$ 71,4

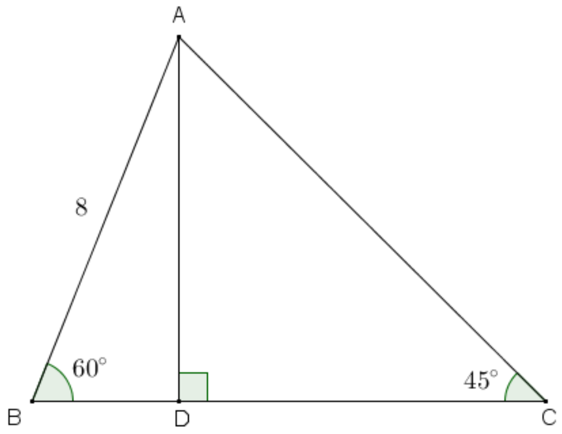
Substituindo em (I):

x = 1,7 . 71,4

x ≅ 121,4

Exercício:

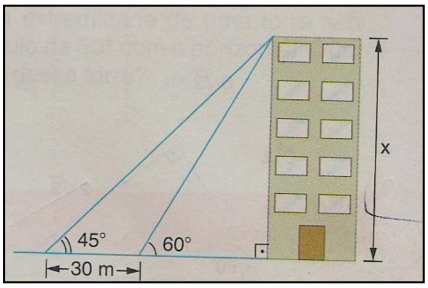
Determine as medidas dos segmentos BC e AC da figura seguinte. ABC é um triângulo retângulo?



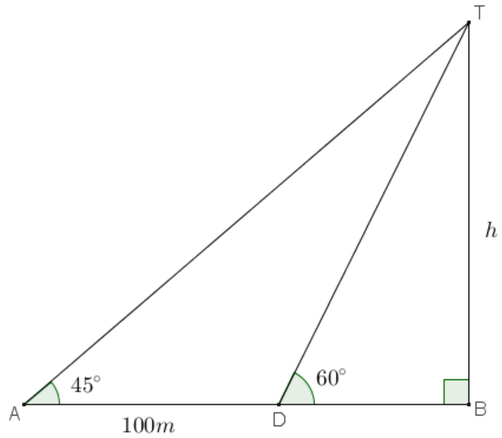
LISTA DE EXERCÍCIOS

1) (UF – PI) - Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo, um ângulo de 30° (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1 000 metros, qual a altura atingida pelo avião?

2) Um observador vê um edifício, construído em terreno plano, sob um ângulo de 60°. Se ele se afastar do edifício mais 30m, passará a vê-lo sob o ângulo de 45°. Calcule a altura do edifício.



3) De um ponto A, um agrimensor enxerga o topo T de um morro, conforme um ângulo de 45°. Ao se aproximar 100 metros do morro, ele passa a ver o topo T conforme um ângulo de 60°. Determine a altura do morro.

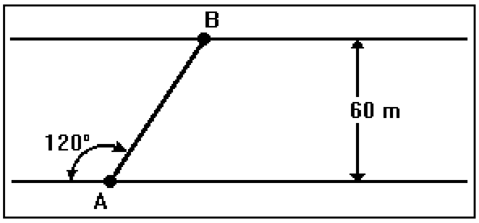


4) Um avião levanta voo sob um ângulo constante de 20°. Após percorrer 2 000 metros em linha reta, qual será a altura atingida pelo avião, aproximadamente?
(Utilize: sen20° = 0,34; cos20° = 0,94 e tg20° = 0,36)

5) (VUNESP) Uma pessoa, no nível do solo, observa o ponto mais alto de uma torre vertical, à sua frente, sob o ângulo de 30°. Aproximando-se 40 metros da torre, ela passa a ver esse ponto sob o ângulo de 45°. A altura aproximada da torre, em metros, é:

