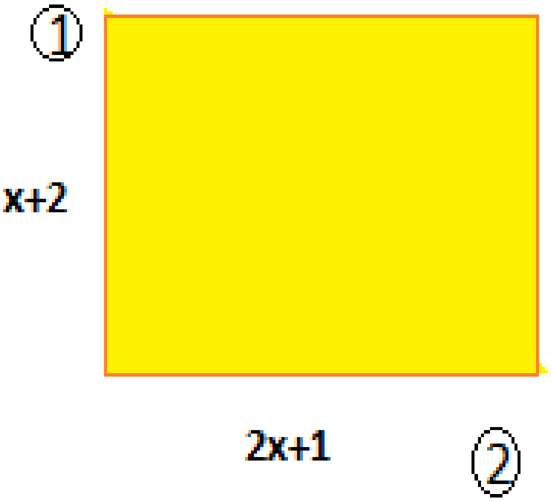
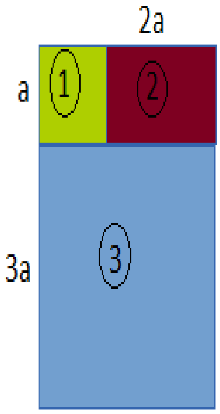
FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ





CONTEÚDO: POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS.

SÉRIE: 3ª ANO ENSINO MÉDIO/ 4º BIMESTRE / 2014

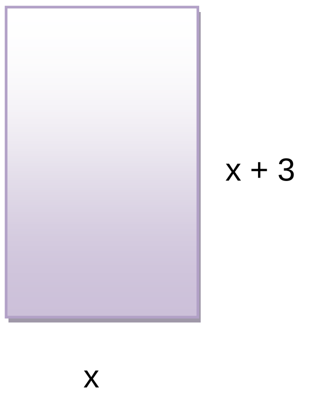
TUTOR: DANUBIA DE ARAUJO MACHADO

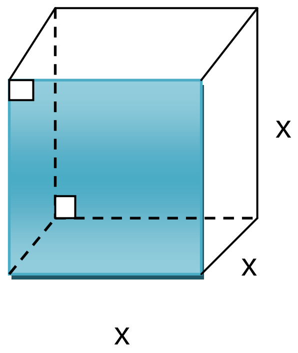
PROFESSORA: SÔNIA MARIA FIRMINO VELOSO

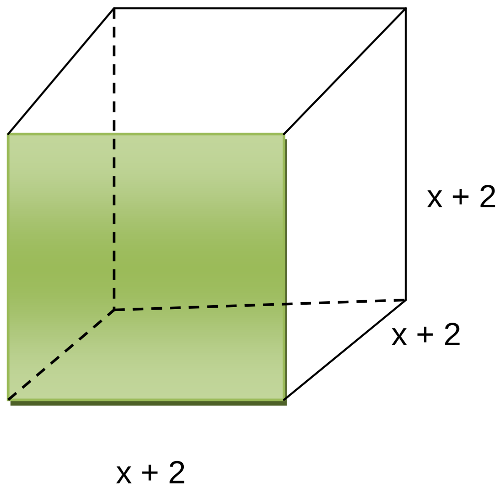
SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Na resolução de problemas, é muito comum ocorrerem situações em que a leitura e a compreensão do enunciado nos levam a formular expressões que permitem depois a resolução do problema por meio de uma equação oriunda das expressões obtidas. Imagine por exemplo que em determinados problemas, os enunciados nos levem às seguintes figuras e suas dimensões:







A primeira figura é uma região retangular de dimensões x e x + 3, cujo perímetro é indicado pela expressão:

$$2x + 2(x + 3) \text{ ou } 4x + 6$$

e cuja área é indicada por:

$$x(x + 3) \text{ ou } x^2 + 3x$$

A segunda figura é um cubo com arestas de medida x, cuja área total é indicada por:

$$6x^2$$

E cujo volume é expresso por:

$$x^3$$

A terceira figura é outro cubo, com arestas x + 2, cuja área total é:

$$6(x + 2)^2 \text{ ou } 6(x^2 + 4x + 4) \text{ ou } 6x^2 + 24x + 24$$

É cujo volume é expressão por:

$$(x + 2)^3 \text{ ou } x^3 \; 6x^2 + 12x + 8$$

Todas essas expressões são chamadas expressões polinomiais ou polinômios, cujo estudo já foi indiciado no ensino fundamental.

