FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO ESTADUAL CAMPOS SALLES
PROFESSORA: LUCIULA SILVEIRA DIAS LEAL
SÉRIE: 1ª GRUPO:10
TUTOR (A): ANTÔNIO DE ALMEIDA FILHO

Plano de Trabalho Funções Trigonométricas

Introdução

A palavra trigonometria vem do grego e significa “medida (metria) em triângulos (trigon)”. Portanto a trigonometria se ocupa dos métodos de resolução de triângulos e fazem parte de seu campo de investigação as funções trigonométricas.

É imprescindível então que a abordagem das funções trigonométricas seja permeada dessa observação. Em outras palavras, buscaremos alimentar a noção de que podemos aliar o plano cartesiano às noções de triângulo retângulo, bem como às de arcos e radianos para modelar muitos fenômenos de comportamento cíclico ou periódico.

Podemos encontrar muitas situações que são modeláveis por funções trigonométricas. Algumas são de interesse imediato para nossa clientela, facilitando sua compreensão, como o caso da representação gráfica da onda sonora proposta no roteiro um. Outras abordam temas que, embora conhecidos, fogem de seus centros de interesse, por isso podem ser citadas, mas não pretendemos utilizá-las como motivação para aprendizagem.

É certo que nesta etapa do ano, na qual todos já estão bastante cansados, qualquer tentativa de trabalho mais tradicional não colherá frutos significativos.

Faz-se necessário, portanto, que as funções trigonométricas sejam compreendidas da forma mais lúdica e natural possível, pois se trata de um tema que causa certo pavor devido a sua apresentação gráfica sempre acompanhada de muitos números irracionais e representações com π.

Em nosso Plano de Trabalho pretendemos tornar o estudo das funções trigonométricas uma etapa prazerosa, sem nos preocuparmos com a formalidade que os livros didáticos sugerem e fazendo uso de recursos simples, que estão a mão de todo professor, mas sem abrir mão também dos instrumentos tecnológicos e assim tornar mais agradável e significativo o estudo das Funções Trigonométricas.

Desenvolvimento/ atividades

Observação: Em cada atividade o descritor a ser avaliado consta das habilidades e competências que se deseja desenvolver.

ATIVIDADE 1

HABILIDADE/COMPETÊNCIA:

- ✓ Reconhecer e representar números reais em diferentes contextos.
- ✓ Associar pontos no plano cartesiano às suas coordenadas e vice-versa.
- ✓ Identificar o radiano como unidade de medida de arco.
- ✓ Transformar a medida de um arco de grau para radiano e vice-versa.
- ✓ Compreender a composição do ciclo trigonométrico.
- ✓

PRÉ-REQUISITOS:

- ✓ Noção de plano cartesiano.
- ✓ Noções de ciclo trigonométrico;
- ✓ Ordenação de números reais na reta numérica;
- ✓ Medidas de arcos em graus e em radianos;

TEMPO DE DURAÇÃO:

- ✓ 100 minutos

RECURSOS:

- ✓ Marcador e quadro de fórmica, papel quadriculado, régua, caneta, papel cartão, compasso, palito de picolé, tachinha e caderno.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA:

