PLANO DE TRABALHO SOBRE ESFERA

Vinícius Luiz da Silva Oliveira
vinny_pbi@oi.com.br

1- INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem por objetivo permitir que os alunos identifiquem que o mundo que nos cerca é repleto de formas diferentes, e é a geometria espacial que estuda as figuras geométricas no espaço. Existem vários sólidos geométricos, neste plano vamos destacar o estudo de esfera, assim como sua definição, a área da superfície esférica e seu volume.

Dizem que a esfera é um sólido perfeito por não ter arestas e por apresentar sempre a mesma forma, qualquer que seja o ângulo de observação. Independentemente das opiniões pessoais e particulares, as formas esféricas podem ser vistas em diversos objetos e situações.

Como exemplo, temos a bola de futebol, que está tão presente em nosso cotidiano, e é a partir daí que darei começo ao assunto, utilizando exemplos de objetos do dia a dia.

2 - DESENVOLVIMENTO

Atividade 1:

- **DURAÇÃO PREVISTA:** 100 minutos.
- **ASSUNTO:** Geometria Espacial – Esfera.
- **OBJETIVO:** Conhecer o conceito sobre mais um tipo de sólido geométrico, a esfera e saber identifica-la.
- **PRÉ-REQUISITO:** Ponto, reta, círculo e semicírculo.
- **MATERIAL NECESSÁRIO:** Retroprojetor, livro didático, caneta, lápis, borracha.
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual
- **DESCRITORES ASSOCIADOS:** H04 – Reconhecer prismas, pirâmides, cones, cilindros e esferas por meio de suas principais características.
- **METODOLOGIA ADOTADA:** Será feita uma introdução com a utilização do retroprojetor, demonstrando a Lua cheia e um pouco de história, como segue abaixo.

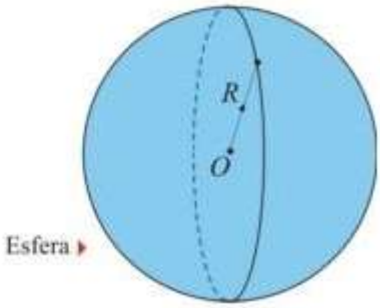
Esfera

A observação da Lua cheia nos remete à mais simétrica das figuras geométricas: a esfera.

A forma esférica é considerada desde a Antiguidade grega como padrão de equilíbrio e perfeição. Uma frase de Aristóteles (384-322 a.C.) mostra o fascínio dos filósofos gregos por essa forma: “O céu deve ser necessariamente esférico, pois a esfera, sendo gerada pela rotação do círculo, é de todos os corpos, o mais perfeito”.

- Definição

Considerando um ponto *O* do espaço e uma medida *R* (sendo R>0). Chama-se esfera de centro *O* e raio *R* o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto *O* são menores ou iguais a *R*.

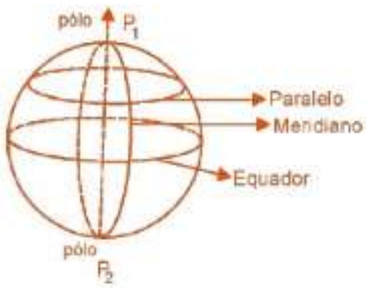


- O conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto *O* são **menores** que *R* é chamado de **interior da esfera**.

- O conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto *O* são **iguais** a *R* é chamado de **superfície esférica (é a "casca" da esfera)**.

- O conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto *O* são **maiores** que *R* é chamado de **exterior da esfera**.

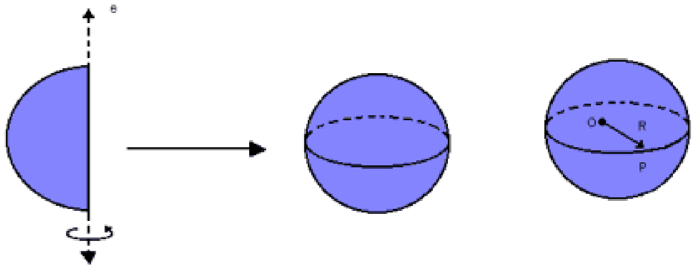
- Em uma esfera podemos destacar os seguintes elementos:



- **Centro**: é o ponto O.
- **Eixo:** é a reta que contém o centro da esfera.
- **Pólos:** São as interseções da superfície esférica com o eixo (P1e P2).
- **Equador:** é a secção perpendicular ao eixo que passa pelo centro da superfície esférica (circunferência máxima)
- **Paralelo:** é toda secção da superfície esférica paralela ao equador

- **Meridiano:** é uma secção da superfície esférica, cujo plano passa pelo eixo (é também uma circunferência máxima).