METODOLOGIA

Como qualquer outro conteúdo será usado material didático existente na escola como apoio (o livro didático, biblioteca para pesquisas, quadro etc.), não como os únicos materiais a auxiliar o professor. Considerando que o conteúdo esta inserido nas outras disciplinas (biologia, química, geografia, etc.,..) será desenvolvido aulas com atividades acompanhadas de problemas envolvendo assuntos pertinentes ao convívio dos alunos, juntamente com exercícios propostos, e de fixação.

Nas resoluções das atividades, o professor agirá como mediador, conduzindo os alunos a chegarem às conclusões corretas sem dar respostas prontas, permitindo assim que os alunos desenvolvam o pensamento matemático e as competências objetivadas no período.

Propor atividades para casa, usando exemplos citados pelos alunos, exercícios de outros livros didáticos, utilizando dados do cotidiano de cada um, atividades dos saerjinhos, saerj, Enem de anos anteriores. Estas atividades ao serem corrigidas servirão de motivação e interação entre os alunos, observando que a matemática está integrada no cotidiano do ser humano.

DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 1
1ª e 2ª Aulas

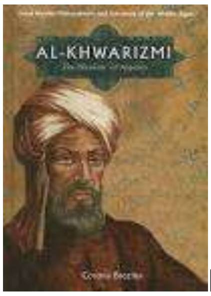
Duração prevista: 100 minutos.
Objetivos: Introduzir a definição de Polinômios e equações algébricas.

Pré-requisitos: Fazendo um paralelo entre os diversos graus de uma expressão.

Material necessário: Livro didático, quadro, computador (gelgebra).
Organização da classe: Individual e em equipe de três alunos.
Descritores associados: Compreender e associar um único polinômio, a uma expressão polinomial e vice-versa.

UM POUCO DE HISTÓRIA

Você saberia dizer em que momento de sua formação começou a usar letras(ou outros símbolos) no lugar de números para resolver problemas matemáticos? No início de seus estudos de Matemática, você certamente fazia contas e resolvia problemas que tinham bastante ligação com o seu cotidiano, até que chegou um ponto que os problemas ficaram mais complexos. Nesse momento foram introduzidos artifícios que facilitavam a representação dos componentes do problema, como o uso de letras que substituíam a incógnita – é daí que vem a expressão "o X da questão"!Pois na História também foi assim. Voltando aos célebres papiros egípcios, vimos que no início os problemas tratavam de situações do cotidiano e eram resolvidos de um modo simples, quase por tentativa. Mas com o tempo sugiram os símbolos, e a aritmética se transformou em Álgebra. Na verdade, aritmética e Álgebra coexistem e esta última é, hoje, bem sofisticada.

O termo álgebra vem do título do livro Hisab AL-jabr w'al-mugabalah, escrito em Bagdá por volta do ano 825, pelo matemático árabe 

Monhammed ibn-Musa AL-Khowarizmi (Maomé, filho de Moisés, de Khowarizmi).

Veja na foto uma página dessa obra.

O matemático AL-Khowarizmi foi quem propôs a reorganização dos termos que aparecem na equação para se chegar à solução. A álgebra surgiria com essa finalidade – resolver equações –por isso poderia até se chamada “a ciência das equações”, segundo Baumgart em Tópicos de história Matemática.

Dizemos”equações algébricas” quando são compostas de termos que contêm potência de X (ou de outra letra qualquer que indique a incógnita);a expressão que as contém é chamada polinômio. O maior expoente de x indica o “grau” do polinômio e, consequentemente, o grau da equação. Assim, dizemos “equações do segundo grau”quando o maior expoente de x é 21, e assim por diante.

Desde o século XVI são conhecidas fórmulas para a determinação de soluções de equações de até quarto grau. A do segundo grau já existe há bastante tempo e nós a conhecemos como fórmula de Bhaskará, embora já fosse aplicada bem antes de sua época (Bhaskara era um hindu e viveu no século XII),atribuindo-se a Al-Khowarizmi sua dedução: a de terceiro grau foi desenvolvida pelo matemático Niccolò Fontana de Brescia,  conhecido por Tartaglia (que significa ‘gago’), sendo depois, publicada por Cardano (ver capítulo anterior); e a de quarto grau, por frança Viéte (no século XVI).