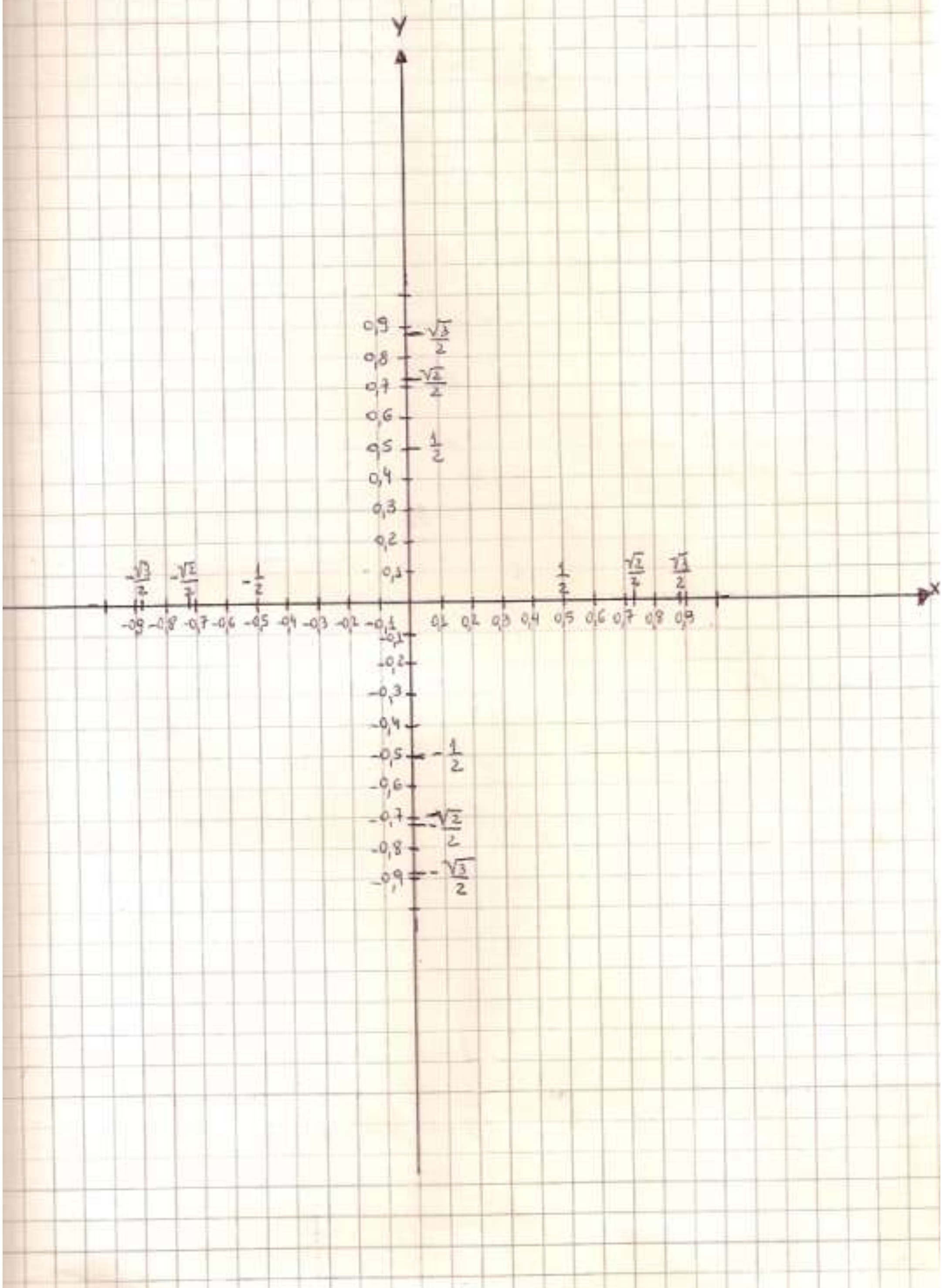
- ✓ Em duplas

METODOLOGIA ADOTADA:

Iniciar a aula propondo a construção em dupla do plano cartesiano numa folha de papel quadriculado e em seguida, sobre este plano, o ciclo trigonométrico de raio 1 dezena (a considerar dez quadradinhos) , com auxílio de compasso.

Na primeira etapa da construção (plano cartesiano) pretendemos que representem em cada um dos eixos os valores decimais que representam as frações de 1, de 0,1 a 0,9 além de alguns números irracionais que serão úteis tanto para revisão de conceitos do Ensino Fundamental como para facilitar o resultado das operações no ciclo trigonométrico num segundo momento.

