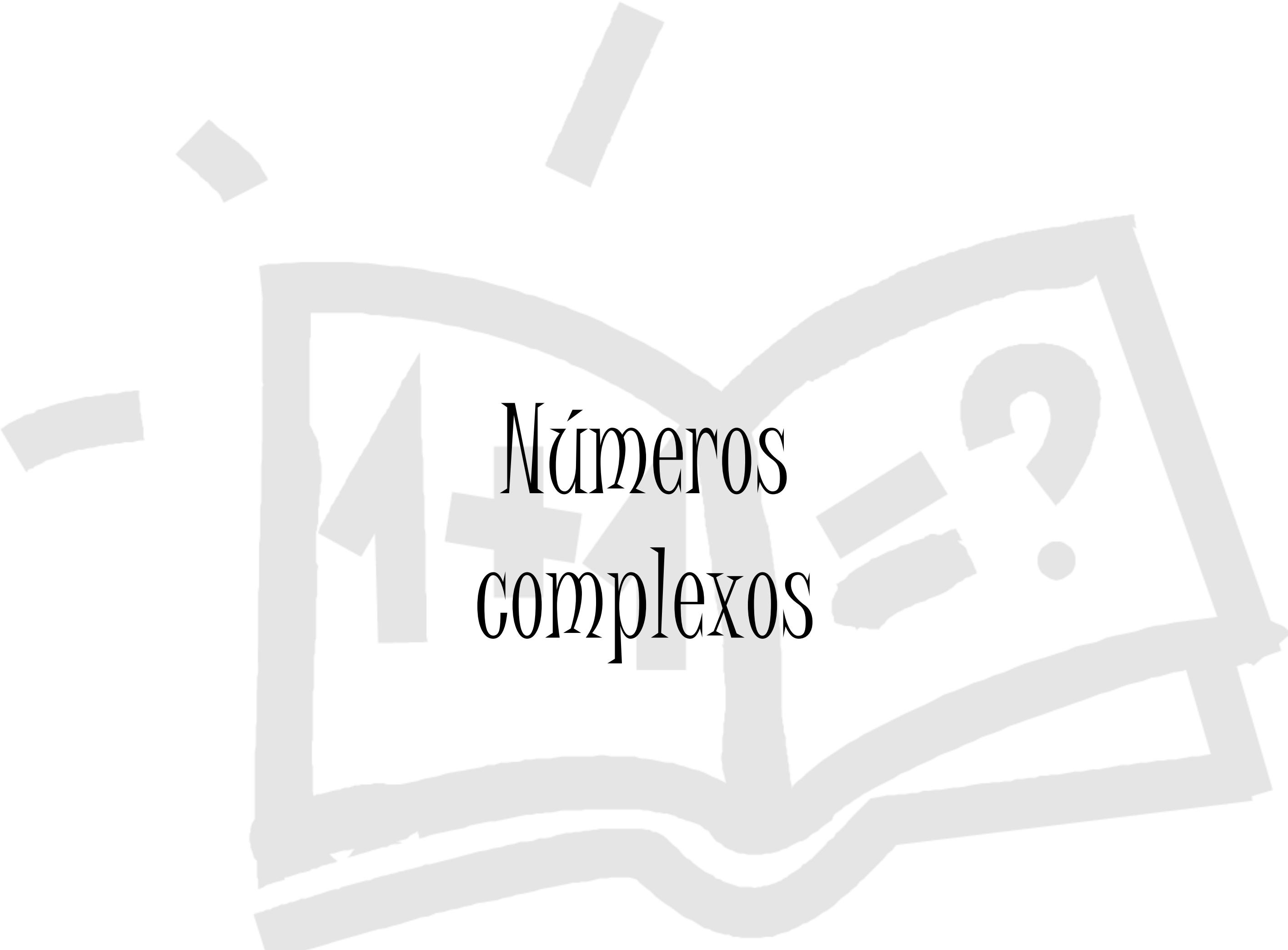
Formação Continuada em Matemática
Fundação CECIERJ/CEDERJ

Matemática – 3º ano – 3º Bimestre/2013
PLANO DE TRABALHO 1



Números complexos

Tarefa 1
Cursista: Aline Gabry Santos
Tutor: Bianca Coloneze

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Como professor, temos todos enfrentado diversos problemas em nossa prática diária, porém o maior deles diz respeito a conseguir a atenção dos alunos para o conteúdo abordado.

Aquela “velha” aula do conteúdo aos exercícios já não é mais suficiente para atrair a atenção dos alunos (ou nunca foi). Podemos perceber que a cada ano que passa menos alunos têm interesse por esse tipo de aula. Por isso proponho este plano de estudo, cujo objetivo é facilitar o aprendizado dos alunos e, consequentemente, uma melhor aquisição e construção do conhecimento por parte deles.

Os números complexos, normalmente são um conteúdo visto isoladamente de qualquer outro conteúdo. A única explicação para a sua existência sempre foi para resolver o problema na solução de uma raiz quadrada negativa.

Neste Plano de Trabalho será abordada uma forma que priorize a construção do aluno em torno do conceito. Para isso, será usado o software GeoGebra, passando por um reforço na resolução de equações do 2º grau, uma visita às equações do 3º grau, até à sua representação geométrica e trigonométrica.

Convém aqui, destacar, que todos os comentários formatados em verde são para orientar a prática docente (como comentários e resoluções).

DESENVOVIMENTO

Atividade 1

HABILIDADE RELACIONADA: H46 – Reconhecer números reais em diferentes contextos.

PRÉ-REQUISITO: Operações elementares com números reais; identificação de raízes de uma função a partir da sua representação gráfica; determinação das raízes de uma função a partir da sua representação algébrica; produtos notáveis.

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos.

RECURSOS UTILIZADOS: Folha de atividades, notebook com GeoGebra instalado, Datashow e arquivo A1R1.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Organizados em duplas.

OBJETIVOS: Apresentar os números complexos como mais uma ferramenta matemática.

METODOLOGIA:

Levar os alunos para o auditório e dispô-los em duplas, entregando a cada aluno a folha de atividade abaixo.

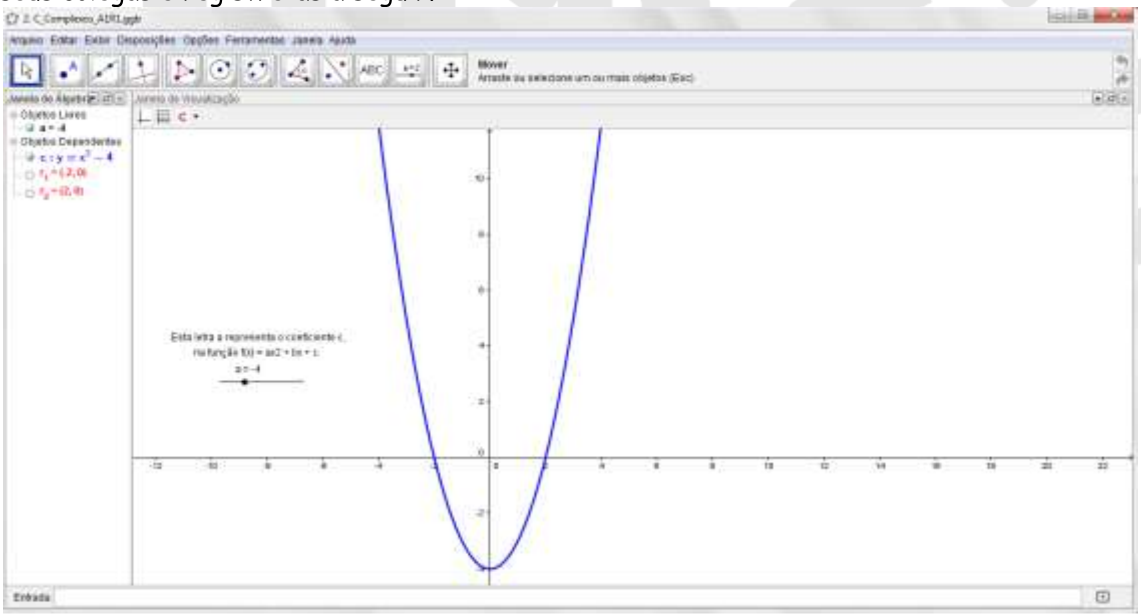
Abrir o arquivo A1R1, do GeoGebra e seguir o roteiro.