Assim como o cilindro e o cone retos, a esfera também é um sólido de revolução, que pode ser obtida ao se rotacionar um semicírculo em torno da reta (eixo) que contém seu diâmetro.



<u>Agora que já conhecemos o conceito de esfera, vamos colocar a mão na massa!</u>

<u>Invente você</u>

1) A partir dos sólidos destacados na charge acima, elabore questões, envolvendo os mesmos.

Atividade 2:

- **DURAÇÃO PREVISTA:** 100 minutos.

- **ASSUNTO:** Área da superfície esférica e volume da esfera.

- **OBJETIVO:** Calcular a área superficial da esfera, calcular o volume da esfera através de uma situação-problema.

- **PRÉ-REQUISITO:** Noções de área e volume.

- **MATERIAL NECESSÁRIO:** Folha de atividades.

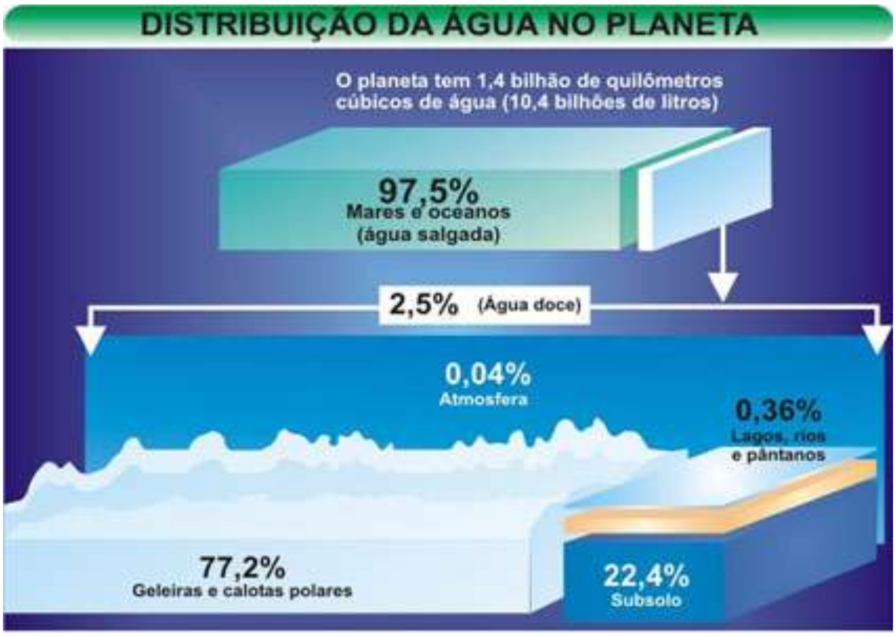
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Em dupla ou trio se necessário

- **DESCRITORES ASSOCIADOS:** H24 - Resolver problemas envolvendo a medida área total e/ou lateral de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).
  H25 - Resolver problemas envolvendo noções de volume.

- **METODOLOGIA ADOTADA:** Primeiramente será abordado o problema da água no mundo, destacando e debatendo formas e dando dicas de como economizar água.

A água no mundo

"A água faz parte do patrimônio do planeta. Cada continente cada povo, cada nação, cada região, cada cidade, cada cidadão é plenamente responsável aos olhos de todos."