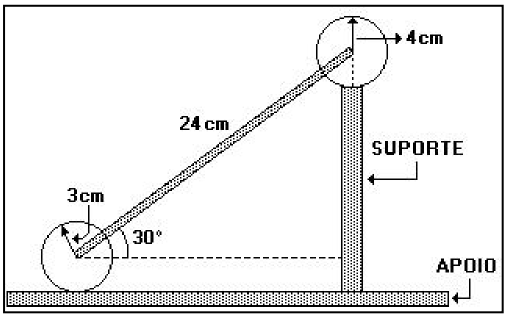
a) 44,7 b) 48,8 c) 54,6 d) 60,0 e) 65,3

6) (UFRS) - Um barco parte de A para atravessar o rio. A direção de seu deslocamento forma um ângulo de 120° com a margem do rio. Sendo a largura do rio 60m, a distância, em metros, percorrida pelo barco foi de:



a) $40\sqrt{2}$ b) $40\sqrt{3}$ c) $45\sqrt{3}$ d) $50\sqrt{3}$ e) $60\sqrt{2}$

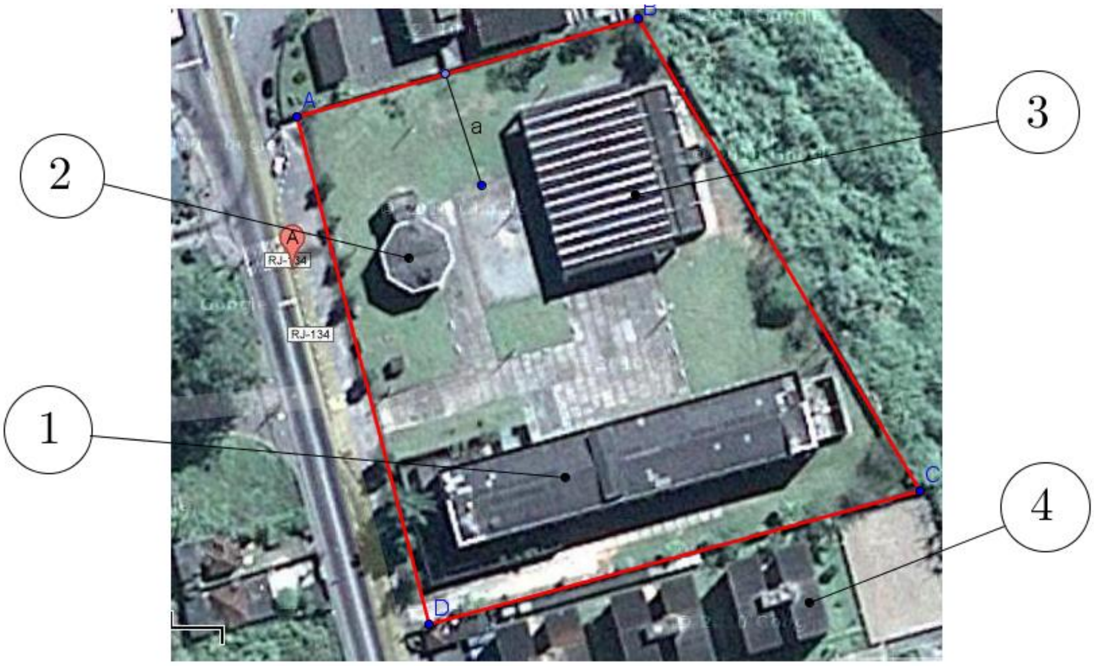
7) (PUCCAMP) A figura a seguir é um corte vertical de uma peça usada em certo tipo de máquina. No corte aparecem dois círculos, com raios de 3cm e 4cm, um suporte vertical e um apoio horizontal. A partir das medidas indicadas na figura, conclui-se que a altura do suporte é:



a) 7cm b) 11cm c) 12cm d) 14cm e)16 cm

Atividade 5
Da Teoria à Prática

PRÉ-REQUISITOS: Razões trigonométricas no triângulo retângulo.
TEMPO DE DURAÇÃO: 200 minutos
RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Teodolito caseiro construído pelos alunos; calculadora científica; trena.
ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Grupos de 4 a 5 alunos.
OBJETIVOS: Verificar aplicações das razões trigonométricas como ferramenta para medir distâncias ou alturas.
HABILIDADES/COMPETÊNCIAS RELACIONADAS: Resolver problemas do cotidiano envolvendo as razões trigonométricas.



CIEP 137 – Cecília Meireles
Vista aérea
Fonte : Google Maps

Nesta etapa, partiremos para o campo para colocar em prática toda a teoria estudada.

Faremos diversas medições no perímetro da escola utilizando basicamente o teodolito caseiro que fora antes solicitado que cada grupo construísse.