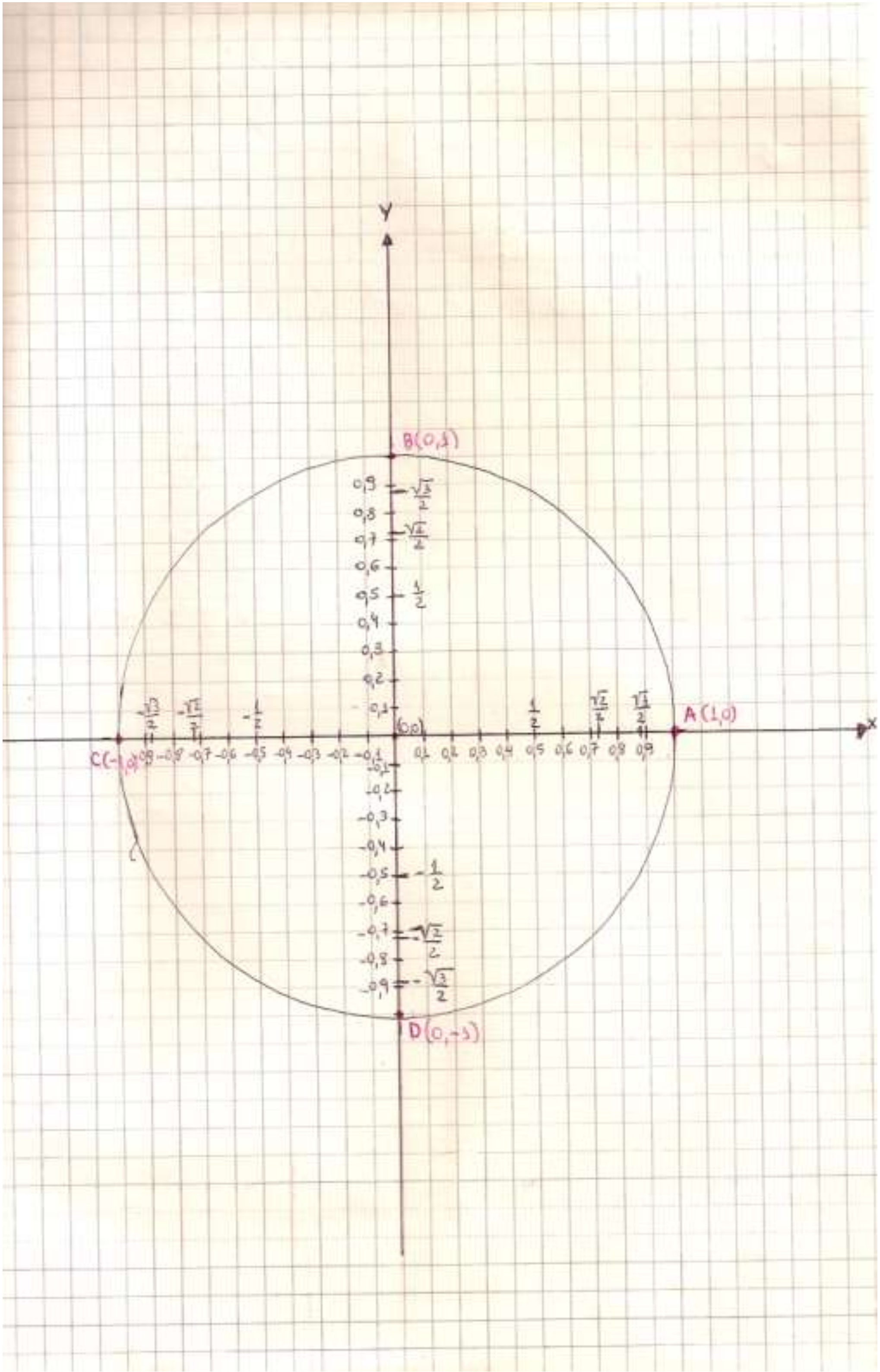
Ficando assim:



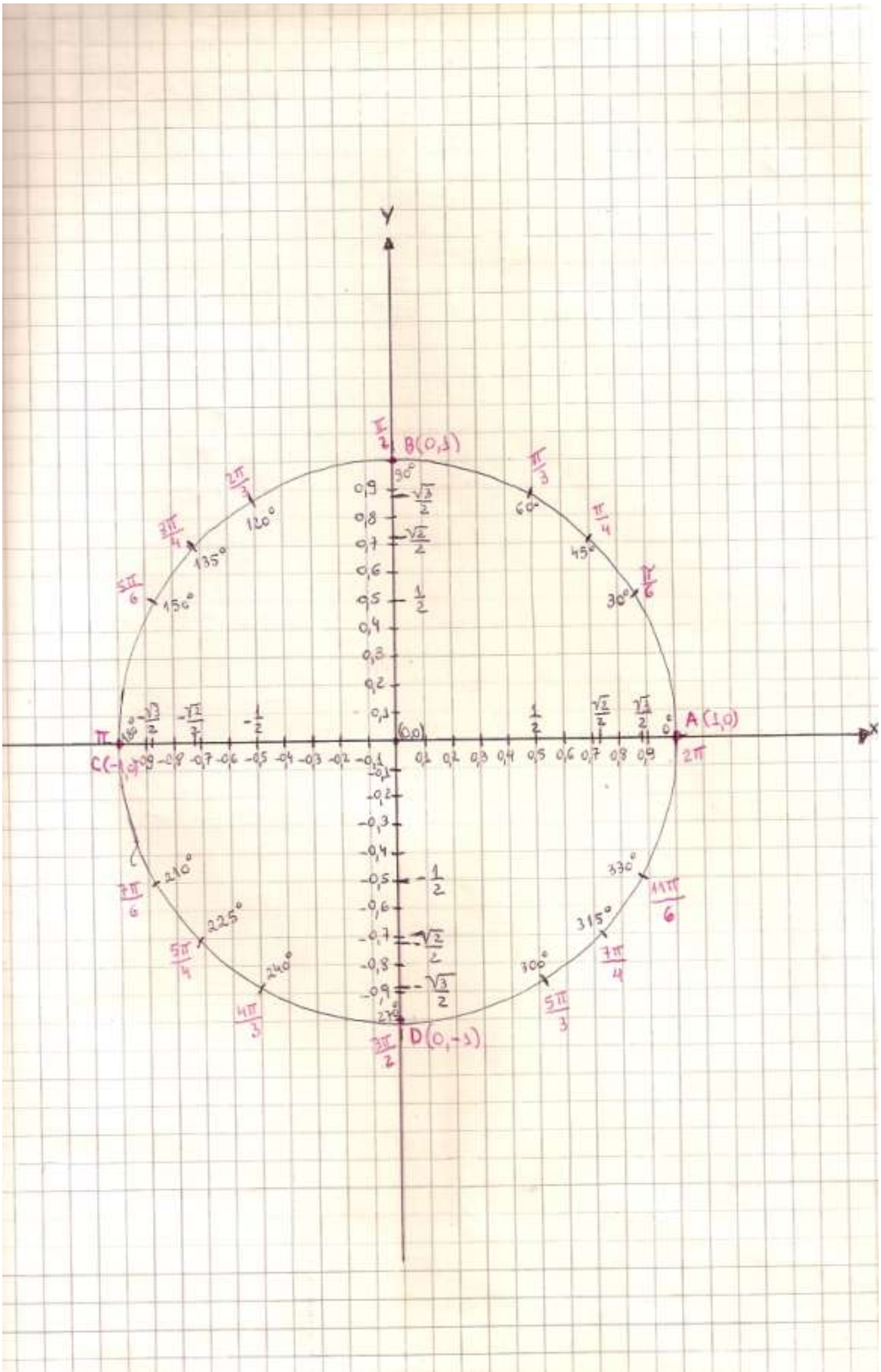
Y
X
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
-0,5
-0,6
-0,7
-0,8
-0,9
0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9
-0,9 -0,8 -0,7 -0,6 -0,5 -0,4 -0,3 -0,2 -0,1