Representação gráfica de números reais

Nessa atividade, você observará as imagens projetadas por seu professor. Essas imagens foram geradas num programa chamado Geogebra, que facilita o nosso trabalho, pois dando alguns comandos ele traça os gráficos. Para começar, vamos relembrar o que você já estudou há algum tempo: a determinação das raízes de uma função a partir da sua representação gráfica.

Observe o gráfico projetado.

1) Você lembra o nome desse gráfico? A qual função ele está associado? Troque ideias com seus colegas e registre-as a seguir.



Espera-se que os alunos respondam que o gráfico é uma parábola, associada a uma função quadrática. Em seguida, espera-se que eles percebam que a função representada é $f(x) = x^2 - 4$.

Incentivar os alunos a apresentarem sua opinião, conduzindo uma pequena discussão sobre o que já foi estudado sobre funções quadráticas.

Fiz uma observação no próprio arquivo do GeoGebra, explicando que o controle que varia a, na verdade se refere a variação do coeficiente c na função quadrática. Do

jeito que estava ficaria complicado para os alunos relacionarem a ideia de que o gráfico corta o eixo y no valor de c.

2) O gráfico projetado é a representação gráfica de uma função do tipo f(x) = ax2 + bx + c. Repare que na tela temos um controle o qual permite variar o valor de a (coeficiente c). Indique a lei de formação da função nesse caso.

Aproveitar esse momento para relembrar a função do coeficiente c na função do 2º grau: ponto em que o gráfico corta o eixo y.

3) Esse gráfico tem interseção com o eixo x?

4) Você é capaz de indicar as raízes dessa função? Indique-as.

Para a realização do item 5, posicionar o parâmetro a no valor – 1.

5) Observe o gráfico formado quando o coeficiente c vale – 1. E agora:

a. O gráfico tem interseção com o eixo x?

b. A interseção é do mesmo tipo do gráfico anterior?

c. Você consegue indicar as raízes reais dessa função? Quais são?

Os alunos devem perceber que a parábola intersecta o eixo das abscissas em dois pontos, cujas abscissas ($x_1 = -2$ e $x_2 = 2$, quando $c = -4$ e $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$, quando $c = -1$) correspondem às raízes da função. Caso a turma apresente dificuldade em relação à indicação das raízes, é conveniente fazer uma revisão sobre a representação gráfica de uma função.

Para a realização do item 6, mover o parâmetro a até chegar ao valor 0. Esteja atento para a resposta da turma, pois pode ser necessário passar mais de uma vez por valores negativos.

6) Acompanhe o movimento do gráfico quando o coeficiente c é direcionado para o valor zero. O que aconteceu?

a. O gráfico permanece intersectando o eixo x?

b. Como é essa interseção?

c. Quantas raízes reais essa função possui?

Nesse momento, é interessante mostrar para a turma que para qualquer valor negativo do coeficiente c, a função tem duas raízes reais. Os alunos podem não saber que as raízes sejam reais: não deixe de usar esse termo, afinal estamos introduzindo os números complexos! Se necessário, mova o parâmetro para outros valores negativos antes de parar no zero.

7) Observando o gráfico formado quando c = 0 :

a. Quantas são as raízes reais dessa função?

b. Como é a interseção entre esse gráfico e o eixo x?

Eles devem perceber que quando c = 0 , o gráfico intersecta o eixo x apenas uma vez. Contudo, a interseção é de outro tipo: agora a parábola é tangente ao eixo das abscissas, enquanto que nas outras situações ela era secante. É claro que os alunos podem não usar esses termos, mas não deixe de incentivá-los a perceberem esse detalhe. Nesse caso, a função tem apenas uma raiz.

Para a realização do item 8, posicionar o parâmetro a em alguns valores positivos.

8) Agora observe o que acontece quando o coeficiente c assume um valor positivo.

a. Há interseção com o eixo x?

b. E agora? A função possui raiz real?

Os alunos perceberão que não há interseção com o eixo x e devem afirmar que, nesse caso, não há raízes reais. Mais uma vez, reforce o uso da expressão raízes reais, no lugar de raízes, somente.

Incentive mais uma vez que os alunos pensem a respeito da relação entre a interseção com o eixo x e a quantidade/existência de raízes reais.

Para a realização do item 9, 10 e 11, você deve abrir o arquivo do GegoGebra “A2R1” e projetar para a turma. Verifique se o parâmetro a se encontra posicionado no valor 0 e o b, no valor 8.

9) Observe o gráfico projetado, ele é do tipo dos gráficos estudados até agora?

10) Esse gráfico é a representação de funções do tipo $f(x) = x^3 - ax - b$. Observe a tela e indique a função projetada. Para isso, observe os valores dos parâmetros indicados.

11) Quantas raízes reais a função associada a esse gráfico possui? Indique-as.

Nesse momento, será apresentado para o aluno um tipo de gráfico que ele ainda não estudou. Entretanto, ele será capaz de perceber que o gráfico não tem o formato de uma parábola.

O aluno deve indicar $f(x) = x^3 – 8$. Nesse caso, oriente a turma para observar os valores dos parâmetros indicados, juntamente com os controles deslizantes.

Essa função possui apenas uma raiz real, $x = 2$.

Para a realização do item 12, alterar apenas o parâmetro a para 8. Assim, espera-se que os alunos observem a função $f(x) = x3 – 8x – 8$.

12) Observe o que acontece quando mudamos o parâmetro a para 8.

a. Quantas interseções esse gráfico tem com o eixo x?

b. Qual é a quantidade de raízes reais da função?

Nesse caso, o aluno deve perceber que o gráfico possui três interseções com o eixo x e, portanto, possui 3 raízes.

Para a realização do item 13, posicionar o parâmetro a em 3 e o parâmetro b em 2, ou seja. Assim, espera-se que os alunos observem a função $f(x) = x^3 – 3x – 2$.

13) Observe agora o gráfico formado quando a = 3 e b = 2. Nesse caso, a função possui raízes reais? Quantas?

Nesse caso, o aluno deve perceber que o gráfico possui duas interseções com o eixo x e, portanto, possui 2 raízes. Comentar com a turma que, nesse caso, o gráfico é tangente ao eixo x em um ponto e que esse comportamento indica que essa raiz tem multiplicidade par, nesse caso 2.

Para a realização do item 14, mover os parâmetros livremente. O importante é que os alunos percebam o que acontece quando os parâmetros são alterados. Certifique-se de que eles estão observando como os gráficos intersectam o eixo x.