A procura de uma fórmula que determinasse as raízes de uma equação polinomial de grau maior que quatro e que dependesse apenas de seus coeficientes e envolvesse as seis operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação) só terminou em 1799, quando Paolo Ruffini publicou uma obra sobre a teoria das equações, na qual mostra que a solução algébrica (isto é, por meio de fórmula) de equações de grau maior que quatro é impossível.

O estudo dos polinômios (com suas aplicações) foi tão amplamente explorado pelos matemáticos que se seguiam aos já citados que seria interminável expor seu percurso aqui. Os desenvolvimentos algébricos possibilitaram o aparecimento de áreas muito avançadas de caçulo, entre elas a chamada análise matemática, preparando o campo para grandes avanços na pesquisa científica.

Vamos ao estudo dos polinômios e à resolução de equações algébricas de qualquer grau. Veremos como analisar as possibilidades de soluções, chamadas raízes da equação, levando em conta que não dispomos de fórmula que forneça imediatamente seus valores, sabendo, entretanto, que no universo dos números complexos nenhuma delas fica sem solução.

Definição: chamamos expressão polinomial ou polinômio na variável complexa **x** toda expressão da forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x \; a_0$$

- a_n, a_{n-1}, $a_{n-2}, \ldots,$ a_2, a_1, a_0 são números complexos denominados coeficientes;
- **n** é um número inteiro positivo ou nulo.
- O maior expoente de **x**, com coeficiente não nulo, é o grau da expressão.

Exemplos:

a) $4x + 6$: expressão polinomial do 1º grau (grau 1).
b) $x^2 + 3x$: expressão polinomial do 2º grau (grau 2).
c) x^3 : expressão polinomial do 3º grau (grau 3).
d) $6x^2 + (1 - i)x + 5$: expressão polinomial do 2º grau (grau 2).

Pela definição, não são expressões polinomiais;

a) $x^{-2} + 3x^{-1} + 1$, pois o expoente da variável **x** não pode ser negativo.

b) $x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$, pois a variável **x** não pode aparecer em denominador.

c) $x^{\frac{2}{3}} \; 5x^{\frac{1}{3}} + 6$, pois o expoente da variável **x** não pode ser fracionário.

d) $\sqrt[3]{x} + 6\sqrt{x} + 2$, pois a variável **x** não pode aparecer sob radical.

FUNÇÃO POLINÔMIAL

As funções complexas f: c → C definidas por expressões polinomiais são denominadas funções polinomiais.

Assim:

1ª) $f(x) = 2x - 1$ é uma função polinomial de grau 1.

2ª) $g(x) = 3x^2 - 2x - 1$ é uma função polinomial de grau 2.

3ª) $h(x) = x^3 - 6x^2 + x - 1$ é uma função polinomial de grau 3.

4ª) $p(x) = x^4 - x^2$ é uma função polinomial de grau 4.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x a_0$$

para todo **x** complexo, é denominada função polinomial de grau **n**, em que **n** é um número inteiro positivo ou nulo e $\mathbf{a_n}$ é diferente de 0.

Se o grau de uma função polinomial for 0, então a função é definida por $f(x) = a_0$, com $a_0 \neq 0$.

Exemplos

1ª) $f(x) = 5$

2ª $p(x) = -2$

POLINÔMIO

A cada função polinomial associa-se um único polinômio (ou expressão polinomial) e vice-versa, de forma que não há confusão em nos referirmos indistintamente às funções polinomiais ou ao polinômios.

Exemplos:

1º) $p(x) = 5$ é um polinômio de grau 0 ou polinômio constante.

2º) $p(x) = 2x + 1$ é um polinômio do 1º grau.

3º) $p(x) = x^2 - 5x + 6$ é um polinômio de grau 2º grau.

