FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA

Matemática 2º Ano – 3º Bimestre/2012

Plano de Trabalho 1

MATRIZES E DETERMINANTES

Cursista: Izabel Leal Vieira

Tutor: Paulo Alexandre Alves de Carvalho

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A elaboração deste plano de trabalho tem como objetivo introduzir para o aluno a definição de matrizes e sua aplicabilidade em diversos ramos, como, por exemplo, na ciência e engenharia.

Muitas vezes o aluno não vê a aplicabilidade de determinado conteúdo escolar na sua realidade, portanto, através desse plano de trabalho serão apresentadas questões que permita o aluno visualizar a utilização de matrizes. É importante que o aluno perceba essa aplicação em situações reais para que se torne um trabalho mais atrativo e com isso permita uma assimilação melhor por parte dos alunos.

É importante estimular o aluno a realmente compreender o que está sendo abordado e onde podemos aplicar o que foi aprendido e não somente memorizar. Para trabalhar esse conteúdo serão necessários 9 tempos de 50 minutos para o desenvolvimento dos conteúdos e mais 3 tempos de 50 minutos para as atividades de avaliação da aprendizagem (além da avaliação que será feita no momento da aula, durante a realização das atividades).

DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 1

HABILIDADE RELACIONADA: Compreender a definição e representação de matrizes. Denominações especiais: algumas matrizes, por suas características, recebem denominações especiais. Apresentá-las aos alunos.

PRÉ-REQUISITOS: Números reais.

TEMPO DE DURAÇÃO: 150 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático, folhas xerocadas, resumos para serem apresentados em forma de slides.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual durante as explicações e em duplas para a realização das atividades.

OBJETIVOS: Apresentar matrizes e mostrar sua aplicabilidade em diversos ramos.

METODOLOGIA ADOTADA:

Introduzir o tema mostrando ao aluno onde podemos aplicar o conteúdo que será abordado na aula. Apresentar exemplos de em quais ramos podemos trabalhar com matrizes para que assim ele perceba que é um conteúdo utilizado em outros setores e não somente em sala de aula. Apresentar as matrizes com denominações especiais. Veja os tópicos abaixo.

Estudo das matrizes

Definição:

As matrizes são tabelas de números reais utilizadas em quase todos os ramos da ciência e da engenharia.

Várias operações executadas por cérebros eletrônicos são computações por matrizes. São utilizadas na Estatística, na Economia, na Física Atômica, etc.

Veja os exemplos abaixo.

1) Considere a tabela abaixo, que indica o número de vendas efetuadas por uma agência de automóveis durante o primeiro trimestre de determinado ano.

	Janeiro	**Fevereiro**	**Março**
Monza	20	18	25
Fiat	12	10	15
Gol	15	9	20
Voyage	18	15	21

Se quisermos saber a quantidade de carros Voyage vendidos em janeiro, iremos procurar o número que está na quarta linha e na primeira coluna da tabela.

No quadro indicado, os números colocados nas disposições horizontais formam o que denominamos **linha** e os colocados das disposições verticais chamamos de **coluna**.

2) Em 2008, a expectativa de vida do brasileiro era de 73 anos. É possível detalhar mais essa informação, conforme exposto na tabela abaixo, que apresenta a expectativa de vida no Brasil, em 2008, segundo as regiões (numeradas de 1 a 5) e gêneros (numerados de 1 a 2).

Expectativa de vida no Brasil					
	(1) *Norte*	*(2)* *Nordeste*	*(3)* *Sudeste*	*(4)* *Sul*	*(5)* *Centro-Oeste*
(1) Homens	69,1	66,5	70,4	71,6	70,6
(2) Mulheres	74,9	73,8	78,5	78,5	77,5

Observe a tabela. Se quisermos saber, por exemplo, qual era a expectativa de vida de uma mulher (gênero 2) residente na região Sul (região 4), basta olhar o cruzamento da linha 2 com a coluna 4 e encontraremos 78,5 anos.

As tabelas são muito úteis no cotidiano, pois permitem a visualização simplificada e global do cruzamento de duas ou mais informações sobre um ou mais objetos de estudo. Essa idéia também é aplicada nas Ciências, com o mesmo objetivo, isto é, simplificar a representação do cruzamento de informações a respeito de objetos de estudo.