Na segunda etapa (ciclo trigonométrico), marcaremos a origem do ciclo (ponto A) assim como os outros pontos de interseção com os eixos (pontos B,C e D) e iremos reforçar conceitos já adquiridos sobre os quadrantes, a origem do sistema de coordenadas e a origem do ciclo trigonométrico.

Dessa forma:



Abordaremos também as medidas dos arcos em graus e radianos e para isso vamos também marcar algumas medidas de ângulos e arcos em graus e radianos próximo à circunferência.



Depois de feita essa construção a mesma será colada em folha de papel cartão para que possa ser usada nas próximas atividades.

Cada aluno vai fixar no centro do círculo, com uma tachinha, um palito de picolé que será usado para determinar, na outra extremidade, o comprimento dos arcos sugeridos pela professora.

Propor que observem o que acontece de semelhante com os arcos simétricos em relação a cada eixo e em relação à origem do plano.

Neste momento além dos arcos da primeira volta aproveitaremos para falar dos arcos côngruos, pois a manipulação do ciclo propicia seu entendimento.

As anotações sobre os arcos medidos e das conclusões dos alunos deverão ser anotadas no caderno.

Trata-se de uma atividade aparentemente informal, mas que em sua essência trará muitos conhecimentos de forma incidental e prepara o grupo para as próximas etapas.

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM:

Observação e discussão sobre os tópicos abordados durante a construção do ciclo e discussão sobre os arcos propostos e sua relação com seus côngruos.

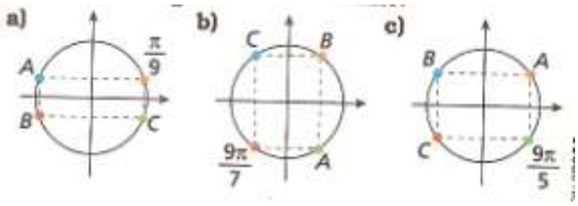
Para consolidar e avaliar a aprendizagem e organizar os conceitos trabalhados será feita uma atividade em folha.

<u>MODELO DA FOLHA DE ATIVIDADES:</u>

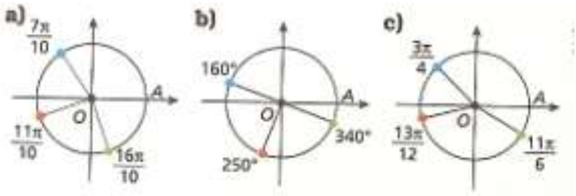
Colégio_________________________________ data:___/___/____
Professora: ____________________________________ turma:___________
Aluno(a):____ nº________

1) Copie do ciclo trigonométrico as medidas dos arcos cujas extremidades são os arcos correspondentes de: 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330° e 360°.

2) Observando as respostas da questão anterior, indique o simétrico em relação aos eixos x e y e em relação à origem O, dos arcos de:
   a) $\frac{5\Pi}{4}$ rad
   b)330°
   c) $\frac{2\Pi}{3}$ rad
   d) 315
3) Determine a medida dos arcos de extremidades A, B e C nos ciclos trigonométricos abaixo:



4) Obtenha a medida dos arcos do 1º quadrante que são simétricos aos arcos cujas medidas estão indicadas nas figuras:



<u>ATIVIDADE 2</u>

HABILIDADE/COMPETÊNCIA:

- ✓ Associar pontos no plano cartesiano às suas coordenadas e vice-versa.
- ✓ Representar o gráfico de uma função a partir da correspondência entre duas grandezas representadas em uma tabela.
- ✓ Representar o seno e o cosseno de um arco qualquer no ciclo trigonométrico.
- ✓ Identificar gráficos de funções trigonométricas: seno.
- ✓

PRÉ-REQUISITOS:

- ✓ Ter construído o ciclo trigonométrico da atividade um e compreender seus atributos.