14) Observe o que acontece quando alteramos os parâmetros a e b. Você é capaz de indicar a quantidade mínima de raízes das funções assim formadas? Troque ideias com seus colegas e registre-as a seguir.

Espera-se que os alunos percebam de forma intuitiva, observando a representação gráfica de funções desse tipo, que uma função polinomial de grau ímpar (cúbica) tem pelo menos uma raiz real.

15) Vamos agora estudar um caso específico dessas funções. Observe a representação gráfica da função $f(x) = x^3 - 15x - 4$.

a. Quantas raízes reais ela possui?

b. Ela tem alguma raiz positiva?

c. Verifique sua resposta, substituindo o valor de x na função. Qual o valor que você encontrou? Você sabe por quê?

Esse item tem muitas orientações, verificar se os alunos estão realizando todas!

Essa função possui três raízes reais. Apenas uma delas é positiva, $x = 4$. Os alunos devem verificar se o valor que eles observaram no gráfico, de fato, é uma raiz. Reparar que isso é importante, pois o gráfico pode nos “enganar”. Ou seja, podemos olhar e achar que um número é raiz, mas quando damos um zoon, percebemos que não é verdade.

Os alunos devem perceber que $f(x) = 4^3 – 15 . 4 – 4 = 64 – 60 – 4 = 0$, ou seja, como a imagem é zero, então, 4 é raiz da função. Talvez seja necessário retomar esse fato com a turma.

16) Você lembra como fazemos para obter uma raiz de uma função a partir da sua fórmula? Troque ideias com seus colegas e registre-as a seguir.

Os alunos devem lembrar que para determinar uma raiz, basta igualar a lei de formação a 0, obtendo assim uma equação que, em geral, possui um método de resolução. Caso os alunos não lembrem, fazer uma pequena revisão.

17) Escreva uma equação que determine as raízes da função $f(x) = x^3 - 15x - 4$.

Espera-se que eles cheguem à equação $x^3 – 15x – 4 = 0$, ou a qualquer outra equivalente.

Cardano e Tartaglia, no século XVI, desenvolveram uma fórmula para resolver equações polinomiais cúbicas.

Dada a equação, $x^3 = ax + b$, uma solução podia ser obtida pela fórmula:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

18) Escreva a equação obtida no item anterior na forma das equações de Cardano e Tartaglia e indique os valores <u>a</u> e <u>b</u>.

A equação precisa ser colocada na forma $x^3 = ax + b$. Nesse caso, $x^3 = 15x + 4$, com a = 15 e b = 4.

19) Utilizando a fórmula de Cardano-Tartaglia, indique a solução da equação obtida a partir da função $f(x) = x^3 - 15x - 4$.

Espera-se que os alunos cheguem à solução $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

Oriente-os para escreverem a solução mesmo com a presença de uma raiz quadrada negativa. Esteja atento para que todos os alunos cheguem à solução esperada.

20) Observe que a solução encontrada possui raiz quadrada de um número negativo. Isso à primeira vista pode parecer estranho, mas nesse caso essa raiz negativa não influenciará o resultado final! Afinal, pudemos perceber no gráfico da função $f(x) = x^3 - 15x - 4$ que existem 3 raízes reais. Para verificar isso, utilize o fato de $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$, e calcule o valor de $\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3$ e $\left(2 - \sqrt{-1}\right)^3$.

Se os alunos tiverem dificuldade em calcular o cubo da soma, oriente-os para, primeiramente, calcularem o quadrado da soma e em seguida multiplicar o resultado pela parcela em questão. Esteja atento, pois é um erro comum os alunos acharem que $\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + \left(\sqrt{-1}\right)^3$.

É interessante relembrar com a turma a fórmula do Binômio de Newton para a potência 3: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b \pm 3ab^2 \pm b^3$.

Eles devem encontrar $\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121}$ e $\left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 2 - \sqrt{-121}$.

21) Você seria capaz de determinar o valor de $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$?

Dica: utilize o cálculo feito no item anterior.

22) Determine também o valor de $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

Os alunos devem perceber que, como $\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121}$, então, $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$. Da mesma forma, $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$.

23) Utilizando os valores determinados nos itens anteriores, você saberia determinar o valor da solução obtida a partir da fórmula de Cardano-Tartaglia?

Os alunos devem chegar a: $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 — 121} = \sqrt[3]{\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(2 - \sqrt{-1}\right)^3}$ = 2 + $\sqrt{-1}$ + 2 – $\sqrt{-1}$ = 2 + 2 = 4.

Você percebeu o que aconteceu nesse processo? Mesmo não conhecendo o valor e até o significado das raízes quadradas negativas, é possível chegar a uma solução natural como o 4, se estivermos dispostos a operá-las como uma extensão dos números reais.

É possível perceber que não precisamos conhecer o valor das raízes quadradas negativas, precisamos apenas saber como operar com esses números. Esses números são chamados de complexos, e suas operações e propriedades serão estudadas nas próximas aulas.

Atividade 2

HABILIDADE RELACIONADA: H36 – Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

PRÉ-REQUISITOS: Representação algébrica dos números complexos; plano cartesiano; razões trigonométricas no triângulo retângulo; razões trigonométricas na circunferência; Teorema de Pitágoras.

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos.

RECURSOS UTILIZADOS: Folha de atividades; computador com o software GeoGebra instalado, Datashow e os arquivos disponibilizados.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Disposta em duplas.

OBJETIVOS: Apresentar o plano de Argand-Gauss e a representação polar dos números complexos.

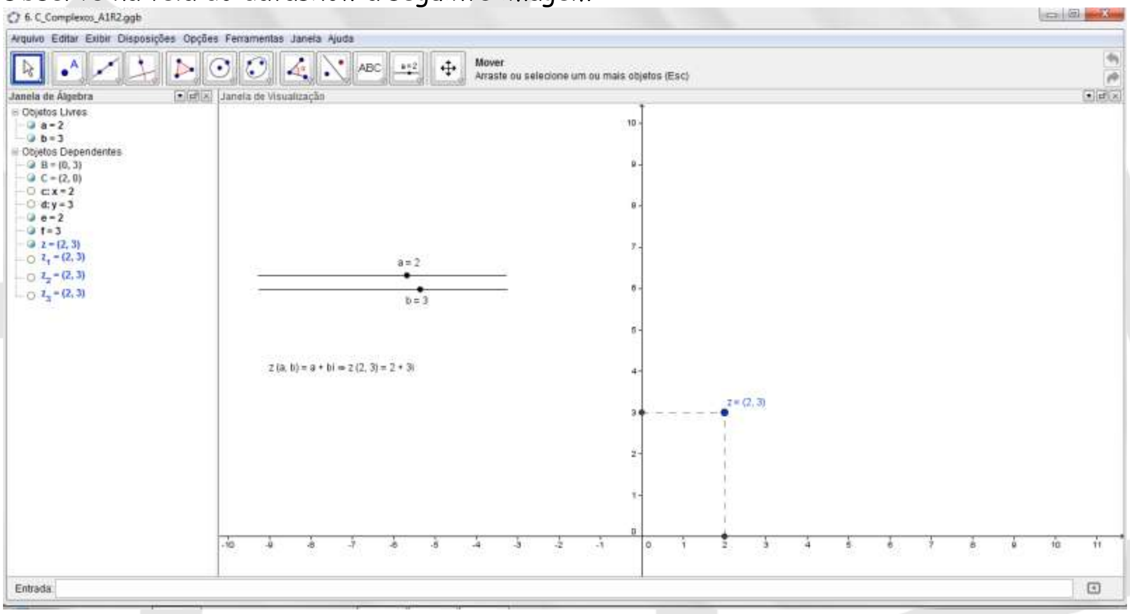
METODOLOGIA:

Os alunos serão levados para o auditório e, em dupla, receberão uma cópia da atividade abaixo.

