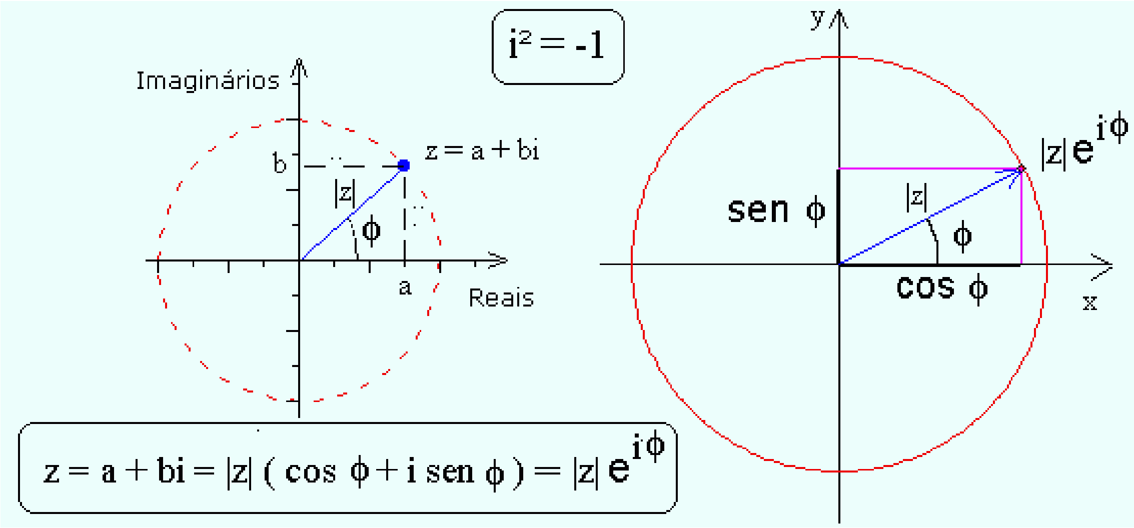
Formação Continuada em MATEMÁTICA

Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ



Matemática 3ªsérie – 3º bimestre / 2014

Plano de Trabalho I – NÚMEROS COMPLEXOS

Tarefa 1

Cursista : Nelson Gonçalves Dias Filho

Tutor : Bianca Coloneze

Sumário

INTRODUÇÃO

Para a execução deste plano de trabalho, serão necessários 8 tempos de aula para o seu desenvolvimento (aproximadamente 360 minutos) e, 2 tempos (aproximadamente 90minutos) para a sua respectiva avaliação de aprendizagem.

Tem-se por objetivo principal, permitir que os alunos percebam e entendam a aplicabilidade dos “números complexos”, para interpretação, análise e resolução de problemas.

A ideia é colocar nossos alunos diante de uma Matemática que os instigue e ao mesmo tempo ofereça algumas das condições para a busca da compreensão do mundo.

É extremamente importante utilizarmos assuntos atraentes, com bastantes exemplos e, sempre que possível e, preferencialmente ligados ao cotidiano de todos.

DESENVOLVIMENTO

Descritores associados

. H46 – reconhecer números reais em diferentes contextos;

. H36 – efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

Atividade 1

Habilidade relacionada: Revisar problemas envolvendo equações do 2º grau, mostrando gráficos, para então entrar em números complexos.

Pré requisitos: conhecimento das teorias inerentes ao assunto, resolução de cálculos em geral, entendendo, identificando e interpretando enunciados dos mais diversos problemas, principalmente os contextualizados.

Tempo de duração : 4 tempos de aula, aproximadamente 180 minutos.

Recursos educacionais utilizados : Xerox com resumo da matéria e com exercícios, laptop e datashow, para a apresentação de filme, exemplos de gráficos/plano de Argand-Gaus, definições em geral, operações com os números complexos e ainda, a apresentação de alguns sites interessantes, inerentes ao assunto, como por exemplo o conexão educação.

Possivelmente para ser assistido / visualizado extra classe.

Organização da turma : individual / duplas.

Objetivos : apresentar todos os assuntos que serão tratados dentro do tema principal e mostrar aos alunos a importância do tema que será estudado e sua aplicabilidade em assuntos do cotidiano.