TEMPO DE DURAÇÃO:

- ✓ 100 minutos

RECURSOS:

- ✓ Ciclo trigonométrico construído, palito de picolé tingido em cor diferente do outro, tachinha, caderno, caneta, projetor e software Geogebra.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA:

- ✓ Livre escolha.

METODOLOGIA ADOTADA:

Iniciar a aula questionando porque o assunto que estamos estudando chama-se Funções Trigonométricas.

Propor que coloquem outro palito de picolé fixado com uma tachinha na extremidade que intercepta a circunferência a fim de construir um triângulo retângulo com o eixo das abscissas.

Fazer algumas proposições de construções de arcos, sempre solicitando que o palito vertical forma ângulo reto com o eixo das abscissas.

Pedir que anotem, para os arcos solicitados as coordenadas x e y no caderno, numa tabela. Assim de forma geral a tabela será construída assim:

Arco em graus	Arco em radianos	Coordenada x	Coordenada y
30°	$\frac{\Pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
45°			
60°			
90º			
120°			
135º			
150°			
180°			
210°			
225°			
240°			
270°			
300°			
315°			
330°			
360°			

Pedir que, de posse da tabela construída, tracem em outra folha de papel quadriculado o plano cartesiano, usando os valores da tabela da atividade anterior, porém estabelecendo que no eixo dos x deverão usar as medidas dos arcos (preferencialmente em radianos) e no eixo dos y os valores encontrados no próprio eixo das ordenadas para cada arco da tabela, formando os pontos e esboçando o gráfico.

Definir que o gráfico em questão trata-se de uma ondulação chamada senóide e pedir que tracem o mesmo da forma mais aproximada e regular possível, a partir dos pontos já marcados.

Propor que “descubram” o porquê do nome senóide realizando e observando novamente as construções de triângulos retângulos no ciclo trigonométrico.

Espera-se que em cada construção observem que o valor da ordenada é também o valor do seno do ângulo formado pela extremidade do arco.

Caso os alunos tenham dificuldade para determinar essa relação será adequada a sugestão do professor, fazendo com que calculem os senos de alguns triângulos retângulo construídos, os comparem com as medidas e percebam a importância da medida unitária do raio para a determinação do seno ser o valor da ordenada.

Verificar junto ao grupo que o eixo das ordenadas será também chamado eixo dos senos.

Podemos explorar o período (incentivando-os a perceber que sempre será equivalente ao comprimento do arco de uma circunferência, de 0 a 2π).

Iremos então utilizar o projetor e o software Geogebra para analisar algumas características da função seno e sua variação percorrendo o ciclo trigonométrico no sentido anti-horário, a partir de A(1,0), verificando que:

- Para todo $\boxed{\alpha \in \Re, 0 \leq \alpha \leq 2\Pi,}$ temos $\boxed{0 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1}$
- O seno cresce em QI, decresce em QII, decresce em QIII e cresce em QIV.

Para tanto seguiremos parte das orientações dadas pelo roteiro 3, mas com objetivo de analisar a função seno. Assim um aluno será convidado a operar o programa e seguir o roteiro:

1. Abra uma tela nova no Geogebra. No campo “Entrada”, disponível na parte inferior da tela, digite O=(0,0). O programa marcará o ponto O, origem do sistema de eixos cartesianos.

2. Agora vamos traçar a circunferência que representará o ciclo trigonométrico. Para isso, clique no botão 

, disponível no 6º menu de botões, e clique no ponto O (origem do sistema cartesiano). Vai abrir-se uma caixa de diálogo, pedindo que você informe que raio você deseja que sua circunferência tenha, conforme podemos ver abaixo.

Digite 1, que é o raio do ciclo trigonométrico, e o botão OK, e você verá na tela uma circunferência de centro O e raio unitário.

3. Precisamos agora marcar a origem do ciclo trigonométrico. Como vimos, a origem é o ponto (1,0), que chamaremos nesta construção de A. Então, novamente no campo Entrada, digite A=(1,0) seguido da tecla ENTER. Surgirá na tela o ponto A(1,0). Até agora, sua construção deve estar assim:

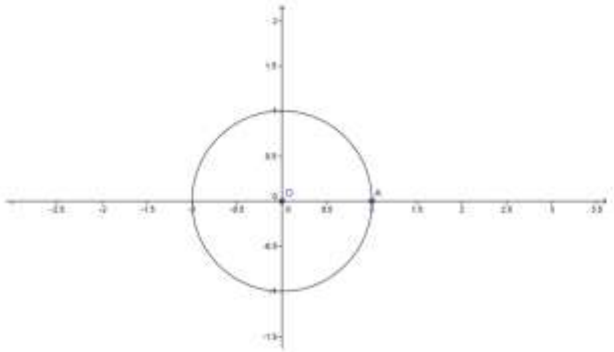


Figura: construção com o Geogebra.