Abrir o arquivo A1R2, do GeoGebra e seguir o roteiro.

Números Complexos no Plano.

Observe na tela do datashow a seguinte imagem:



Nela você vê dois controles deslizantes e um ponto indicado por z juntamente com as suas coordenadas, certo?

1) Para começar, observe o que acontece com o ponto z quando os parâmetros a e b são movidos.

2) Será possível marcar qualquer ponto do plano alterando os parâmetros? Troque ideias com seus colegas.

Os alunos devem perceber que isso não é possível, mas apenas pelo fato de o controle ser finito. Nesse momento, cabe uma observação para a turma. Comente com os alunos que os controles são uteis, pois a partir deles podemos marcar no plano o ponto que quisermos, bastando para isso mover os parâmetros. Nesse sentido, ao alterar os parâmetros, na verdade, estamos marcando no plano diversos pontos. Temos uma vantagem evidente: esse processo é instantâneo e rápido. Mas temos também uma desvantagem: os pontos não ficam marcados. Apesar de o programa ter a função rastro, nesse caso, espera-se que o aluno acompanhe o movimento e perceba que, apesar das restrições do controle, através da sua alteração, podemos percorrer todo o plano. Certifique-se de que ele perceba isso e promova uma exposição de ideias entre os alunos, sempre com argumentações.

Você já deve saber que os números complexos podem ser representados na forma z= a + bi, chamada forma algébrica. Naturalmente, podemos associar a cada número complexo o par ordenado (a , b).

3. Você acha que o ponto z indicado no plano, pode representar um número complexo? Por quê? Veja o que seus colegas pensam a respeito e tentem chegar a uma conclusão.

Quando o plano é visto como um plano no qual podemos representar os números complexos, ele é chamado **Plano de Argand-Gaus**, em homenagem a dois matemáticos importantes não apenas no estudo dos números complexos, mas, sobretudo por terem se dedicado à representação desses números de maneira geométrica.

4) Diga o que cada um dos eixos do Plano de Argand-Gauss representa.

5) É possível que mais de um número complexo esteja representado por um mesmo ponto? Por quê?

6) É possível que mais de um ponto represente o mesmo número complexo? Troque ideias com seus colegas e justifique sua resposta.

Espera-se que os alunos percebam que o ponto pode representar um número complexo. Os alunos devem indicar o eixo x como sendo o eixo responsável pela parte real do número complexo e o eixo y, pela parte imaginária. Por essa razão, eles são denominados "eixo real" e "eixo imaginário", respectivamente. É importante deixá-los apresentarem as suas respostas. Por fim, faça um fechamento, de tal maneira que fique claro para toda a turma que cada um dos eixos é responsável por uma das partes do número complexo.

Os alunos devem notar que cada ponto é representado por um único número complexo e vice versa.

Agora, o que devemos fazer para encontrar os pontos no plano cujos números complexos obedecem às seguintes propriedades:

(a) Tem parte real igual a zero;

(b) Tem parte imaginária igual a zero;

(c) Tem parte real igual à parte imaginária;

(d) A parte imaginária é igual ao dobro da parte real mais três unidades.

No item (a), os alunos devem perceber que esses números se encontram sobre o eixo imaginário. Já o item (b) corresponde a todos os pontos do eixo real.

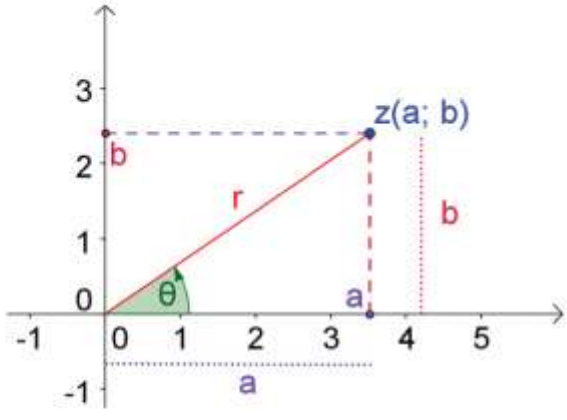
No item (c), espera-se que os alunos consigam perceber que esses números encontram-se sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja, sobre a reta y = x .

Se a turma tiver dificuldades em entender esse item, dê uma explicação – por exemplo, usando o próprio GeoGebra para marcar diversos pontos com essa propriedade – e solicite que os alunos respondam a outras perguntas, como por exemplo: "números complexos com parte imaginária igual a 2" (números sobre uma reta paralela ao eixo real na altura 2); "números complexos com parte real igual a 2" (números sobre uma reta paralela ao eixo imaginário); "números complexos com parte imaginária igual ao simétrico da parte real" (números sobre a reta bissetriz dos quadrantes pares, y=-x).

Para o item (d), os alunos devem perceber que os números estão sobre a reta y=2x+3.

<u>Números Complexos e a trigonometria.</u>

Observe a seguinte imagem:



Nela você pode ver a representação de um número complexo qualquer, destacados o segmento que liga o número complexo à origem – indicado por r – e o ângulo formado entre esse segmento e o eixo x – indicado por θ.

1) Podemos afirmar que para cada número complexo temos um único tamanho e um único ângulo a ele associado? Troque ideias com seus colegas e registre-as.

2) A tarefa agora é escrever a parte real do número complexo em função de r e θ. Use as relações trigonométricas no triângulo retângulo para escrever uma relação entre a, r e θ.

3) Utilizando ainda o triângulo retângulo indicado na figura acima, escreva a parte imaginária do número complexo em função de r e θ.

4) Utilizando esses valores, escreva o número complexo em função de r e θ

Os alunos devem utilizar o cosseno, cos (θ) = $\frac{a}{r}$, para chegar à a = r . cos(θ) e o seno, sem (θ) = $\frac{b}{r}$, para chegar à b = r . sen(θ).

Espera-se que os alunos cheguem à fórmula z = a + bi = r (cos(θ) + i sen(θ).

Dizer para a turma que essa representação é chamada de forma polar ou trigonométrica.

A seguir, abrir o arquivo do GeoGebra "A2R2". Nesse arquivo, temos dois números complexos representados associados a controles deslizantes z_1, que está associado à forma trigonométrica, e z_2, à forma algébrica.

O objetivo é que os alunos consigam seguir os passos descritos pela atividade, de modo a compreender a relação entre as duas representações gráficas apresentadas para os números complexos. Além disso, esperamos que eles possam compreender que, para passarem da forma retangular para a forma polar, basta utilizar como artifício algo que eles já conhecem: as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Seu professor abrirá um arquivo, quer será projetado no datashow. Você verá dois números complexos representados: z_1 está associado à forma trigonométrica, e z_2, à forma algébrica.

5) Para começar, observe o que acontece com z_1 e z_2 quando seus parâmetros são alterados.

Altere livremente os parâmetros de z_1 e z_2.

6) De alguma forma poderíamos sobrepor os pontos z_1 e z_2 ? Você seria capaz de estabelecer uma relação entre as duas representações? Troque ideias com seus colegas e registre-as.