Observação:

- Quando todos os coeficientes da expressão que define um polinômio são iguais a zero, ele é chamado de polinômio nulo, ou identicamente nulo, e, nesse caso, não se define seu grau.
  Ex: $0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$
- Normalmente, para escrever um polinômio, colocamos os monômios que o compõem em ordem decrescente de grau.
  Ex; a) $x^2 - 5x + 6$

  b) $6x^6 + 3x^5 - 8x^4 + \frac{1x^3}{2} + \frac{3x^2}{5} - x + 3$

  c) $5x^7 - \frac{1x^5}{6} - \sqrt{2x}$

- Diz –se que um polinômio de grau n é completo quando ele possui, em seus termos, monômios de todos os graus menores ou iguais a n.
  Ex; a) $2x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 1$ é complete

  b) $24x^5 + 8x^3 - 6x^2 - 7x$ é incompleto, pois faltam monômios de grau 4 e de grau 0.

- O valor que se obtém ao substituir a variável de um polinômio por um número real qualquer chama-se valor numérico do polinômio.

  Ex:O valor numérico de $x^3 - 2x^2 - x + 2$, que obtemos quando fazemos x = 1, é: $1^3 - 2.1^2 - 1 + 2 = 0$

  Se fizermos x = - 2, teremos $(-2)^3 - 2.(-2)^2 - (-2) + 2 = -12$; o valor numérico do polinômio para x = -2 é -12.

  Dois polinômios A e B são iguais, ou idênticos entre si, se assumem valores numéricos iguais para todo $x \in \mathbb{R}$ Indicamos A = B.

  Ex:a) $x^3 - 2x + 3 = ax^3 - bx + 3$, se a = 1 e b = -2

  b) $4x^2 + mx + 5 = ax^2 + 6x + b$, se a = 4, m = 6 e b = 5

3ª e 4ª Aulas
Duração prevista: 100 minutos.
Objetivos: Identificar um polinômio, reconhecer o grau dos polinômios e calcular o valor numérico.
Pré-requisitos: Noção intuitiva nas resoluções das atividades.
Material necessário: Quadro. Folha de atividades.
Organização da classe: Individual ou em equipes.
Descritores associados: Compreender e definir uma variável, e o nível (grau) de um polinômio .

Atividades;

1- Dê o grau dos seguintes polinômios:

a) $P(x) = 5x^2 + x - 4$
b) $P(x) = x^8 - x^7 + x^6 + 2x^5 + 3$
c) $P(x) = - 6x^4 + x^3 + 2x -1$
d) $P(x) = 8x^3 + 2x$
e) $P(x) = x$
f) $P(x) = 7$

2- Dado o polinômio $P(x) = 2x^2 - 3x + k$, determinar o valor de k de modo que a raiz se P(x) seja 4.

3- Determine o valor de a, de modo que o polinômio $P(x) = (a^2 - 9)x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$ tenha grau 3.

4- Dado o polinômio $P(x) = - 4x^3 + 2x^2 + x - 1$, calcule:
a) P(1)
b) P(2)
c) P(-3)
d) P(0)

5- Dado o polinômio $p(x) = mx - n$ determine o valor de m e n, determine o valor de m em, sabendo que $P(-1) = -7$ e $P(1) = -1$

6- Seja o polinômio $P(x) = ax^2 + 2x - b$, determine o valor de a e de b, sabendo que $P(2) = 6$ e $P(3) = 13$

7- Discuta o grau de cada um dos polinômios em função de a.

a) $A(x) = ax^4 - 3ax^3$

b) $B(x) = (a - 2)x^2 + (a - 1)x + 3$

c) $P(x) = (a^2 - 4a + 3)x^3 + (a - 1)x^2 + ax + 1$

Respostas:

1- a) Grau (P) = 2
b) Grau (P) = 8
c) Grau (P) = 4
d) Grau (P) = 3
e) Grau (P) = 1
f) Grau (P) = 0

2- Sendo 4 raiz de P(x), temos P(4) = 0 => $2 . 4^2 - 3 . 4 + k = 0$
$32 - 12 + k = 0 \Rightarrow k = -20$

3- a = 3 ou a = - 3

4- a) -2
b) -23
c) 122
d) -1

5- m = 3, n = 4

6- a = 1, b = 2

7- a) se a ≠ 0, o polinômio é de 4º grau

b) se a ≠ 2 => 2º grau
se a = 2 => 1º grau

c) se a ≠ 1 e a ≠ 3 (3º grau)
se a = 3 => 2º grau, se a = 1 => 1º grau.

5ª e 6ª Aulas

Duração prevista: 100 minutos.

Objetivos: Fixar o conteúdo estudado. Introduzir situações problema envolvendo operações envolvendo sequência numérica.