Em Matemática, as tabelas como essa são chamadas de matrizes, sobre as quais definiremos a relação de igualdade e algumas operações.

Vamos agora considerar uma tabela de números dispostos em linhas e colunas, como nos exemplos acima, mas colocados entre parênteses ou colchetes:

$$\begin{array}{c} \text{linha} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{8 \quad 7 \quad 9 \quad 8} \\ 6 \quad 6 \quad 7 \quad 6 \\ 4 \quad 8 \quad 5 \quad 9 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 8 \\ 6 & 6 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 5 & 9 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & \uparrow & & \\ & \text{coluna} & & \end{array} \end{array}$$

Em tabelas assim dispostas, os números são os elementos. As linhas são enumeradas *de cima para baixo* e as colunas, *da esquerda para direita:*

$$\begin{array}{r} 1^{a} \text{ linha} \rightarrow \\ 2^{a} \text{ linha} \rightarrow \\ 3^{a} \text{ linha} \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & \sqrt{3} & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1^{a} \text{ coluna} & 2^{a} \text{ coluna} & 3^{a} \text{ coluna} \end{array} \end{array}$$

Tabelas com **m** linhas e **n** colunas (**m** e **n** números naturais diferentes de 0) são denominadas matrizes m x n. Na tabela anterior temos, portanto, uma matriz 3 x 3.

Veja mais alguns exemplos:

- $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 30 & -3 & 17 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 3
- $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 2

<u>Notação geral</u>

Costuma-se representar as matrizes por *letras maiúsculas* e seus elementos por *letras minúsculas*, acompanhadas por *dois índices* que indicam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa.

Assim, uma matriz **A** do tipo m x n é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{n3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou, abreviadamente, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, em que **i** e **j** representam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa. Por exemplo, na matriz anterior, $\mathbf{a_{23}}$ é o elemento da 2ª linha e da 3ª coluna.

Na matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{cases} a_{11} = 2, a_{12} = -1 \text{ e } a_{13} = 5 \\ a_{21} = 4, a_{22} = \frac{1}{2} \text{ e } a_{23} = \sqrt{2} \\ a_{31} = 0, a_{32} = 1 \text{ e } a_{33} = -2 \end{cases}$$

Ou na matriz B = [-1 0 2 5], temos: $a_{11} = -1$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 2$ e $a_{14} = 5$.

Denominação das matrizes

Algumas matrizes, por suas características, recebem denominações especiais.

- **Matriz linha**: matriz do tipo 1 x n, ou seja, com uma única linha. Por exemplo, a matriz A =[4 7 -3 1], do tipo 1 x 4.

- **Matriz coluna**: matriz do tipo m x 1, ou seja, com uma única coluna. Por exemplo, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, do tipo 3 x 1

- **Matriz quadrada:** matriz do tipo n x n, ou seja, com o mesmo número de linhas e colunas; dizemos que a matriz é de ordem **n**. Por exemplo, a matriz $C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ é do tipo 2 x 2, isto é, quadrada de ordem 2.

Numa matriz quadrada definimos a diagonal principal e a diagonal secundária. A principal é formada pelos elementos $\mathbf{a_{ij}}$ tais que i = j. Na secundária, temos i + j = n + 1.

Veja:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonal principal $i = j$

diagonal secundária $i + j = n + 1$

Observe a matriz a seguir:

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

ordem da matriz

diagonal principal

diagonal secundária

$a_{11} = -1$ é elemento da diagonal principal, pois $i = j = 1$

$a_{31} = 5$ é elemento da diagonal secundária, pois $i + j = n + 1$ ($3 + 1 = 3 + 1$)

- **Matriz nula**: matriz em que todos os elementos são nulos; é representada por $0_{m \times n}$.

Por exemplo, $0_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- **Matriz diagonal**: matriz quadrada em que todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos. Por exemplo:

a) $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B_{3x3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

- **Matriz identidade**: matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são nulos; é representada por $\mathbf{I_n}$, sendo **n** a ordem da matriz. Por exemplo:

$$a)\ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Matriz transposta**: matriz A^t obtida a partir da matriz A trocando-se ordenadamente as linhas por colunas ou as colunas por linhas. Por exemplo:

$$Se\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix},\ então\ A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desse modo, se a matriz **A** é do tipo m x n, $\mathbf{A^t}$ é do tipo n x m.