Metodologia adotada : abordar os tópicos descritos conforme Roteiros de Ação 1, 2 e 3, incluindo exercícios de fixação e, incluindo resumos conforme abaixo :

Quando resolvemos a equação do 2º grau, por exemplo, $x^2 + 2x + 5 = 0$, usando a Fórmula de Bháskara, encontramos:
$\Delta = b^2 - 4ac = 2.2 - 4.1.5 = 4 - 20 = -16$
Neste caso temos que o valor do discriminante é menor que zero ($\Delta < 0$), o que torna a solução desta equação impossível no Conjunto dos Números Reais.
A necessidade de obter a solução para este tipo de equação levou matemáticos como Girolamo Cardano (1501-1576), Friedrich Gauss (1777-1855) e René Descartes (1596 – 1650) a procurar novos conjuntos em que "o quadrado de um certo número pudesse ser negativo".

1 - UNIDADE IMAGINÁRIA:
Para ampliar o conceito de número de modo que a radiciação seja sempre possível, definimos o número i, não-real, denominado unidade imaginária, que satisfaz a seguinte condição:
$i^2 = -1$ ou $i = \sqrt{-1}$

Retornando a equação anterior, como ficaríamos então?
....

Assim, esta equação tem solução no Conjunto dos Números Complexos e sua solução é:
$S = \{1 + 2i, 1 - 2i\}$

De maneira mais sistematizada, ampliou-se os conjuntos numéricos, definindo que:

- O conjunto $\mathbb{C}$ representa os números Complexos;
- O conjunto IR representa os Números Reais e este é subconjunto de $\mathbb{C}$;
- O conjunto ($\mathbb{C}$ – IR) representa os Números Complexos Imaginários que não são reais;

Observe que todo número real é complexo, entretanto, nem todo número complexo é real;

2 – FORMA ALGÉBRICA:

Dado um número complexo $z = a + bi$, em que a e b $\in$ IR , temos:

- a é chamado parte real de z e indica-se $a = Re(z)$.
- b é chamado parte imaginária de z e indica-se $b = Im(z)$.

Observe alguns exemplos:

a) $Z_1 = 3 + 4i \rightarrow a = 3$ e $b = 4$

b) $Z_2 = -2i \rightarrow a = 0$ e $b = -2$

c) $Z_3 = 5 \rightarrow a = 5$ e $b = 0$

Nota-se que se $b = 0$ e $z = a$, isto é, z é um número real com a parte imaginária igual a zero, sou seja, $Im(z) = 0$. Por outro lado se $a = 0$ e $z = bi$, isto é, z é um imaginário puro com parte real igual a zero, ou seja, $Re(z)=0$.

<u>Exercícios</u> :

1) Resolva as equações a seguir:

a) $x^2 - 4x + 5 = 0$;

b) $x^2 - 6x + 13 = 0$;

c) $x^2 = - 36$

2) Para cada número complexo abaixo destaque a parte real e a parte imaginária e identifique aquele que é imaginário puro:

a) $2 + 3i$

b) $-1 -2i$

c) $- 2i$ (imaginário puro)

d) -5

e) $-5 - 3i$

. Assinale quais destes acima são números complexos

3) Determine m $\in$ IR, de modo que $z = - 2 + (1 - m)i$ seja um número real.

4) Considere $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - i$ e $z_3 = -1 + 3i$, calcule :

a) $z_1 + z_2 + z_3$

b) $-z_1 - z_2 - z_3$

c) $2z_1 + z_2 - 2z_3$

Atividade 2

Habilidade relacionada: Resolver problemas envolvendo P.G..

Pré requisitos: conhecimento das teorias inerentes ao assunto, resolução de cálculos em geral, entendendo, identificando e interpretando enunciado dos mais diversos problemas, principalmente os contextualizados.

Tempo de duração : 4 tempos de aula, aproximadamente 180 minutos.

Recursos educacionais utilizados : Xerox com resumo da matéria e com exercícios, laptop e datashow, para a apresentação de exemplos e definição de números complexos, e ainda, a apresentação de alguns sites interessantes, inerentes ao assunto.

Possivelmente para ser assistido e analisado extra classe.

Organização da turma : individual / duplas.

Objetivos : apresentar todos os assuntos que serão tratados dentro do tema principal e mostrar aos alunos a importância do tema que será estudado e sua aplicabilidade em assuntos do cotidiano.

Metodologia adotada : abordar os tópicos descritos conforme Roteiros de Ação, incluindo exercícios de fixação, conforme abaixo.