Algumas medições planejadas são as alturas do prédio principal (1), da biblioteca (2), da quadra esportiva (3) e de um conjunto habitacional (4) que fica no terreno ao lado e a distância (a) , anotada na figura.

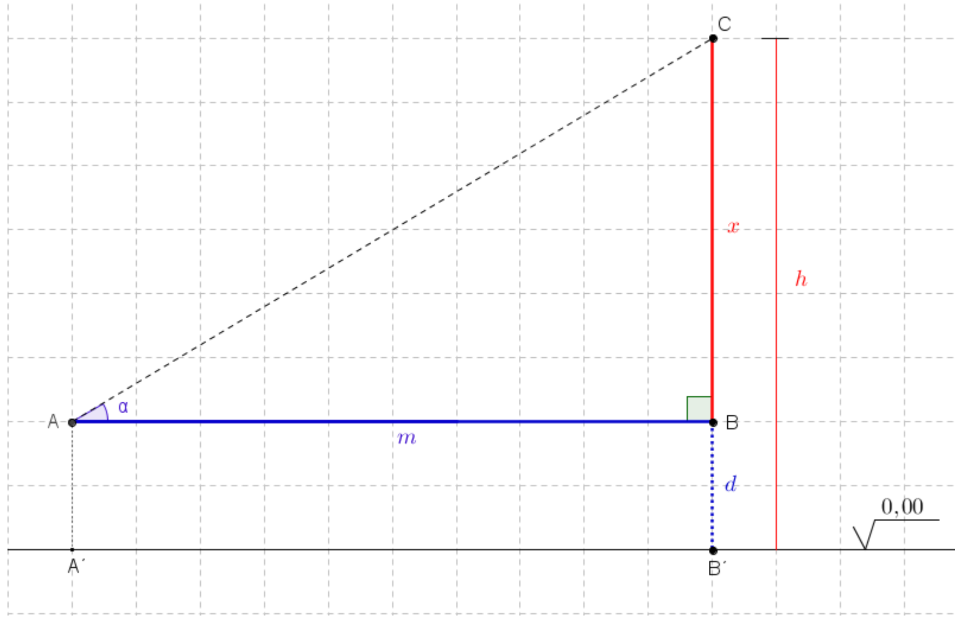
Outras medições poderão ser feitas, como a altura de árvores, postes de iluminação, morros vizinhos, etc. sendo que, nesse caso, deixaremos a critério dos alunos, visando explorar suas criatividades.

Como regra, será exposto que os alunos só poderão acessar as áreas pavimentadas da escola, sendo expressamente proibido acessar-se a área gramada ou deslocar-se para fora do perímetro da escola.

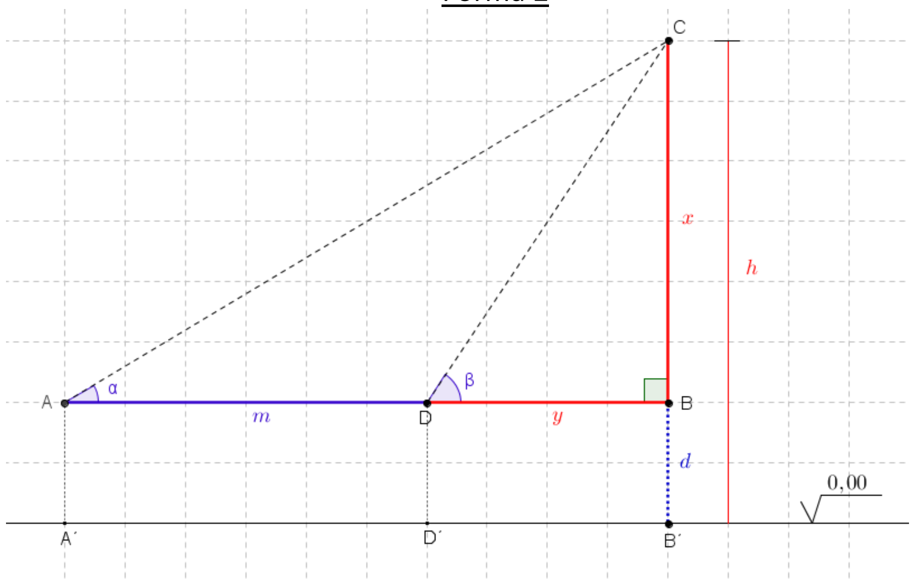
Na primeira aula os alunos deverão discutir as estratégias que usarão para obter as medidas solicitadas e tirar dúvidas com respeito ao uso do teodolito.