Note que a 1ª linha de **A** corresponde à 1ª coluna de $\mathbf{A^t}$ e a 2ª linha de A corresponde à 2ª coluna de $\mathbf{A^t}$.

- **Matriz oposta**: matriz **-A** obtida a partir de **A** trocando-se o sinal de todos os elementos de **A**. Por exemplo,

$$Se\ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix},\ então\ -A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

<u>Atividades para serem trabalhadas</u>

1) Para controlar a alimentação, uma pessoa fez uma pesquisa sobre a quantidade de energia e de proteínas presentes em 100 gramas de algum tipo

de carne. Constatou que 100 g de filé de frango grelhado têm 159 kcal de energia e 32 g de proteína; a sardinha assada tem 164 kcal e 32,2 g de proteína; e o contrafilé grelhado tem 278 kcal e 32,4 g de proteína.

a) Organize esses dados em uma tabela.

b) Escreva uma matriz correspondente a essa tabela.

c) Qual é o tipo dessa matriz?

→ Junte-se a um colega e comparem os resultados. Nesse caso, os dados ficaram mais bem organizados no texto ou na tabela? Justifiquem sua resposta.

2) Reúna-se com um colega. Exemplifiquem e escrevam com suas próprias palavras a definição de:

a) matriz quadrada

b) matriz identidade

c) matriz nula

d) matrizes transpostas

3) A temperatura corporal de um paciente foi medida, em grau Celsius, três vezes ao dia, durante cinco dias. Cada elemento a_{ij} da matriz abaixo corresponde à temperatura observada no instante i do dia j.

$$\begin{pmatrix} 35{,}6 & 36{,}4 & 38{,}6 & 38{,}0 & 36{,}0 \\ 36{,}1 & 37{,}0 & 37{,}2 & 40{,}5 & 40{,}0 \\ 35{,}5 & 35{,}7 & 36{,}1 & 37{,}0 & 39{,}2 \end{pmatrix}$$

Determine:

a) o instante e o dia em que o paciente apresentou a maior temperatura;

b) a temperatura média do paciente no terceiro dia de observação.

<u>Utilizar também exercícios e situações-problema existentes no livro didático para finalizar essa atividade.</u>

ATIVIDADE 2

HABILIDADE RELACIONADA: Compreender igualdade de matrizes e resolver problemas envolvendo igualdade de matrizes. **H33 -** Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes: adição e subtração.

PRÉ-REQUISITOS: Definição de matriz, operações elementares com números reais.

TEMPO DE DURAÇÃO: 200 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folha xerocada, livro didático, quadro, explicações.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual

OBJETIVOS: Trabalhar igualdade de matrizes. Utilizar as operações da adição e subtração de matrizes. Resolver problemas com igualdade de matrizes, bem como adição e subtração de matrizes abordando questões com informações partindo da realidade.

METODOLOGIA ADOTADA:

Trabalhar a igualdade de matrizes e também as operações da adição e subtração. Veja abaixo.

Igualdade de matrizes

Duas matrizes, A e B, do mesmo tipo m x n, são iguais se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são iguais:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \; para \; \text{todo } 1 \leq i \leq m \text{ e todo } 1 \leq j \leq n$$

$$Se \; A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & b \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & c \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } A = B, \text{ então } c = 0 \text{ e } b = 3$$

.

Exemplo: Determine o valor de x e y para que se tenha A = B, sendo:

$$A = \begin{vmatrix} x+3 & 11 \\ 9 & 2y-7 \end{vmatrix} \quad e \quad B = \begin{vmatrix} -5 & 11 \\ 9 & 13 \end{vmatrix}$$

<u>Solução</u>: Observe que as duas matrizes já possuem a mesma ordem, 2 x 2. Logo, temos que:

$$A = B \rightarrow \begin{vmatrix} x+3 & 11 \\ 9 & 2y-7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 11 \\ 9 & 13 \end{vmatrix}$$

Para que a matriz A seja igual à matriz B, deveremos ter as seguintes igualdades:

$$x + 3 = -5 \rightarrow x = -5 - 3 = -8$$

$$2y - 7 = 13 \rightarrow 2y = 13 + 7 \rightarrow y = \frac{20}{2} = 10$$

Portanto, x = – 8 e y = 10.