- Se pudéssemos reunir em esferas toda a água do planeta, os diâmetros delas seriam:

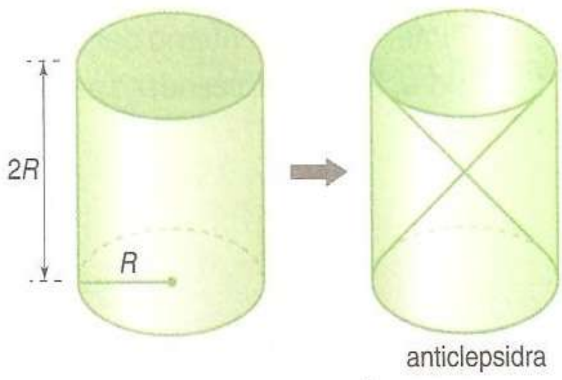
1385 km	Toda água do planeta 1,39 bilhões de km³
406 km	Água doce do planeta 35,03 milhões de km³
272 km	Água doce subterrânea 10,53 milhões de km³
58 km	Água doce superficial 104,59 mil km³

- A razão entre o volume da esfera que corresponde à água doce superficial e o volume da esfera que corresponde à água doce do planeta é:

❖ Vamos entender melhor!

Volume de uma esfera:

Para o cálculo do volume da esfera, utilizamos um sólido auxiliar denominado **anticlepsidra.** Esse sólido é obtido retirando-se de um cilindro equilátero dois cones cujas bases coincidem com as bases do cilindro e cujos vértices coincidem com o centro do cilindro.



Todo plano que secciona a esfera também secciona a anticlepsidra, determinando em ambas secções de mesmas área. Logo, pelo princípio de Cavalieri, a esfera tem o mesmo volume da anticlepsidra, isto é:

O volume V de uma esfera de raio R é dado por:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

A área da superfície esférica:

A área da superfície esférica pode ser obtida a partir da expressão:

$$S = 4\pi R^2$$

Calculando e compreendendo melhor

- Em dupla resolva a questão proposta anteriormente.

CONTINUE PRATICANDO!

1) Calcule o volume de água gasto por uma pessoa que escova os dentes 4 vezes ao dia, sabendo que a cada escovada ela consome 12 litros de água.

2) Qual é a economia mensal (em litros) gerada por uma família que gastava 135 litros de água por banho e passa a adotar o procedimento discutido anteriormente, sabendo que no total a família toma 3 banhos diários?

3) Considere a Terra como uma esfera de raio 6.370km. Qual é sua área superficial? Descobrir a área da superfície coberta de água, sabendo que ela corresponde a aproximadamente 3/4 da superfície total.

Atividade 3:

- **DURAÇÃO PREVISTA:** 100 minutos.

- **ASSUNTO:** Cunha esférica e fuso esférico.

- **OBJETIVO:** Calcular a área superficial da esfera, calcular o volume da esfera através de uma situação-problema.

- **PRÉ-REQUISITO:** Noções de área e volume.

- **MATERIAL NECESSÁRIO:** Livro didático e ficha com a atividade inicial.

- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual.

- **DESCRITORES ASSOCIADOS:** H24 - Resolver problemas envolvendo a medida área total e/ou lateral de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).
  H25 - Resolver problemas envolvendo noções de volume.

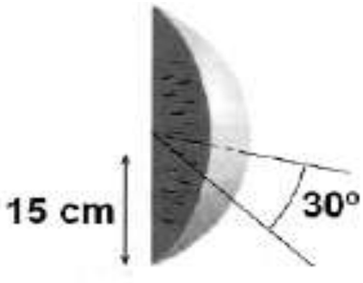
- **METODOLOGIA ADOTADA:** A aula será iniciada com uma situação problema, para assim dar continuidade ao assunto.

Cunha esférica e fuso esférico

Você já observou o encantamento das crianças com as bolhas de sabão?
O fascínio pela forma esférica aparece bem cedo em nossa vida, talvez porque muitas das mais belas construções da natureza tenham essa forma.

Além da uva, outros elementos da natureza lembram a forma de esfera, como por exemplo, a melancia, então vamos calcular!

De uma melancia com formato de uma esfera de raio 15 cm, retirou-se um pedaço em forma de cunha esférica com ângulo diedro de 30°.



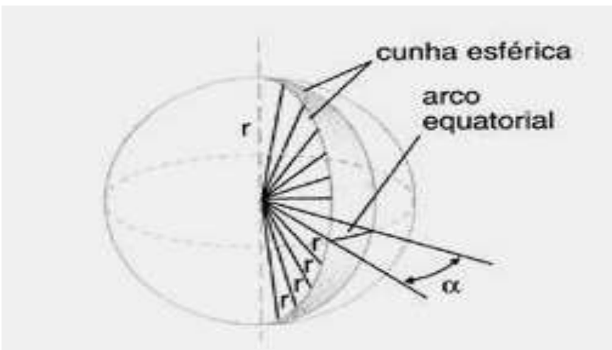
a) Calcule o volume desse pedaço.

b) Calcule a área do fuso esférico referente a esse pedaço;

c) Calcule a área total desse pedaço.