Consideramos suficiente o uso de uma das formas a seguir, onde representamos em azul o que pode ser medido e em vermelho o que não pode ser medido, devendo ser obtido por meio de cálculos.

Forma 1



Forma 2



Modelando as formas 1 e 2:

Por conveniência e expectativa de que a compreensão das aplicações possa abranger o maior número de alunos possível, optamos antes em utilizar de substituições, propriedades de proporções, enfim, a forma mais usual de apresentarmos o conteúdo.

No entanto, apresentaremos aos alunos a possibilidade de modelarmos as formas acima, o que facilitará o cálculo final, pois se sabemos os valores medidos bastará substituí-los.

Forma 1:

No triângulo ABC, temos:

$$\frac{x}{m} = tg\alpha \Rightarrow x = m\ tg\alpha \quad (I)$$

E podemos observar que a altura h será dada pela soma de x com a altura útil "d" do teodolito:

$$h = x + d \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II):

$$\boxed{h = mtg\alpha + d}$$

Forma 2:

No triângulo DBC, temos:

$$\frac{x}{y} = tan\beta \Rightarrow x = y\ tan\beta \quad (I)$$

E no triângulo ABC, temos:

$$\frac{x}{m+y} = tg\alpha \Rightarrow x = (m+y)\ tg\alpha \quad (II)$$

Igualando (I) e (II) e a seguir isolando y:

$$y\ tg\beta = (m + y)\ tg\alpha$$
$$y\ tg\beta = m\ tg\alpha + y\ tg\alpha$$
$$y\ tg\beta - y\ tg\alpha = m\ tg\alpha$$
$$y(tg\beta - tg\alpha) = m\ tg\alpha$$

$$\boxed{y = \frac{m\ tg\alpha}{tg\beta - tg\alpha}}$$

Substituindo em (I):

$$x = \frac{m\ tg\alpha\ tg\beta}{tg\beta - tg\alpha}$$

Da figura, observamos que a altura h é dada pela soma da medida x com a altura útil “d”do teodolito:

$$h = x + d$$

Substituindo x, temos:

$$\boxed{h = \frac{m\ tg\alpha\ tg\beta}{tg\beta - tg\alpha} + d}$$

AVALIAÇÃO

Durante o desenvolvimento a avaliação será de forma continuada, obervando a participação e a capacidade interpretação, compreensão e raciocínio de cada aluno.

Para uma melhor leitura dos resultados será solicitado no final dos trabalhos que o aluno entregue uma auto-avaliação onde ele deve relatar suas impressões positivas ou negativas, principais dificuldades, seu grau de compreensão do conteúdo estudado, suas expectativas, entre outros.

Entendendo que, para desenvolvermos a capacidade de interpretação e síntese de uma situação problema, o hábito da redação é tão importante quanto o da leitura, a opção é que essa avaliação seja na forma de um relato por escrito; é possível encontrarmos mais informações nas entrelinhas de seus textos que aquelas que possamos idealizar nos modelos de auto-avaliações em que o aluno deve assinalar com x o seu grau de compreensão.

FONTES DE PESQUISA

IEZZI, Gelson. **Matemática: Ciências e Aplicações**. São Paulo: Saraiva, 2010.

Exercícios sobre Trigonometria:
<http://exercicios.brasilescola.com/matematica/exercicios-sobre-trigonometria-no-triangulo-retangulo.htm>. Acesso em: 12/05/2-13

História Trigonometria:
<http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm.Acesso> em 12/05/2013

Trigonometria.
Disponível em:< http://www.infoescola.com/matematica/trigonometria/>. Acesso em: 17/05/2013

Recursos de mídia utilizados:

Geogebra: http://geogebra.softonic.com.br/

Imagens:

Papiro de Rhind:< http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm> Acesso em 12/05/2013.

Vista aérea do CIEP 137-Cecília Meireles: Google Maps:< http://maps.google.com.br/>. Acesso em: 10/05/2013.