Operações envolvendo matrizes

<u>Adição</u>

Acompanhe a situação a seguir.

Uma indústria de televisores possui duas filiais, A e B. Cada uma delas produz o modelo 1 e o modelo 2 de televisor. As tabelas abaixo apresentam as produções das filiais nos três primeiros dias do mês de fevereiro.

Produção da filial A			
	Dia 1	*Dia 2*	*Dia 3*
Modelo 1	49	60	70
Modelo 2	90	48	73

Produção da filial B			
	Dia 1	*Dia 2*	*Dia 3*
Modelo 1	76	80	45
Modelo 2	93	60	50

Para representar a produção total diária das duas filiais, nesse período, podemos construir uma tabela em que cada posição apresente a soma dos valores correspondentes às duas tabelas anteriores, ou seja:

Produção das filiais A e B			
	Dia 1	*Dia 2*	*Dia 3*
Modelo 1	125	140	115
Modelo 2	183	108	123

Essa situação poderia ser representada pela seguinte operação com matrizes:

$$\begin{bmatrix} 49 & 60 & 70 \\ 90 & 48 & 73 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 76 & 80 & 45 \\ 93 & 60 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 & 140 & 115 \\ 183 & 108 & 123 \end{bmatrix}$$

A matriz resultante é chamada de *matriz soma*, que definimos a seguir:

A soma de duas matrizes do mesmo tipo, A e B, é a matriz em que cada elemento é a soma dos seus correspondentes em A e em B.

Exemplos:

- $$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 4+(-1) \\ 0+0 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

- $$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+1 & 0+1 \\ 0+1 & 1+(-1) & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Observação: A + B existe se, e somente se, **A** e **B** forem do mesmo tipo.*

Propriedades

Sendo **A**, **B** e **C** matrizes do mesmo tipo (m x n), temos as seguintes propriedades para a adição:

a) comutativa: A + B = B + A

b) associativa: (A + B) + C = A + (B + C)

c) elemento neutro: A + 0 = 0 + A = A, sendo 0 a matriz nula m x n

d) elemento oposto: A + (- A) = (-A) + A = 0

Subtração

Voltando ao exemplo da indústria de televisores, se quisermos uma matriz que compare a produção da filial A com a produção da filial B, podemos construir a matriz D_{2x3} , na qual cada elemento d_{ij} seja a diferença entre seus elementos correspondentes nas matrizes A e B, nesta ordem:

$$\begin{pmatrix} 49-76 & 60-80 & 70-45 \\ 90-93 & 48-60 & 73-50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -20 & 25 \\ -3 & -12 & 23 \end{pmatrix}$$

Note, por exemplo, que:

- comparando as produções do modelo 1 no dia 2 de fevereiro, d_{12}, constatamos que a filial A produziu 20 televisores a menos que a filial B;
- comparando as produções do modelo 2 no dia 3 de fevereiro, d_{23}, constatamos que a filial A produziu 23 televisores a mais que a filial B.

A matriz D é chamada de matriz diferença entre A e B**.**

$$\boxed{A - B = A + (- B)}$$

Observe:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 3+(-1) & 0+(-2) \\ 4+0 & -7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Atividades para serem trabalhadas

1) Duas regiões, A e B, são produtoras de arroz e soja. Suas produções, em três anos consecutivos, são descritas pelas matrizes

A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 8 & 12 & 11 \\ 15 & 20 & 18 \end{pmatrix}$, respectivamente, em que são obedecidas as convenções:

•o arroz e a soja são denominados “grão 1” e “grão 2”, respectivamente;

•os anos considerados, em ordem crescente, são numerados por 1, 2 e 3;

•em cada matriz, o elemento x_{ij} representa a produção, em milhões de toneladas, do grão i no ano j.

a) Qual foi a produção de arroz da região A no ano 3?

b) Qual foi a produção de arroz da região B no ano 3?

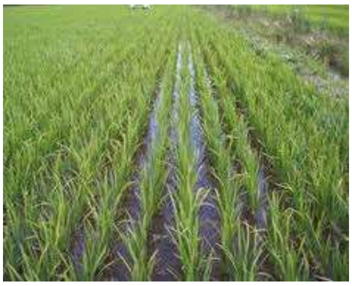
c) Qual foi a produção de arroz das duas regiões, juntas, no ano 3?

d) Qual foi a produção de soja das duas regiões, juntas, no ano 3?

e) Represente por uma matriz C a produção anual desses grãos das duas regiões juntas, no período considerado.

f) Construa uma matriz D que compare a produção anual desses grãos da região A com a da região B, no período considerado.