Definição

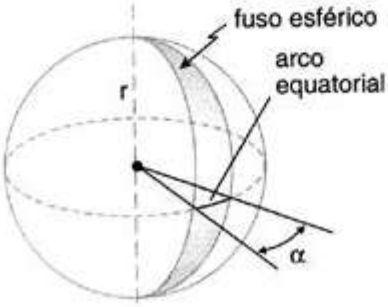
É chamado **cunha esférica** o sólido gerado pela rotação, segundo um ângulo de medida α, de um semicírculo de raio r em torno de um eixo que contém seu diâmetro.



O **volume** de uma cunha esférica é proporcional à medida α (em grau) do ângulo de rotação e pode ser calculado pela fórmula:

$$V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\pi \cdot r^3 \cdot \alpha}{270°}$$

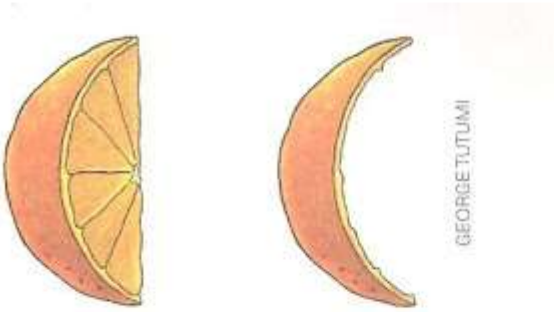
Pela rotação, segundo um ângulo de medida α, de uma semicircunferência de raio r em torno de um eixo que contém seu diâmetro, obtemos um **fuso esférico**:



A **área** de um fuso esférico é proporcional à medida α (em grau) do ângulo de rotação e pode ser calculada pela fórmula:

$$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90°}$$

Para visualizar melhor uma cunha e um fuso esférico, façamos dois cortes em uma laranja com uma faca passando pelo centro da fruta. O pedaço limitado por esses cortes lembra uma cunha esférica, e a casca contida nesse pedaço dá a ideia de fuso esférico.



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO – Utilizar exercícios do livro didático para fixação da aprendizagem.

Atividade 4:

- **DURAÇÃO PREVISTA:** 100 minutos.
- **ASSUNTO:** Geometria Espacial - Esfera.
- **OBJETIVO:** Trabalhar de forma dinâmica revisando todo o conteúdo.
- **PRÉ-REQUISITO:** Volume da esfera e volume da pirâmide.
- **MATERIAL NECESSÁRIO:** Folha de atividades, papel A4, bola de isopor de diâmetro 250 mm, régua, lápis.
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Grupos de três ou quatro alunos.
- **DESCRITORES ASSOCIADOS:** H24 - Resolver problemas envolvendo a medida área total e/ou lateral de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).
  H25 - Resolver problemas envolvendo noções de volume.
- **METODOLOGIA ADOTADA:** A aula será iniciada com a música abaixo, destacando a bola como exemplo de esfera.

É Uma Partida De Futebol (Skank)

Bola na trave não altera o placar
Bola na área sem ninguém pra cabecear
Bola na rede pra fazer o gol
Quem não sonhou em ser um jogador de futebol?

A bandeira no estádio é um estandarte
A flâmula pendurada na parede do quarto
O distintivo na camisa do uniforme
Que coisa linda é uma partida de futebol (...)

A **bola** é um objeto utilizado para lazer de uma pessoa e em diversos esportes (futebol, basquete, bolinha de gude, bocha e boliche). Na maioria dos jogos, as jogadas acontecem em função do estado da bola sendo acertada, chutada, ou arremessada pelos jogadores.

Normalmente são fabricadas em couro sintético, pois sua espessura varia muito menos do que a do couro natural, e consiste de várias camadas que são revestidas com uma cobertura à prova d'água. As bolas são finalizadas, tradicionalmente, à mão por costureiros habilidosos, apesar de que, cada vez mais as bolas são produzidas por máquinas.