Aqui está sendo trabalhada a possibilidade da sobreposição, ou seja, de um mesmo número poder ser representado de mais de uma maneira. É importante comentar sobre isso com a turma. Caso eles tenham dificuldades em entender que um mesmo número pode ser visto de duas maneiras distintas, cite o exemplo das frações: eles certamente sabem que $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, por exemplo.

Espera-se que os alunos se familiarizem com a ideia de que um mesmo número complexo pode ser representado de duas maneiras distintas.

Vamos ver como isso é possível?

7) O número z_2 será escondido, o controle r será posicionado em 2 e o controle θ em 30°. Use o que você conhece da Trigonometria e determine as partes real e complexa do número complexo. Confira o resultado encontrado com os valores indicados na tela.

Haverá uma pequena diferença no ângulo de z_1 e z_2, pois não dá para colocar z_1 com θ = 30º (apenas 29º ou 31º). Peça aos alunos que desconsiderem essa diferença.

Os alunos devem encontrar $z_1 = 2\left(cos(30^0) + i.sen(30^0)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$.

Os alunos poderão verificar seus cálculos observando a própria tela do GeoGebra, uma vez que as partes real e imaginária aparecem destacadas. Lembre-se de avisá-los sobre aquela pequena diferença entre os ângulos z_1 e z_2, o que acarretará em um valor aproximado para eles. Esteja atento às dificuldades dos alunos em determinar os valores de seno e cosseno de 30º. Se necessário faça uma revisão sobre trigonometria, afinal, isso será de extrema importância para as questões propostas a seguir.

8) Agora siga com atenção os passos que seu professor seguirá: o número z_1 será ocultado e o z_2 será mostrado. Os parâmetros de z_2 (a e b) serão posicionados nos valores encontrados no item anterior. Feito isso, z_1 tornará a ser mostrado. Verifique se z_1 e z_2 estão sobrepostos. Troque ideias com seus colegas e registre-as a seguir.

Espera-se que os alunos percebam que, de fato, cada número complexo pode ser visto sob dois olhares distintos. Nesse momento, os alunos podem ter dificuldade em posicionar os controles, devido ao fato de os números serem quebrados. Oriente-os sobre qualquer errinho de aproximação e /ou precisão neste momento.

9) Agora vamos fazer alguns cálculos usando essa fórmula. Primeiramente, você deve escrever os números complexos abaixo na forma algébrica.

a. z = 6 (cos (30°) + i sen (30°)) $\mathbf{z = 3\sqrt{3} + 3i}$

b. z = 8 (cos (45°) + i sen (45°)) $\mathbf{z = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i}$

c. z = 5 (cos (90°) + i sen (90°)) **z = 5i**

d. z =$\sqrt{3}$ (cos (120°) + i sen (120°)) $\mathbf{z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}$

e. z = 5 (cos (225°) + i sen (225°)) $\mathbf{z = -\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}i}$

f. z = cos (0°) + i sen (0°) $\mathbf{z = 1}$

g. z = $\sqrt{6}$ (cos (300°) + i sen (300°)) $\mathbf{z = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}i}$

Ficar atento a possíveis dúvidas que os alunos tenham relacionadas ao cálculo dos senos e dos cossenos de ângulos não notáveis. Os ângulos escolhidos podem ser determinados a partir dos notáveis. Isso será viável se os alunos souberem trabalhar no ciclo trigonométrico.

Uma questão que também pode ser problemática entre os alunos é o cálculo envolvendo radicais. Talvez uma pequena revisão sobre isso seja necessária.

10) Agora, você deve fazer o contrário: dado o número escrito na forma algébrica, você deve escrevê-lo na forma polar.

a. z = 1 + $\sqrt{3}$i **z = cos (60º) + i sen (60º)**

b. z = 2 + 2i **z = 2$\sqrt{2}$ (cos(45º)+ i sen (45º))**

c. z = – i **z = cos (180º) + i sen (180º)**

d. z = – 3$\sqrt{2}$ + $\sqrt{6}$i **z = 2$\sqrt{6}$ (cos (150º)+ i sen (150º))**

e. z = 3 – i **z = 3$\sqrt{2}$ (cos (315º) + i sen (315º))**

f. z = – 1 – i **z = cos (225º) + i sen (225º))**

Se a turma tiver dificuldade, fzer uma pequena revisão sobre o ciclo trigonométrico, ressaltando o sinal de seno e cosseno em cada quadrante, os ângulos notáveis e como é possível obter as razões trigonométricas de outros ângulos a partir dos valores notáveis.

Oriente-os para marcarem o ponto no plano e formar o triângulo com as medidas indicadas. Eles devem anotar o valor do seno e do cosseno para observarem o sinal e, consequentemente, determinarem a qual quadrante ou eixo o ângulo pertence. Em seguida, considerando os valores notáveis, eles devem determinar o valor exato do ângulo. O raio é determinado utilizando-se o Teorema de Pitágoras.

Esse é o tipo de exercício em que o aluno precisa utilizar vários conteúdos aprendidos durante as séries escolares. Aproveitar para mostrar para a turma como é importante saber utilizar o conhecimento adquirido ao longo dos anos para resolver os problemas propostos. Incentive-os a raciocinarem sobre o que estão fazendo.

Leia cada uma das perguntas a seguir, troque ideias com seus colegas e registre as conclusões.

11) Dado um ponto no plano, sempre haverá um raio (tamanho) e um ângulo associado a esse ponto? Justifique sua resposta.

Os alunos devem perceber que sempre haverá um raio e um ângulo associado ao ponto, ou seja, ao número complexo.

12.)Dois pontos diferentes podem estar associados ao mesmo raio e ao mesmo ângulo? Por quê?

13) Dado um ponto no plano, o raio e o ângulo a ele associados são únicos? Em outras palavras: pode um mesmo ponto ter mais de um raio ou mais de um ângulo associados a ele? Justifique sua resposta.

Os alunos devem perceber que o ângulo e raio são únicos.

14) Pense no número 0. Qual seria a sua representação na forma trigonométrica? Ela é única? Como isso é possível? Troque ideias com os colegas e registre suas conclusões.

Espera-se que os alunos reflitam sobre a relação entre o par ordenado, o raio e o ângulo associados a um número complexo dado. É importante se certificar de que a turma entendeu que para cada raio e ângulo dados, existe um único número complexo e vice versa. O único furo acontece no zero, pois considerando r = 0, podemos considerar qualquer ângulo que ainda assim teremos o zero! Essa é uma questão delicada, mas que deve ser abordada com os alunos.

No item 14, esperamos que eles consigam perceber que o número 0 é o único número que tem mais de uma representação polar.

Atividade 3

HABILIDADE RELACIONADA: H36 - Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica.

PRÉ-REQUISITOS: Operações elementares com números reais; compreensão sobre as representações dos números complexos.

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos.

RECURSOS UTILIZADOS: Folha de atividades, lápis, borracha, computador com software Geogebra pré-instalado e datashow.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Em dupla (na sala de multimídia).

OBJETIVOS: Compreender e efetuar operações com números complexos em sua forma algébrica.

METODOLOGIA:

Entregar a folha de atividades abaixo para os alunos e seguir o roteiro juntamente com eles.

Soma e Subtração de Números Complexos:

Nesta atividade você terá contato com as operações de soma e subtração envolvendo números complexos. Na verdade, você descobrirá que elas muito se assemelham a outros conceitos já estudados anteriormente. Preparado?