Plantação de soja



Plantação de arroz

Espiguetas de arroz

2) Escreva qual a condição necessária para que seja possível efetuar adição ou subtração entre duas matrizes.

3) Uma rede é formada pelas lojas A e B, concessionárias de automóveis. Em um estudo sobre a aceitação de dois novos modelos nos quatro primeiros dias de fevereiro, foram obtidos os resultados:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

sendo que:

•a matriz A descreve o desempenho da loja A, de modo que cada elemento a_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo i no dia j;
•a matriz B descreve o desempenho da loja B, de modo que cada elemento b_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo i no dia j.

a) Quantas unidades do modelo 2 foram vendidas no dia 3 de fevereiro pela loja A?

b) Quantas unidades do modelo 1 foram vendidas no dia 2 de fevereiro pela loja B?

c) Para o período considerado, construa uma matriz que descreva, dia a dia, as vendas de cada modelo nas duas lojas juntas.

d) Para o período considerado, construa uma matriz que compare o desempenho da loja A em relação à loja B nas vendas diárias de cada modelo.

Utilizar outros exercícios e situações-problema existentes do livro didático para finalizar essa atividade.

Atividade 3

HABILIDADE RELACIONADA: **H33 -** Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes: efetuar a multiplicação de matriz por um número real K; efetuar a multiplicação entre duas matrizes.

PRÉ-REQUISITOS: Definição de matriz, operações elementares com números reais.

TEMPO DE DURAÇÃO: 200 minutos

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Folha xerocada, livro didático, quadro, explicações.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual

OBJETIVOS: Utilizar a multiplicação de um número real por uma matriz e a multiplicação entre duas matrizes. Resolver problemas com a multiplicação de matrizes abordando questões contextualizadas.

METODOLOGIA ADOTADA:

Trabalhar a multiplicação de um número real por uma matriz e a multiplicação entre duas matrizes. Veja abaixo.

Multiplicação de um número real por uma matriz

Considere que a filial A de uma determinada empresa de televisores decida dobrar sua produção diária de televisores no mesmo período do ano seguinte.

$A = \begin{pmatrix} 49 & 60 & 70 \\ 90 & 48 & 73 \end{pmatrix}$ temos, $2A = \begin{pmatrix} 98 & 120 & 140 \\ 180 & 96 & 146 \end{pmatrix}$

Note que, para obter essa matriz, cada elemento da matriz A foi multiplicado por dois. Nesse caso, efetuamos uma multiplicação de um número real por uma matriz, que definimos a seguir.

O produto de um número real k por uma matriz A é a matriz em que cada elemento é o produto de seu correspondente em A pelo número k.

Observe o seguinte exemplo:

$$3.\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 & 3.7 \\ 3.(-1) & 3.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

Um chef de cozinha de um restaurante avaliou os custos das quantidades de frutas descritas na tabela 1 com dois fornecedores, cujos orçamentos são descritos pela tabela 2:

	Maça (fruta 1)	*Uva (fruta 2)*	*Laranja (fruta 3)*	*Mamão (fruta 4)*
Quantidade (em quilograma)	25	30	100	20

Tabela 1

	Preço por quilograma (em real)	
	Fornecedor 1	*Fornecedor 2*
Maça	2,00	2,40
Uva	3,50	3,00
Laranja	0,80	0,85
Mamão	1,70	1,80

Tabela 2

Essas tabelas podem ser representadas pelas matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 30 & 100 & 20 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2,00 & 2,40 \\ 3,50 & 3,00 \\ 0,80 & 0,85 \\ 1,70 & 1,08 \end{pmatrix}$$

Em que:

•cada elemento a_{ij} da matriz A indica a quantidade da fruta j que deve ser comprada;

•cada elemento b_{ij} da matriz B representa o preço por quilograma da fruta i no fornecedor j.