Estima-se que sejam produzidas anualmente 40 milhões de bolas de futebol no mundo, número que sobe para 60 milhões em anos de Copa do Mundo de futebol. Ela é originada de um poliedro que sofre deformação até tomar a forma aproximada da esfera.

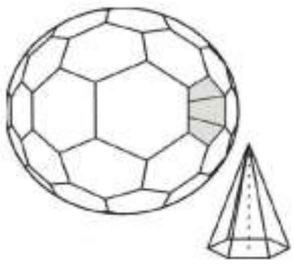
Atividade

1) Imagine que você irá montar uma pequena fábrica de bolas de futebol e precisa saber quanto de tecido (neste caso, couro) é gasto na fabricação de uma bola. Você tem algum palpite? Troque uma ideia com seu colega.

2) Vamos fazer uma estimativa da quantidade de couro necessária para fabricar uma bola? Para isso, usaremos uma bola de isopor do tamanho aproximado de uma bola de futebol. Pegue as folhas de papel A4 e cubra toda a bola, de forma que fique o mais perfeito possível e gaste a menor quantidade de papel.

3) Com uma régua, meça o comprimento e a largura do papel gasto e, em seguida, calcule sua área. Quanto de papel você precisou?

4) Imagine que a superfície de uma bola de futebol é composta por uma infinidade de hexágonos e seu interior não é oco. Fatiaremos a bola, de forma a obter pirâmides cujas bases formam a superfície esférica e os vértices se encontram no centro da esfera, como mostra a figura ao lado.



5) Como podemos escrever a área da superfície da esfera em função da área dos polígonos que a compõem?

6) E quanto ao volume da esfera, como podemos escrevê-lo em função do volume dos sólidos que a compõem?

7) Você lembra como é a fórmula do volume da pirâmide? Converse com seus colegas e escreva-a.

8) Observe novamente a figura do item 4. O que podemos afirmar quanto à altura da pirâmide? Não esqueça que cada pirâmide tem como vértice o centro da bola e a base compõe a superfície esférica.

9) Então, como podemos escrever a fórmula do volume da pirâmide em função do raio da esfera?

10) Agora que você já sabe que o volume da esfera é igual à soma do volume das n pirâmides, tente reescrevê-lo em função do raio da esfera.

11) E a que conclusão pode chegar quanto a área da esfera?

12) Agora que você já sabe como calcular a área da superfície esférica, e considerando $\pi = 3{,}14$, preencha a tabela abaixo.

Raio da esfera	Área
1	
2	
4	
8	
16	

13) Vamos voltar ao problema inicial? Meça o raio da bola de isopor e responda: quanto de couro será necessário para recobrir a esfera, melhor, a bola de futebol?

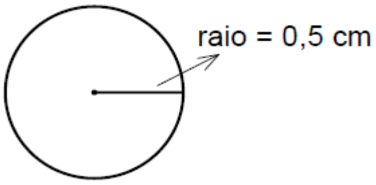
14) Compare sua resposta com a sua estimativa. Os valores são aproximados?

Atividade 5:

- **DURAÇÃO PREVISTA:** 100 minutos.
- **ASSUNTO:** Geometria Espacial - Esfera.
- **OBJETIVO:** Revisão e fixação dos assuntos estudados.
- **PRÉ-REQUISITO:** Conceito, volume e área da esfera.
- **MATERIAL NECESSÁRIO:** Folha de atividades, lápis, borracha.
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual.
- **DESCRITORES ASSOCIADOS:** H04 – Reconhecer prismas, pirâmides, cones, cilindros e esferas por meio de suas principais características. H24 - Resolver problemas envolvendo a medida área total e/ou lateral de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera). H25 - Resolver problemas envolvendo noções de volume.
- **METODOLOGIA ADOTADA:** Apresentação de questões diversificadas envolvendo os conceitos aprendidos sobre esfera, conforme exemplos abaixo.