4. Proceda da mesma maneira para marcar os pontos B=(-1,0), C=(0,1) e D=(0,-1). Este é o ciclo trigonométrico, e os pontos A, B, C e D são os limites dos quadrantes.
5. Tome um ponto E qualquer no ciclo trigonométrico e marque o arco AOE, clicando no botão  (6º menu de botões) e, sequencialmente, nos pontos O, A e E. Você verá na janela da álgebra surgir a indicação “d=...”, que representa o comprimento do arco AOE. Ao clicar com o botão direito sobre o arco você poderá trocar sua com através do tópico “propriedades”. Escolha uma cor que destaque o arco.

Digite no campo Entrada os pontos F=(0,sin(d)). Surgirá na tela o ponto F, de maneira que o comprimento do segmento OF indica o seno do arco AOE.

Vamos também acrescentar segmentos que servirão de catetos para visualização do triângulo retângulo formado entre o pontos AOE. Para isso clique no 3º menu de botões (segmento definido por dois pontos) e depois nos pontos O e E. Repetindo a operação para os pontos F e E. Pode-se depois também trocar a cor desses “catetos”. Escolha uma cor bem sutil. Pronto! Movimente o ponto E no ciclo trigonométrico e observe F movendo-se no intervalo de [-1,1] no eixo y. Discuta com seus colegas sobre o crescimento e o decrescimento da função em cada quadrante.

O ciclo trigonométrico ficará assim:

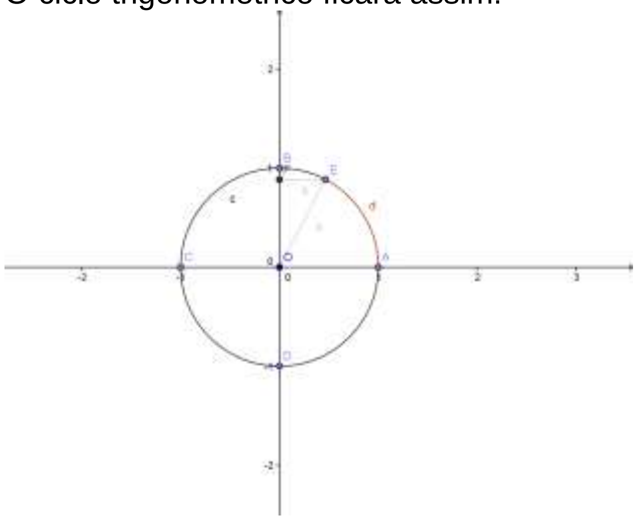


Imagem do ciclo trigonométrico com a função seno

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM:

Durante a realização da atividade e da correção junto ao grupo, através da observação das anotações e das discussões dos alunos.

ATIVIDADE 3

HABILIDADE/COMPETÊNCIA:

- ✓ Representar o gráfico de uma função a partir da correspondência entre duas grandezas representadas em uma tabela.
- ✓ Representar o seno e o cosseno de um arco qualquer no ciclo trigonométrico.
- ✓ Identificar gráficos de funções trigonométricas: seno e cosseno.

PRÉ-REQUISITOS:

- ✓ Compreensão do ciclo trigonométrico e da relação entre a extremidade do arco e as razões trigonométricas.
- ✓ Noções de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo e sua relação com o ciclo trigonométrico.

TEMPO DE DURAÇÃO:

- ✓ 50 minutos

RECURSOS:

- ✓ Caderno, lápis, quadro de fórmica, marcador para quadro de fórmica, projetor, software Geogebra, folha de papel quadriculado.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA:

- ✓ Em duplas.

METODOLOGIA ADOTADA:

Iniciaremos com uma atividade no caderno, visando a revisão da função seno.

1) Indique o valor de:

a) $sen\frac{3\Pi}{2}$	b) $sen\Pi$	c) $sen\frac{5\Pi}{2}$	d) $sen\frac{11\Pi}{2}$
e) $sen\ 0^{o}$	f) $sen\ 1530^{o}$	g) $sen(-90^{o})$	h) $sen\ 810^{o}$

2) Construir o gráfico das funções e identificar imagem e o período de cada uma:

a) y = 3 sen x	b) y = sen x/2

Após a correção e discussão de dúvidas daremos início ao aprimoramento do ciclo construído no Geogebra, acrescentando o ponto G para o estudo da função cosseno. Assim, utilizaremos o roteiro 3 como orientação para esta aula. Acrescentando inicialmente ao ciclo trigonométrico apenas o ponto G.