Para calcular o orçamento de cada fornecedor, efetuamos as seguintes operações:

Fornecedor 1: 25 . 2,00 + 30 . 3,50 + 100 . 0,80 + 20 . 1,70 = 269,00

Fornecedor 2: 25 . 2,40 + 30 . 3,00 + 100 . 0,85 + 20 . 1,80 = 271,00

Representamos esses resultados em uma matriz C, tal que cada elemento c_{ij} representa o orçamento com o fornecedor j, temos:

$$C = \begin{pmatrix} 269{,}00 & 271{,}00 \end{pmatrix}$$

A matriz C é chamada de matriz produto de A por B, nessa ordem, e a representamos por A . B = C ou AB = C. Desse modo, os dados numéricos dessa consulta de preços podem ser representados por:

$$\begin{pmatrix} 25 & 30 & 100 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}00 & 2{,}40 \\ 3{,}50 & 3{,}00 \\ 0{,}80 & 0{,}85 \\ 1{,}70 & 1{,}08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 269{,}00 & 271{,}00 \end{pmatrix}$$

Assim, o produto das matrizes $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ em que cada elemento $\mathbf{c_{ij}}$ é obtido por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima coluna **B**.

Vamos multiplicar a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ para entender como se obtém cada $\mathbf{C_{ij}}$:

- 1ª linha e 1ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{c_{11}}{\boxed{1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4}} & \\ & \end{bmatrix}$$

- 1ª linha e 2ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & \boxed{3} \\ 4 & \boxed{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 . (-1) + 2.4 & \underset{}{\overset{c_{12}}{\boxed{1.3 + 2.2}}} \\ & \end{bmatrix}$$

- 2ª linha e 1ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 \quad 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{4} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 . (-1) + 2.4 & 1.3 + 2.2 \\ \underset{c_{21}}{\boxed{3.(-1) + 4.4}} & \end{bmatrix}$$

- 2ª linha e 2ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 \quad 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & \boxed{3} \\ 4 & \boxed{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 . (-1) + 2.4 & 1.3 + 2.2 \\ 3.(-1) + 4.4 & \underset{c_{22}}{\boxed{3.3 + 4.2}} \end{bmatrix}$$

Assim, $A.B = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}$.

Observe que:

$$B.A = \begin{bmatrix} \boxed{-1 \quad 3} \\ \boxed{4 \quad 2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{(-1).1 + 3.3} & \boxed{(-1).2 + 3.4} \\ \boxed{4.1 + 2.3} & \boxed{4.2 + 2.4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

Portanto, $A.B \neq B.A$ ou seja, para a multiplicação de matrizes não vale a propriedade comutativa.

Vejamos outro exemplo com as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$:

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+3(-2) & 2.2+3.0 & 2.3+3.4 \\ 0.1+1(-2) & 0.2+1.0 & 0.3+1.4 \\ -1.1+4(-2) & -1.2+4.0 & -1.3+4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 18 \\ -2 & 0 & 4 \\ -9 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+2.0+3(-1) & 1.3+2.1+3.4 \\ -2.2+0.0+4(-1) & -2.3+0.1+4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 17 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$$

Da definição, temos que a matriz produto A . B só existe se o número de colunas de **A** for igual ao número de linhas de **B**:

$$A_{m\,x\,p} . B_{p\,x\,n} = (A.B)_{m\,x\,n}$$
$$=$$

A matriz produto terá o número de linhas de **A (m)** e o número de colunas de **B(n)**:

- Se $A_{3\,x\,2}$ e $B_{2\,x\,5}$, então $(A . B)_{3\,x\,5}$
- Se $A_{4\,x\,1}$ e $B_{2\,x\,3}$, então não existe o produto
- Se $A_{4\,x\,2}$ e $B_{2\,x\,1}$, então $(A . B)_{4\,x\,1}$

<u>Propriedades</u>

Verificadas as condições de existência para a multiplicação de matrizes, valem as seguintes propriedades:

a) associativa: (A . B) . C = A . (B . C)

b) distributiva em relação à adição: A . (B + C) = A . B + A . C ou (A + B) . C = A . C + B . C

c) elemento neutro: A . I_n = I_n . A = A, sendo $\mathbf{I_n}$ a matriz identidade de ordem **n**.

Vimos que a propriedade comutativa, geralmente, não vale para a multiplicação de matrizes. Não vale também o anulamento do produto, ou seja: sendo $0_{m\,x\,n}$ uma matriz nula, A .B = $0_{m\,x\,n}$ não implica, necessariamente, que A = $0_{m\,x\,n}$ ou B = $0_{m\,x\,n}$.