Colocando a mão na massa

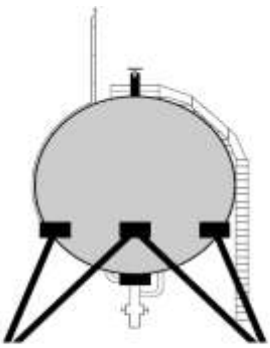
1) Qual a quantidade de chumbo necessária para a confecção de 100 bolinhas esféricas, maciças, de 1 cm de diâmetro?



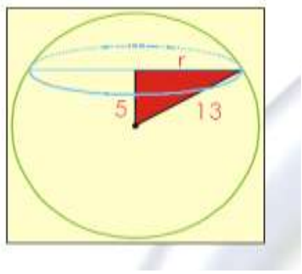
2) O raio da Terra é de aproximadamente 6.400 km. Considerando que sua forma seja uma esfera, determine o volume do planeta Terra.

3) O diâmetro da Lua é, aproximadamente, 1/4 do da Terra. Determine o volume da Lua.

4) Numa indústria química, deseja-se instalar um reservatório esférico para armazenar determinado gás. A capacidade do reservatório deve ser de 33,5 m³. Qual deve ser, aproximadamente, o raio desse reservatório?



5) Determine o volume e a área da superfície esférica de uma esfera de raio 10 cm.Calcule a área do círculo determinado por uma secção esférica feita a 5 cm do centro de uma esfera de raio 13cm.



6)Uma laranja tem a forma de uma esfera, cujo diâmetro mede 8cm. Então a área aproximada da casca dessa laranja é:

a) 190cm2. b) 200cm2. c) 210cm2. d) 220cm2. e) 230cm2.

7)Considere uma laranja como uma esfera composta de 12 gomos exatamente iguais. Se a laranja tem 8cm de diâmetro, qual é o volume aproximado de cada gomo?

a) 19cm3. b) 20cm3. c) 21cm3. d) 22cm3. e) 23cm3.

8) Calcule o volume de uma cunha esférica de raio 1 m cujo o ângulo diedro mede 20°.

9) Uma esfera de 4 cm de raio cai numa cavidade cônica de 12cm de profundidade, cuja abertura tem 5cm de raio.

a) Determine a distância do vértice da cavidade à esfera.

b) Determine a maior distância possível entre um ponto da superfície dessa esfera e o vértice da cavidade cônica.

10) Duas esferas de chumbo, uma de 3 cm e outra de 6 cm de raio, fundem-se e formam outra esfera. Calcule o raio dessa nova esfera.

AVALIAÇÃO

A avaliação é importante, no sentido da prática educacional necessária para que se analise como se está enquanto aluno, mas também como professor, verificando o que conseguiu alcançar e como vencer aquilo que não foi superado.

Todas as atividades propostas são avaliativas, na atividade 4 será avaliado o comportamento do aluno, a atenção, o trabalho em grupo, a organização e dentre outras coisas. Já as atividades do tópico 2 e 5 serão pontuadas de acordo com nível de aprendizado de cada aluno, onde será observado as facilidades e as dificuldades de cada um, para assim melhorar e atingir os objetivos das propostas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ROTEIROS DE AÇÃO E TEXTOS –Esfera – Curso de aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2° ano do Ensino Médio – 4° bimestre http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática Contexto e Aplicações. 1° edição. Volume 2. São Paulo: Ática, 2011.

SIVA, Jorge Daniel; FERNANDES; Valter dos Santos, MADELINE, Orlando Donisete. Sistema de Ensino IBEP. Novo Ensino Médio. Volume único. 2012.

PAIVA, Manoel. Matemática - Paiva. Volume 2. São Paulo: Editora Moderna, 2009.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco. Matemática Ensino Médio. 6° edição. Volume 2. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.

SOUZA, Joamir. Coleção Novo Olhar. Ensino Médio volume 2. São Paulo: Editora FDT, 2010

Endereços eletrônicos acessados de 23/11/12 à 27/11/12

http://www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=394

http://anossavidaeanatureza.blogspot.com.br/2011_08_01_archive.html

file:///C:/Documents%20and%20Settings/VIN%C3%8DCIUS/Desktop/esfera/matematica-duvida-em-geometria-espacial.htm

http://miltonborba.org/Mat_Aplic/Exerc_Geom-espacial.pdf

http://letras.mus.br/skank/72339/

http://www.amigonerd.com/esfera-e-cilindro/