Por exemplo, como faríamos a soma dos números complexos $z = 2$ e $w = 4$?

Uma vez que todo número real é um número complexo, tanto faz somarmos complexos que possuam apenas a parte real, apenas a parte imaginária, ou ambas.

Um cuidado deve ser tomado: a unidade imaginária i distingue a parte real da parte imaginária e, sendo cada parte de natureza distinta, não podemos simplesmente uni-las. Assim, o procedimento de soma de dois números complexos se assemelha ao de soma de expressões algébricas da forma $ax + b$.

Sob esta ótica, temos, por exemplo:

$z = 2 + 3i$; $w = 5 + 2i$

$z + w = 2 + 3i + 5 + 2i = (2 + 5) + (3 + 2)i = 7 + 5i$

1) Agora efetue as somas $z + w$ abaixo:

a) $z = 3$; $w = 5$ **8**

b) $z = 2i$; $w = 4i$ **6i**

c) $z = 5$; $w = 3i$ **5 + 3i**

d) $z = 2 + 3i$; $w = 3$ **5 + 3i**

e) $z = 3 + 5i$; $w = 3 + 2i$ **6 + 7i**

Caso os alunos apresentem dificuldade, relembre com a turma o procedimento de soma algébrica de expressões da forma ax + b, onde devemos somar os termos semelhantes.

Como você pôde perceber, somar números complexos pode ser tratado de modo semelhante à soma de expressões algébricas. Na verdade, descobriremos mais à frente que a relação entre estes dois assuntos é ainda mais estreita.

Para o caso da subtração de números complexos, mantendo a relação citada acima, basta a troca de sinal da parte real e da parte imaginária, seguindo com o agrupamento e soma dos termos semelhantes como anteriormente.

Por exemplo:

$z = 5 + 2i$; $w = 2 + i$

$z - w = (5 + 2i) - (2 + i) = 5 + 2i - 2 - i = (5 - 2) + (2 - 1)i = 3 + i$

2) Agora, efetue $z – w$ nos casos abaixo:

a) $z = 6 + 3i$; $w = 2 – 4i$ **4 + 7i**

b) $z = -2 + 4i$; $w = 3 – 5i$ **- 5 + 9i**

c) $z = 3 – 5i$; $w = -2 + 4i$ **5 – 9i**

Neste ponto, é necessária atenção para possíveis equívocos na troca de sinal. Os itens b e c estão com z e w invertidos. Isto nos mostra que, assim como acontece com os números reais, a subtração não é comutativa, isto é, a ordem dos fatores altera a diferença. É importante comentar isso com a turma.

Como vimos, o procedimento para soma e subtração de números complexos pode ser resumido a operar com a parte real e com a parte imaginária separadamente e, em seguida, juntar as partes para formar um novo número complexo.

As atividades que você acabou de realizar levaram em conta apenas valores inteiros para as partes real e imaginária dos números complexos. Mas os números complexos são muito mais que isso!

Na realidade, os valores podem ser quaisquer números reais e, para realizar a soma/subtração em cada caso, basta seguir o mesmo procedimento que você realizou anteriormente, só que agora com quaisquer complexos.

3) Tente agora efetuar as seguintes operações:

a) z = 1,5 + 5,4i; w = -3,1 - 1,2i. Sendo assim, determine z + w. **– 1,6 + 4,2i**

b) z = - π + 5,17i; w = 8,9 + 3,6i. Sendo assim, determine w - z. **12,04 – 1,57i ou 8,9 + π – 1,57i**

Dica: Tente fazer usando π = 3,14. Depois, calcule usando a representação π, sem aproximações.

c) z = 44,3 - 1,8i; w = 4,2 + 2,7i; v = - i. Sendo assim, determine z - w + v. **40,1 – 5,5i**

Nesse caso, espera-se que os alunos percebam que as partes reais e imaginárias podem ser compostas por quaisquer números reais, inclusive, os irracionais!

Multiplicação e Divisão de Números Complexos:

Assim como fizemos na soma/subtração, podemos considerar a multiplicação e a divisão como uma operação envolvendo a forma algébrica, da mesma forma que fazemos com as expressões algébricas.

E mais: você lembra a "racionalização do denominador de uma fração"? Esse é um procedimento bastante efetuado no estudo de frações envolvendo expressões algébricas e números irracionais. Será utilizado aqui também!

1) Inicialmente, tente efetuar a operação z . w, com z = 3 + 2i e w = 4. **12 + 8i**

Atenção para possíveis equívocos na operação, como multiplicar apenas a parte real e não a parte imaginária.

2) Agora vamos complicar um pouco. Efetue a operação z . w, com z = 2 + 4i e w = 3i. Não se esqueça que, como $i = \sqrt{-1}$, podemos considerar que $i^2 = -1$. **– 12 + 6i**

3) Efetue z . w, com z = 2 – 3i e w = 5 – i. **7 – 16i**

A partir deste ponto, você já deve estar em condições de efetuar o produto entre dois complexos na forma algébrica. Mas, e a divisão?

4) Bom tente efetuar a seguinte divisão: z : w, com z = 6 – 4i e w = 2. **3 – 2i**

Atenção para possíveis equívocos na operação, como dividir apenas a parte real, e não a parte imaginária.

Na divisão onde o divisor é um número real puro, basta dividir cada termo do dividendo pelo divisor. Agora efetue:

5) z : w, com z = -9i e w = 3i.

6) z : w, com z = 6 – 4i e w = 2i.

No item 5, eles provavelmente farão a "simplificação" de i, obtendo $-\frac{9}{3} = 3$.

Já no item 6, provavelmente o aluno terá algumas dúvidas. Quanto é 6 dividido por 2i? É permitido separar os termos quando a divisão envolve números complexos?

Explicar a eles que sim. Eles podem separar, neste caso, os termos 6 e - 4i, mas que isto não vai ajudá-los quando houver uma soma também no denominador.

Oriente-os para multiplicar em cima e em baixo por i, assim como fazemos com as raízes reais. O resultado esperado é - 2 - 3i.

Para efetuar uma divisão onde o divisor possui parte imaginária, faremos uso de um artifício que você conheceu durante o estudo de números irracionais: a racionalização do denominador.

A divisão de números complexos na forma a + bi pode ser vista do mesmo modo que uma divisão de números irracionais na forma de radicais. Neste caso, quem executa a tarefa de eliminar a parte imaginária é o conjugado do número complexo.

Procure efetuar a seguinte divisão, utilizando esta ideia:

7) z : w, com z = 4 – 3i e w = 2 + i

Resposta: $\frac{4-3i}{2+i} = \frac{(4-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{8-4i-6i-3}{2^2-i^2} = \frac{5-10i}{4+1} = \frac{5-10i}{5} = \mathbf{1-2i}$

Com isto você já tem condições de trabalhar com as 4 operações básicas dentro do conjunto dos números complexos.

Uma nota final ainda cabe. Quando você aprendeu sobre a potenciação, provavelmente ouviu falar nela como "multiplicar repetidas vezes". Na verdade, você pode notar que elevar um número complexo qualquer a uma dada potência pode ser entendido como resolver um caso de Binômio de Newton.

Mas antes, você deve saber como trabalhar com as potências da unidade imaginária.