Atividades para serem trabalhadas

1) Considere que uma fábrica de eletrodomésticos tenha uma produção no ano de 2012, referente aos meses de junho, julho e agosto, apresentada na matriz P abaixo. Essa mesma fábrica deseja triplicar a produção desses eletrodomésticos para o ano seguinte no mesmo período.

Calcule qual será sua nova produção sabendo que a linha 1 representa liquidificadores do tipo A, a linha 2 representa liquidificadores do tipo B e as colunas 1, 2 e 3 representam os meses de junho, julho e agosto, respectivamente.

$$P = \begin{pmatrix} 180 & 260 & 170 \\ 290 & 250 & 190 \end{pmatrix}$$

2) Uma fábrica produz dois tipos de peças, P1 e P2. Essas peças são vendidas a duas empresas, E1 e E2. O lucro obtido pela fábrica com a venda de cada peça P1 é de R$ 3,00 e de cada peça P2 é de R$ 2,00. A matriz abaixo fornece a quantidade de peças P1 e P2 vendidas a cada uma das empresas, E1 e E2, no mês de novembro.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} P1 & P2 \end{array} \\ \begin{array}{c} E1 \\ E2 \end{array} & \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 15 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

A matriz $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, em que x e y representam os lucros, em real, obtidos pela fábrica, no referido mês, com a venda das peças às empresas E1 e E2, respectivamente, é:

a) $\begin{pmatrix} 35 \\ 20 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 90 \\ 48 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 76 \\ 69 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 84 \\ 61 \end{pmatrix}$

3) Escreva qual a condição necessária para que seja possível efetuar uma multiplicação entre duas matrizes.

4) Milho, soja e feijão foram plantados nas regiões P e Q com a ajuda dos fertilizantes X, Y e Z. A matriz A indica a área plantada de cada cultura, em hectare, por região:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{milho} & \text{soja} & \text{feijão} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 50 & 20 & 20 \\ 40 & 10 & 30 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ P \\ Q \end{array}$$

A matriz B indica a massa usada de cada fertilizante, em quilograma, por hectare, em cada cultura:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 20 & 15 \\ 15 & 20 & 20 \\ 30 & 20 & 30 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{milho} \\ \text{soja} \\ \text{feijão} \end{array}$$

a) Calcule a matriz C = AB.

b) Explique o significado de C_{23}, o elemento da 2ª linha e 3ª coluna da matriz C.


Saco de feijão


Saco de milho


Saco de soja

<u>Utilizar outros exercícios e situações-problema existentes do livro didático para finalizar essa atividade.</u>

AVALIAÇÃO

A avaliação dos alunos ocorrerá durante todas as atividades (1, 2 e 3). Os alunos serão avaliados no momento da realização dos exercícios, como eles se envolveram com as atividades. Serão observadas as dificuldades apresentadas por eles no momento de fazer os exercícios propostos e através dessa observação serão dadas explicações extras que possam auxiliá-los. O aluno que apresentar mais facilidade na resolução das questões também poderá auxiliar àqueles com maior dificuldade.

Os conhecimentos também serão avaliados através de um teste escrito em duplas com duração de 50 minutos – 1 tempo de aula, que abrangerá o que foi estudado na Atividade 1.

Será aplicado também outro teste escrito com consulta e individual com duração de 100 minutos – 2 tempos de aula, que abrangerá o que foi estudado nas Atividades 2 e 3.

Através dessas avaliações, que envolvem professor e aluno pode-se observar como foram desenvolvidas as competências trabalhadas e a compreensão dos alunos dos conteúdos abordados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ROTEIROS DE AÇÃO – Matrizes e Determinantes - Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 3º bimestre – disponível em http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR, José Ruy – Matemática Fundamental - 2º grau: volume único – São Paulo: FTD, 1994.

PAIVA, Manoel – Matemática Paiva: volume 2 – 1ª edição – São Paulo: Moderna, 2009.

Endereços eletrônicos acessados de 24/08/2012 a 01/09/2012:
http://www.colegioweb.com.br/matematica/exemplo.html
http://www.somatematica.com.br/emedio/matrizes/matrizes.php