Abrir o arquivo salvo na aula anterior e verificar se algum aluno deseja dar continuidade à sua construção.

Com auxílio do projetor todos poderão observar e dar sugestões no trabalho cujas orientações são:

Digite no campo Entrada o ponto G=(cos(d),0). Surgirá na tela o ponto G, de maneira que o comprimento do segmento OG indica o cosseno do arco AOE. Movimente o ponto E no ciclo trigonométrico e observe G movendo-se no intervalo de [-1,1] no eixo x. Estimular o grupo a verificar que o cosseno ocorre no eixo das abscissas, logo o mesmo pode ser denominado eixo dos cossenos e que, mais uma vez isso ocorre de forma natural, pois a hipotenusa tem a medida do raio. Uma unidade.

Acrescentaremos, como na atividade anterior, um segmento entre os pontos E e G e trocaremos sua cor por uma mais sutil. Assim formaremos dois triângulos retângulos congruentes.

O ponto E deverá percorrer os quadrantes para análise da variação da função cosseno.

Evitamos nestas atividades fazer o esboço dos gráficos no momento da assimilação do conceito a fim de evitar que os alunos confundam o ciclo trigonométrico com a representação gráfica da função.

Explorar na janela de álgebra do Geogebra as variações do cosseno assim como rever as do seno e observar a relação fundamental da trigonometria, onde $x^2+y^2=1$. Ou seja, $sen^2\alpha+cos^2\alpha=1$.

A figura ficará assim:

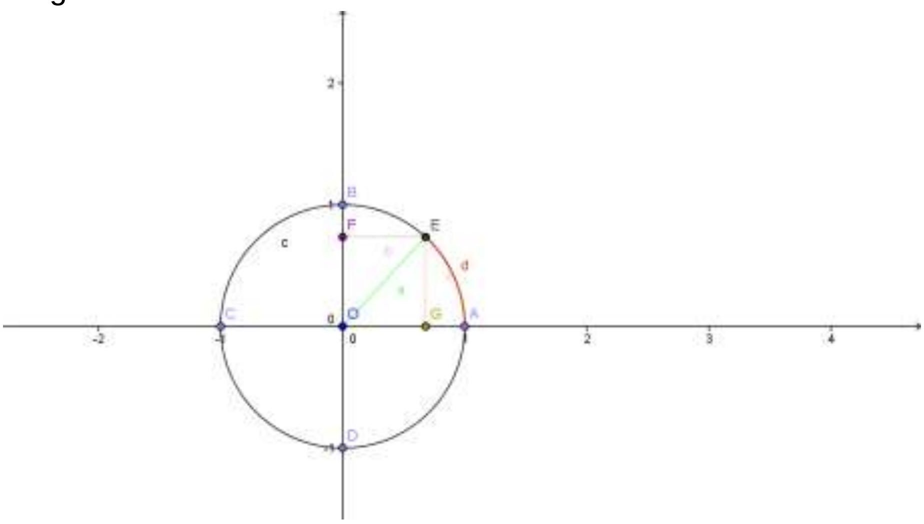


Figura com destaque para as funções seno e cosseno

Retornaremos ao ciclo trigonométrico confeccionado pelos alunos a fim de aprimorá-lo também e fazer o estudo da função cosseno a partir dele, pois é um material de mais acessível para manuseio em atividades e avaliações.

O manuseio dos palitos servirá para perceberem a íntima relação entre o Teorema de Pitágoras e a função cosseno.

De posse desse recurso os alunos serão convidados a rever a tabela de valores já construída para esboçar um novo gráfico, estabelecendo que no eixo dos x deverão novamente usar as medidas dos arcos (preferencialmente em radianos) e no eixo dos y os valores encontrados no eixo das abscissas para cada arco da tabela, formando os pontos e esboçando o gráfico.

Assim poderão perceber que trata-se de usar como ordenada os valores dos cossenos dos arcos determinados.

Assimilada esta informação utilizarão o tabela para esboçar em folha quadriculada o gráfico da função cosseno.

Os alunos serão incentivados a fazer suas próprias anotações sobre o que entenderam da função cosseno.

Podemos, novamente explorar o período (incentivando-os a perceber que sempre será equivalente ao comprimento do arco de uma circunferência, de 0 a 2π).

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM:

Será realizada através da observação e leitura das anotações feitas pelos alunos.

<u>ATIVIDADE 4</u>

HABILIDADE/COMPETÊNCIA:

- ✓ Representar o gráfico de uma função a partir da correspondência entre duas grandezas representadas em uma tabela.
- ✓ Representar o seno e o cosseno e a tangente de um arco qualquer no ciclo trigonométrico.
- ✓ Identificar gráficos de funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

PRÉ-REQUISITOS:

- ✓ Compreensão do ciclo trigonométrico e da relação entre a extremidade do arco e as razões trigonométricas.
- ✓ Noções de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo e sua relação com o ciclo trigonométrico.