Responda a sequência abaixo:

8) Qual o valor de i^2? **- 8**

9) Você pode, a partir do valor de i^2, obter o valor de i^3? Como? **Sim, pois $i^3 = i^2 \,.\, i = -1 \,.\, i = -i$**

10) Agora que você tem o valor de i^3, é capaz de calcular i^4? Como? **Sim, pois $i^4 = i^2 \,.\, i^2 = -1 \,.\, -1 = 1$**

11) O que aconteceu no momento em que calculou o valor de i^4? Você consegue explicar o motivo? **i^4 é igual i^0 = 1.**

12) Obtenha os valores de i^5, i^6, i^7 e i^8. **$i^5 = i$, $i^6 = -1$; $i^7 = -i$; $i^8 = 1$.**

No item 11, o aluno terá notado que ao elevar i á quarta potência, o resultado é 1, um número real, e elemento neutro da multiplicação. Enfatizar isto, e mostrar ainda a eles que, como $i^4 = 1$, então só resta a $i^5 = i^4 \,.\, i$ ser igual a i. Ao obter os valores de i^6, i^7 e i^8, o aluno começará a perceber que o resultado das potências de i é cíclico, isto é, de tempos em tempos ele "volta ao início", e a sequência de resultados se repete.

Notou algo "estranho"? Acontece que as potências de i formam uma sequência que percorre um ciclo de valores: i, -1, -i, 1. Com isto, para saber o valor de qualquer potência de i, basta verificar em que ponto da sequência a potência desejada se encontra.

Vamos verificar?

13) Calcule i^{10}.

Você já viu que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, etc. Se continuarmos com a sequência, logo notamos que i^{10} deve ser igual a - 1. Mas e se quiséssemos o valor de i^{135}? É necessário encontrar um modo de não precisar escrever a sequência completa todas as vezes... E há um modo!!

Verificando os resultados das potências de i, podemos notar uma relação entre os expoentes e os valores dos resultados.

14) Você consegue visualizar qual é esta relação? Explique a seguir.

Uma dica: esta relação refere-se ao "tempo" que leva até que um valor seja repetido.

O aluno deve compreender aqui que, de quatro em quatro expoentes os valores voltam a se repetir. Assim, $i^5 = i$; $i^6 = i^2 = -1$; $i^7 = i^3 = -i$; $i^8 = i^4 = 1$; etc.

Levar os alunos a perceberem que a menor potência de i, à qual uma potência maior é equivalente, é aquela dada pelo resto da divisão do expoente por 4. Ou seja:

$i^k = i^r$, onde r é o resto da divisão de k por 4.

Logicamente, $r \in \{0,1,2,3\}$.

15) Encontre o valor das seguintes potências de i:

a) i^{21}

b) i^{87}

c) i^{221}

d) i^{1024}

Respostas esperadas: i; -i; i; 1.

Agora você já pode calcular potências de números complexos em geral.

16) Efetue $(2 + 3i)^2$.

É muito provável que o aluno faça $(2 + 3i)^2 = 2^2 + 2.2.3i + (3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i – 9 = – 5 + 12i$.

17) Efetue:

a. $(2 + 3i)^3$

b. $(1 - i)^3$

Em (a), perceba que basta multiplicar o resultado do item 16 por (2 + 3i) para obter o cubo. Já em (b) você começa a ter um pouco mais de trabalho...

Se o aluno perceber que esta primeira expressão se assemelha ao item anterior, ele pode efetuar $(2 + 3i)^2 . (2 + 3i)$, isto é, $(-5 + 12i).(2 + 3i) = - 46 + 9i$.

Já na segunda expressão, ele pode utilizar o produto notável "cubo da diferença", dado por $(a – b)^3 = a^3 – 3a^2b + 3ab^2 – b^3$, obtendo $–2 – 2i$.

18) Agora, efetue $(2 - 3i)^4$. **25 – 72i**

Para este caso, você pode:

- ✓ multiplicar (2 - 3i) quatro vezes;
- ✓ fazer $(2 - 3i)^2$ e depois multiplicar por ele mesmo;
- ✓ resolver direto $(2 - 3i)^4$, via expansão do Binômio de Newton.

19) Agora que você já sabe como efetuar multiplicações, divisões e potenciações, efetue as operações solicitadas:

a) z . w, sendo que z = - 1 + i; w = 3 + 5i **– 8 – 2i**

b) z : w, sendo que z = 5 + 4i; w = - i **– 4 + 5i**

c) w : z, sendo que z = 2 - 2i; w = 5 + 2i $\frac{3+7i}{4}$

d) z . w, sendo que z = 2 + 2i; w = 2 - 2i **8**

e) w : z, sendo que z = 4; w = 4 + 3i $1 + \frac{3}{4}i$

f) z^3, sendo que z = 3 - i **18 – 26i**

g) z^2, sendo que z = 4 + 2i **12+16i**

Atividade 4

HABILIDADE RELACIONADA: H46 – Reconhecer números reais em diferentes contextos; H36 – Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica;

PRÉ-REQUISITOS: Conjunto dos números complexos.

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos.

RECURSOS UTILIZADOS: Folha de atividades, lápis, borracha.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual

OBJETIVOS: Resolver questões que envolvam o conjunto dos números complexos.

METODOLOGIA:

Aplicar a avaliação abaixo, que contém questões antigas do Saerjinho e alguns problemas práticos sobre sistemas lineares.

Após, avaliar os pontos que os alunos ainda não conseguiram dominar e selecionar os de maior escala, pontuando com eles problemas encontrados.

Questão 1)

(M120487B1) Considere a equação $x^2 - 6x + 25 = 0$, onde $x \in \mathbb{C}$.
O conjunto solução dessa equação é
A) $S = \{3 - \sqrt{34},\ 3 + \sqrt{34}\}$
B) $S = \{-1,\ 7\}$
C) $S = \{3 - 4i,\ 3 + 4i\}$
D) $S = \{3 - 8i,\ 3 + 8i\}$
E) $S = \varnothing$

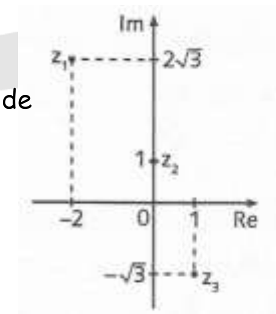
Questão 2)

(M120488B1) O conjunto solução da equação $4x^2 - 4x + 2 = 0$, com $x \in \mathbb{C}$, é
A) $S = \varnothing$
B) $S = \{0,\ 1\}$
C) $S = \left\{\frac{1 - \sqrt{3}}{2},\ \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right\}$
D) $S = \left\{\frac{1}{2} - 4i,\ \frac{1}{2} + 4i\right\}$
E) $S = \left\{\frac{1 - i}{2},\ \frac{1 + i}{2}\right\}$

Questão 3)

(M120486B1) Sendo $t_1 = 4 + 2i$ e $t_2 = 5 - 3i$, o resultado da operação $t_1 \cdot t_2$ é igual a
A) $-1 + 5i$
B) $9 - i$
C) $20 - 8i$
D) $20 - 6i$
E) $26 - 2i$

Gabarito: 1 – C; 2 – E; 3 – E



Questão 4) Observe os números complexos z_1, z_2 e z_3 indicados no plano de Argand-Gauss ao lado. Depois, calcule os produtos abaixo:
a) $z_1 \cdot z_2$
b) $z_1 \cdot z_3$
c) $z_2 \cdot z_3$

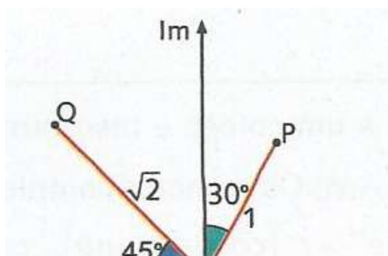
RESPOSTA: a) $-2\sqrt{3} - 2i$ b) $4 + 4\sqrt{3}i$ c) $\sqrt{3} + i$

Questão 5) Determine o valor de a para que o número complexo $z = \frac{a+3i}{5-2i}$ seja real.