3 – MÓDULO DE UM Nº COMPLEXO : IzI
O módulo do complexo z = a + bi, com a e b reais, é a distância do afixo (a,b) ao ponto (0,0) do plano de Argand-Gauss.
se z = a + bi então IzI = $\sqrt{a^2 + b^2}$

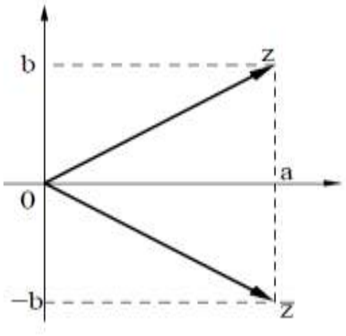
4 – CONJUGADO:
Vamos chamar de conjugado do complexo z = a + bi, com a e b reais, é o complexo $\bar{z}$ = a – bi

Observem alguns exemplos :

a) z = 5 + 3i → $\bar{z} = 5 - 3i$

b) $z = -6 - 2i \rightarrow \bar{z} = -6 + 2i$
c) $z = 10i \rightarrow \bar{z} = -10i$

Podemos observar no Plano de Argand-Gauss que os números complexos conjugados têm imagens simétricas em relação ao eixo real.



5 – POTÊNCIAS DE i :

Para calcular as potências i^n, com $n \in IN$, vamos usar as propriedades de potenciação já conhecidas em $\mathbb{C}$ e faremos:

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2 . i = -i$
$i^4 = i^2 .i^2 = (-1).(-1) = 1$
$i^5 = i^4 . i = i$
$i^6 = i^4 . i^2 = -1$
$i^7 = i4 . i^3 = -i$
$i^8 = i4 . i^4 = 1$
$i^9 = i^8 . i = i$
$i^{10} = i^8 . i^2 = -1$

Repare que os valores de i^n se repetem de 4 em 4. Então para calcular i^n, em que $n \in IN$, basta dividir o expoente n por 4 e o novo expoente de i será o resto desta divisão.

Exemplos :

a) $i^{107} = i^3 = -i$ (107 : 4 = 26, resto 3)
b) $i^{2050} = i^2 = -1$ (2050 : 4 = 26, resto 2)

Repare que para calcularmos as potências de i^n é importante sabermos as seguintes potências:

$i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$

---

6 – OPERAÇÕES COM COMPLEXOS:

Igualdade:

Se a + bi = c + di, então a = c e b = d

Adição:

a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i

Subtração:

a + bi – (c + d)i = (a – c) + (b – d)i

multiplicação:

(a + bi) . (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac – bd) + (ad + bc)i

e Divisão:

para se dividir números complexos, deve-se multiplicar ambos os números pelo conjugado do complexo do denominador. Ou seja, dados z_1 e z_2 para efetuarmos a divisão precisamos calcular da seguinte forma:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1.\overline{z}_2}{z_2.\overline{z}_2}$$

Exercícios :

1) Determine os valores numéricos de x e y de modo que
   2x – 5i = 4 + 15i

2) Dados dois números complexos $z_1 = 6 + 5i$ e $z_2 = 2 - i$, calcule :
   a) $z_1 + z_2$
   b) $z_1 - z_2$
   c) $2z_1 - 3z_2$
   d) $z_1 . z_2$
   e) $z_1 : z_2$

AVALIAÇÃO

A avaliação deve ser realizada de maneira que, tanto professor quanto aluno, possam verificar o quanto se desenvolveu cada uma das competências relacionadas aos temas estudados.

Para tanto será utilizado um tempo de aula (45 minutos).

É também apropriado verificar os acertos dos alunos nas questões relacionados com o SAERJINHO. Este será outro método de avaliação. Mesmo não havendo tal avaliação, utilizamos banco de dados destes testes anteriormente aplicados.

A cada 2 meses submetemos nossos alunos a um simulado, onde constam questões desse nível e, pertinentes ao assunto ora abordado.

Será aplicada então uma avaliação escrita individual (90 minutos) para investigação da capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos e raciocínio lógico para resolver problemas do cotidiano envolvendo todo o conteúdo dado, referente a números complexos, como um todo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ROTEIROS DE AÇÃO – Função Polinomial do 1º grau – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio - 2ºbimestre/2012

DANTE, L.R. - Matemática contexto e aplicações: volume único: ensino médio – Rio de Janeiro: Ática.

Barreto Filho, Benigno, 1952 – Matemática aula por aula: volume único: ensino médio – São Paulo: FTD, 2000.

Bosquilha, Alessandra – Manual compacto de matemática : ensino médio – Rio de Janeiro : Rideel.

Souza, Joamir Roberto de – Novo olhar matemática : 3 – 2. Ed. – São Paulo : FTD, 2013

Endereços eletrônicos acessados e/ou citados ao longo do trabalho:

http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/mod/folder/view.php?id=3241

http://www.somatematica.com.br/emedio/funcao2/funcao2.php