Pré-requisitos: Noções de Utilização das fórmulas do termo geral e da soma dos termos da P.A.

Material necessário: Folha de atividades.

Organização da classe: Individual ou em duplas.

Descritores associados: Compreender e utilizar os conceitos e fórmulas para encontrar os termos de uma PA.

OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

Vamos retornar operações conhecidas no estudo de expressões algébricas, como adição, subtração e multiplicação de polinômios, além da multiplicação de um número real por um polinômio, estudaremos mais detalhadamente a divisão de polinômios.

Soma de polinômios

1º)Se $p(x) = 3x^2 + 2x – 1$ e $q(x) = -x^3 + 4x^2 – 2x – 5$, temos:

$p(x) + q(x) = 3x^2 + 2x – 1 - x^3 + 4x^2 – 2x – 5$

$-- x^3 + 7x^2 – 6$

Subtração de polinômios:

2º) Se $p(x) = 3x^2 - 4x + 1$ e $q(x) = 5x^2 – 3x + 4$, temos:

$p(x) - q(x) = 3x^2 - 4x + 1 - 5x^2 + 3x - 4$,

$-2x^2 - x - 3$

Multiplicação de polinômios:

3º) Dado $p(x) = 2x^{3\,-}\, 4x^2 + 5x – 3$, temos:

$7 . p(x) = 7(2x^{3\,-}\, 4x^2 + 5x – 3)$

$14x^{3\,-}\, 28x^2 + 35x – 21$

4º) Dados $p(x) = 3x - 4$ e $q(x) = – 2x + 5$, temos

$p(x) . q(x) = (3x – 4)(– 2x + 5)$

$- 6x^2 + 15x + 8x – 20$

$- 6x^2 + 23x – 20$

Obs: após uma revisão de divisão de números inteiros passo a passo

$$
\begin{array}{r|l}
337 & \ 8 \\ \cline{2-2}
-32 & 42 \\ \cline{1-1}
17 & \\
-16 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}
$$

Divisão de polinômios:

5º $p(x) = x^2 - 5x + 6x$ e $q(x) = 2 - 3$

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 - 5x + 6 & 2 - 3 \\ \cline{2-2}
-x^2 + 3x & x - 2 \\ \cline{1-1}
-2x + 6 & \\
2x - 6 & \\ \cline{1-1}
0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Atividades:

1- Vamos somar os polinômios:
   $p(x) = 4x^5 - 3x^4 - 2x^2 + 1$ e
   $q(x) = -x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 7$

2- Subtraindo os polinômios:
   $p(x) = 6x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 1$ e
   $q(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 1$

3- Vamos multiplicar os polinômios:
   $p(x) = 3x^2 + 2x$ e
   $q(x) = x^3 - x^2 + 5$

4- Vamos dividir o polinômio $p(x) = 18x^4 - 36x^3 + 19x^2 - 15x$ por $q(x) = 3x^2 - 5x$

Respostas:

1- $4x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 8$
2- $3x^4 - x^3 + 3x^2 + 2$
3- $3x^5 - x^4 - 2x^3 + 15x^2 + 10x$
4- $6x^2 - 2x + 3$

AVALIAÇÃO

Duração prevista: 100 minutos.

Objetivos: Avaliar o conhecimento**.**

Pré-requisitos: Noção intuitiva de identificação de Polinômios, reconhecimento do seu grau e resolução das quatro operações.

Material necessário: Folha de atividades.

Organização da classe: Individual

Descritores associados: Compreender e interpretar e resolver as atividades propostas.

Colégio Estadual "Geraldino Silva"

Avaliação de Matemática - Turma: _____ data ___/___/___

Valor: 2,0 (dois pontos)   Obteve: ____________

Aluno(a) _______________________________________

Obs: após resolver os exercícios, marque as resposta correspondente nos parênteses abaixo.

Depois marque a mesma resposta no gabarito.