RESPOSTA: $a = -\frac{15}{2}$

Questão 6) Escreva a expressão $i^{18} - 4i^{121} + 3i^{67} + i^{-14}$, na forma $z = a + bi$.

RESPOSTA: - 2 – 7i



Questão 7) Escreva na forma trigonométrica, os números complexos z_1 e z_2 representados no plano de Argand-Gauss pelos pontos P e Q, respectivamente.

RESPOSTA: z_1 = cos 60° + i sen 60°; z_2 = $\sqrt{2}$ (cos 135° + i sen 135°)

AVALIAÇÃO

O processo de avaliação é um dos momentos mais importantes no processo de ensino-aprendizagem, pois é neste momento que o professor tem condições de detectar os problemas que os alunos vêm enfrentando e, assim, poder ajudá-los.

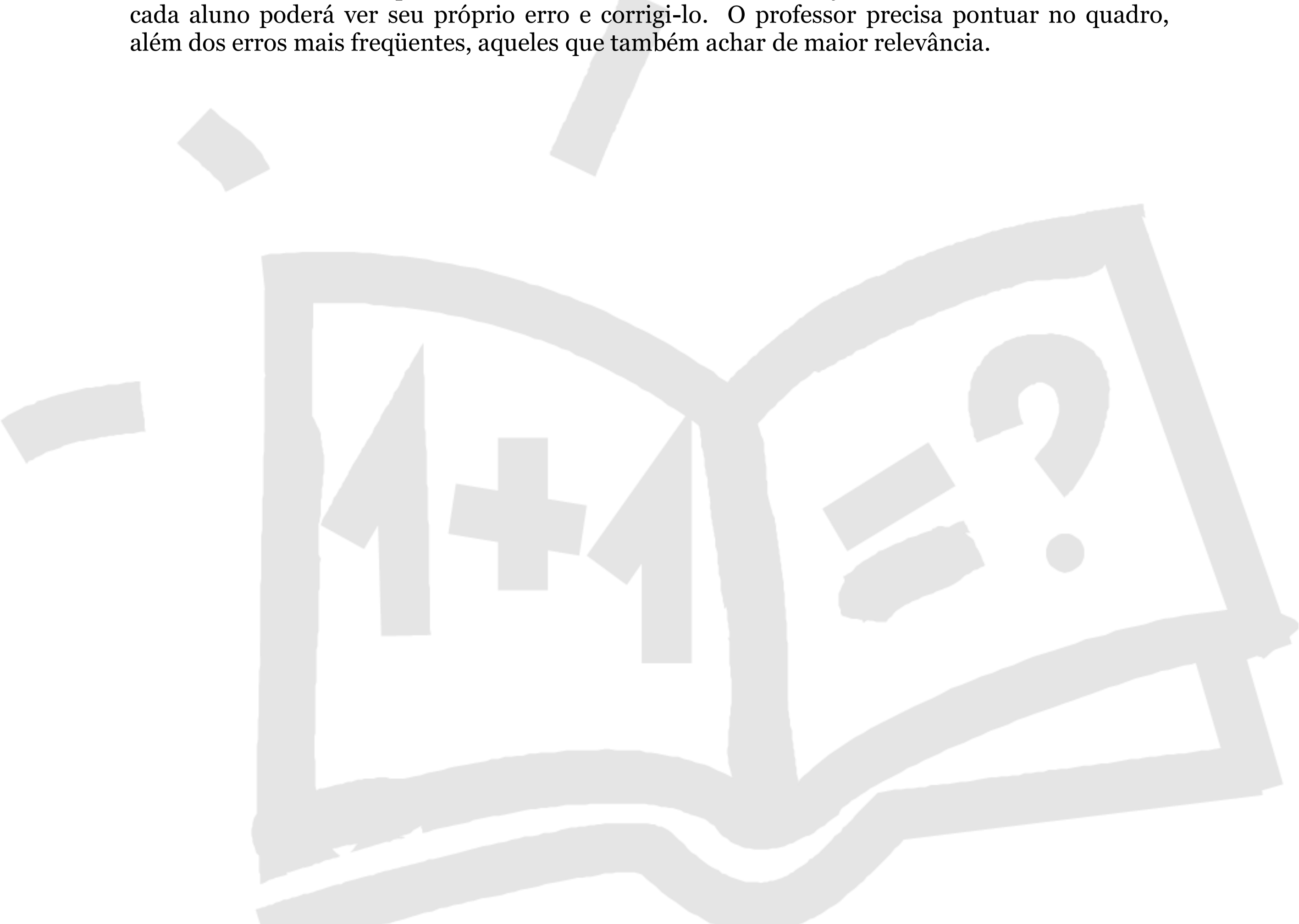
Por isso é de extrema importância que a avaliação se dê a todo o momento. Tanto na hora da explicação do conteúdo, com a participação do aluno, através de questionamentos à turma, inclusive nominalmente quando for preciso, quanto indo de mesa em mesa, observando as dificuldades que eles enfrentam na realização dos exercícios, orientando-os.

Com a primeira atividade da pg. 4 é possível saber o nível de familiarização dos alunos com o plano cartesiano. Os alunos precisam, neste momento, ser levados a buscar a melhor forma de solucionar as questões. Eles precisam se questionar sobre suas próprias escolhas e o porquê.

Na atividade com o software, pg. 8, é possível observar se o aluno está percebendo as principais características que diferenciam o plano cartesiano do plano de Argand-Gauss. Para tanto é preciso atenção do professor, que deverá estar indo de aluno por aluno verificando se eles estão atingindo o objetivo.

Na pg. 13, a folha de atividades precisa de muita atenção para não ser preenchida errada. Neste momento, é importante o professor fazer isto com a ajuda da turma, através de indagações. Deixá-los tirar suas próprias conclusões permitirá um processo de aprendizado muito mais significativo.

A atividade 4 (pg 17) faz-se necessária para detectar as dificuldades dos alunos na resolução de exercícios e problemas envolvendo o conjunto dos números complexos. Quando o professor for corrigir a avaliação, é importante não fazer a correção dos erros diretamente na folha de atividades. Isto precisa ser feito em um novo momento, juntamente com a turma, onde cada aluno poderá ver seu próprio erro e corrigi-lo. O professor precisa pontuar no quadro, além dos erros mais freqüentes, aqueles que também achar de maior relevância.



BIBLIOGRAFIA

FILHO, B. B; SILVA, C. X. Matemática aula por aula. Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2003. 3 v.

RIBEIRO, Jackson. Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia. Ensino Médio. São Paulo: Scipione, 2011. 3 v.

ROTEIROS DE AÇÃO: Campo Conceitual 1: Números Complexos. Projeto Seeduc: Formação Continuada, 2013. Disponível em: www.profetoseeduc.cecierj.edu.br . Acesso em: ago. 2013.

SAERJ: Saerjinho. Disponível em: www.saerjinho.caedufjf/diagnostica/ . Acesso em: 25 ago. 2013.