1- Identifique as expressões que definem funções polinomiais:

a) $P(x) = 3x^2 + 4x - 2$
b) $P(x) = x^{-4} + 8x + 2$
c) $P(x) = x^2 - 2x^{3/2}$
d) $P(x) = 8x^3 - \frac{7}{5}x^2 + 4x - 1$
e) $P(x) = x + x^{-1} + 10$
f) $P(x) = \sqrt{5}x^2 + 3x - \sqrt{2}$

a) ( ) c, d, f
b) ( ) a, d, f
c) ( ) a, e, f
d) ( ) a, b, f

2- Determine o grau dos seguintes polinômios em função de m e n:

a) $P(x) = mx^4 + 5x^3 - x^2 + 7x - 3$

b) $P(x) = mx^3 + nx^2 - 5x + 8$

a) ( ) a= m ≠0 => -4, m = 0 => 3
b = m ≠ 0 => 3;
m = 0 e n = 0 => 2
m = 0 e n = 0 => 1

b) ( ) a= m ≠0 => 4, m = 0 => 0
b = m ≠ 0 => 3;
m = 0 e n = 0 => 2
m = 0 e n = 0 => 1

c) ( ) a= m ≠0 => 4, m = 0 => 3
b = m ≠ 0 => 3;
m = 0 e n = 0 => 2
m = 0 e n = 0 => 1

d) ( ) a= m ≠0 => 4, m = 0 => 5
b = m ≠ 0 => -2;
m = 0 e n = 0 => 2
m = 0 e n = 0 => 1

3- Dados $P(x) = 5x^4 + 3x^3 - 5x^2$, $Q(x) = 3x^3 - 8x^2 + 9x - 3$.
Calcule:
P(x) + Q(x)
P(x) – Q(x)

a) ( ) $-5x^4 + 6x^3 - 13x^2 + 9x + 3$.
$5x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 14x + 3$.

b) ( ) $5x^4 + 4x^3 - 11x^2 + 9x - 3$.
$5x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 14x + 5$.

c) ( ) $5x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 9x - 3$.
$5x^4 + 3x^3 + 11x^2 - 14x + 3$.

d) ( ) $5x^4 + 6x^3 - 13x^2 + 9x - 3$.
$5x^4 - 3x^3 + 11x^2 - 14x + 3$.

4- Multiplicando os polinômios teremos:
$(2x - 3)(3x^2 + 4x - 5)$.

a) ( ) $5x^3 - x^2 - 22x + 15$
b) ( ) $-6x^3 - x^2 - 24x + 15$
c) ( ) $6x^3 - x^2 - 22x + 15$
d) ( ) $6x^3 - x^2 - 11x + 16$

5- Determine o quociente:

a) $(10x^2 - 23x + 12) : (5x - 4)$

b) $(2x^3 + 7x^2 - 12x + 1) (2x^2 - 3x)$

a) ( ) $a = 2x - 3$,
$b = 2x + 5$

b) ( ) $a = 2x - 3$,
$b = x + 5$

c) ( ) $a = -2x - 3$,
$b = x + 6$

d) ( ) $a = 2x - 2$,
$b = 3x + 5$

Gabarito

	a	b	c	d
1		x		
2			x	
3				x
4			x	
5		x		

BIBLIOGRAFIA

PAIVA, Manoel. Matemática – Paiva, volume 1. São Paulo: Moderna, 2005, 517p.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. Volume 3. São Paulo: Ática, 2011. 172p.

XAVIER, Claúdio; BARRET, Benigno. – Matemática Aula por Aula: Ensino médio. Volume 3. Editora FTD, São Paulo, 2005 (2ª edição renovada), 179p.

SMOLE, Kátia Stocco, Maria Ignez Diniz, Matemática Ensino Médio, volume 3, 6.ed. São Paulo: Saraiva, 2010,216p.

Sites acessados:

Símbolos Matemáticos. Disponível em <http://www.qieducacao.com/2010/09/simbolos-matematicos.html>. Acesso em 5 mar. 2013.

https://www.google.com.br/search?q=gravuras+de+treinador+correndo&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ei=ezpoU_maBPO0sATaq4C4Dg&ved=0CEwQ7Ak&biw=1280&bih=670#q=gravuras+de+jogo+de+futebol.&tbm=isch

A capa foi feita neste site:

https://www.google.com.br/images?hl=pt-BR&rlz=1T4VSND_pt-BRBR572BR577&q=gravuras+de+figuras+de+polin%C3%B4mio+e+equa%C3%A7%C3%B5es+polinomiais&sa=X&oi=image_result_group&ei=Ps9DVLr-BsfAggSl94DIDQ&ved=0CBQQsAQ