TEMPO DE DURAÇÃO:

- ✓ 50 minutos

RECURSOS:

- ✓ Ciclo trigonométrico distribuído em papel cartão e transparência.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA:

- ✓ Em duplas.

METODOLOGIA ADOTADA:

Distribuir para a dupla um ciclo trigonométrico confeccionado em papel cartão e transparência no qual há um eixo vertical paralela ao eixo das ordenadas e que representa os valores assumidos na função tangente.

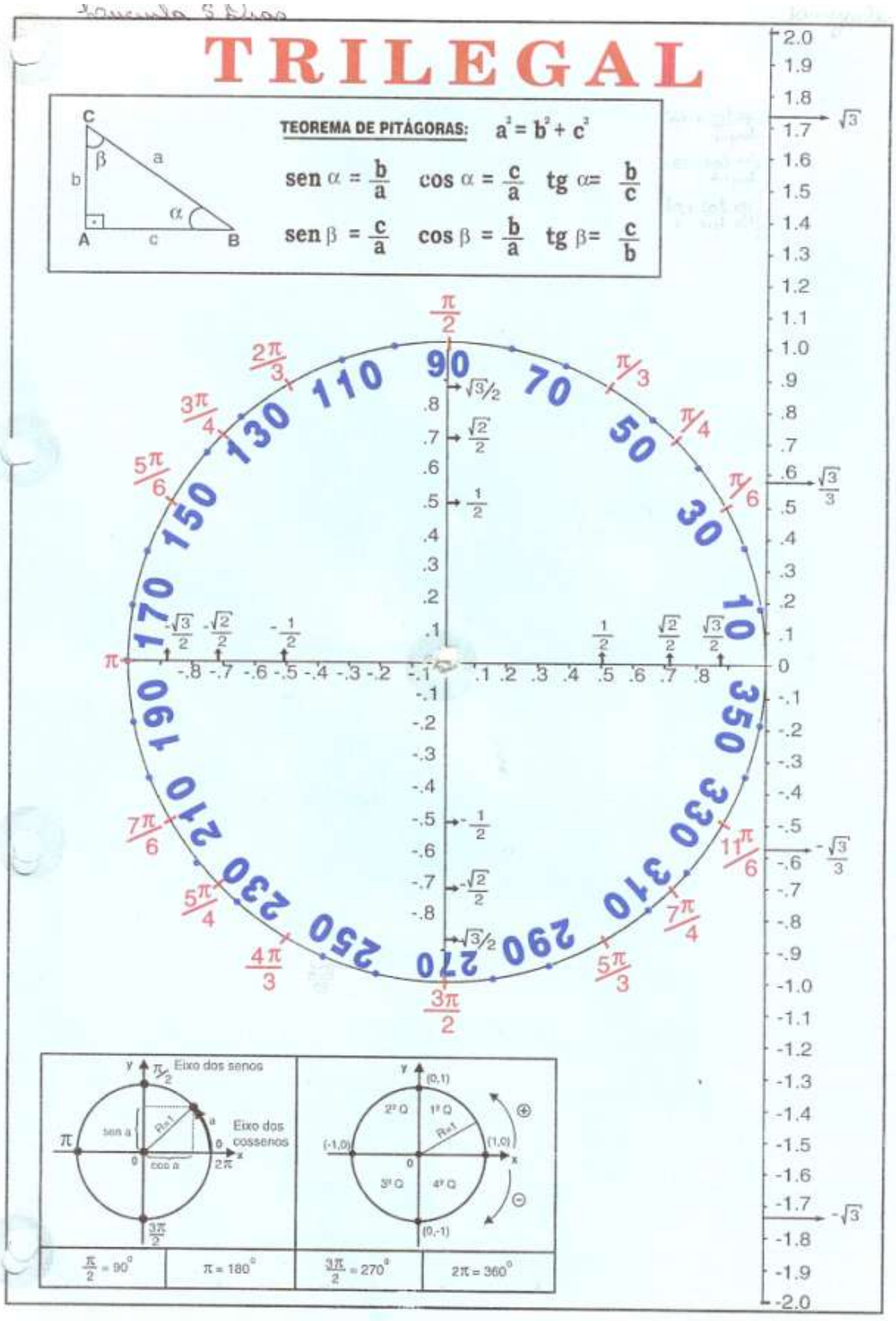
Salientar o significado do termo: **tangenciar**.

Propor que verifiquem que os valores desse eixo são os mesmos encontrados no eixo dos y, mas que o triângulo retângulo formado é externo ao limite da circunferência.

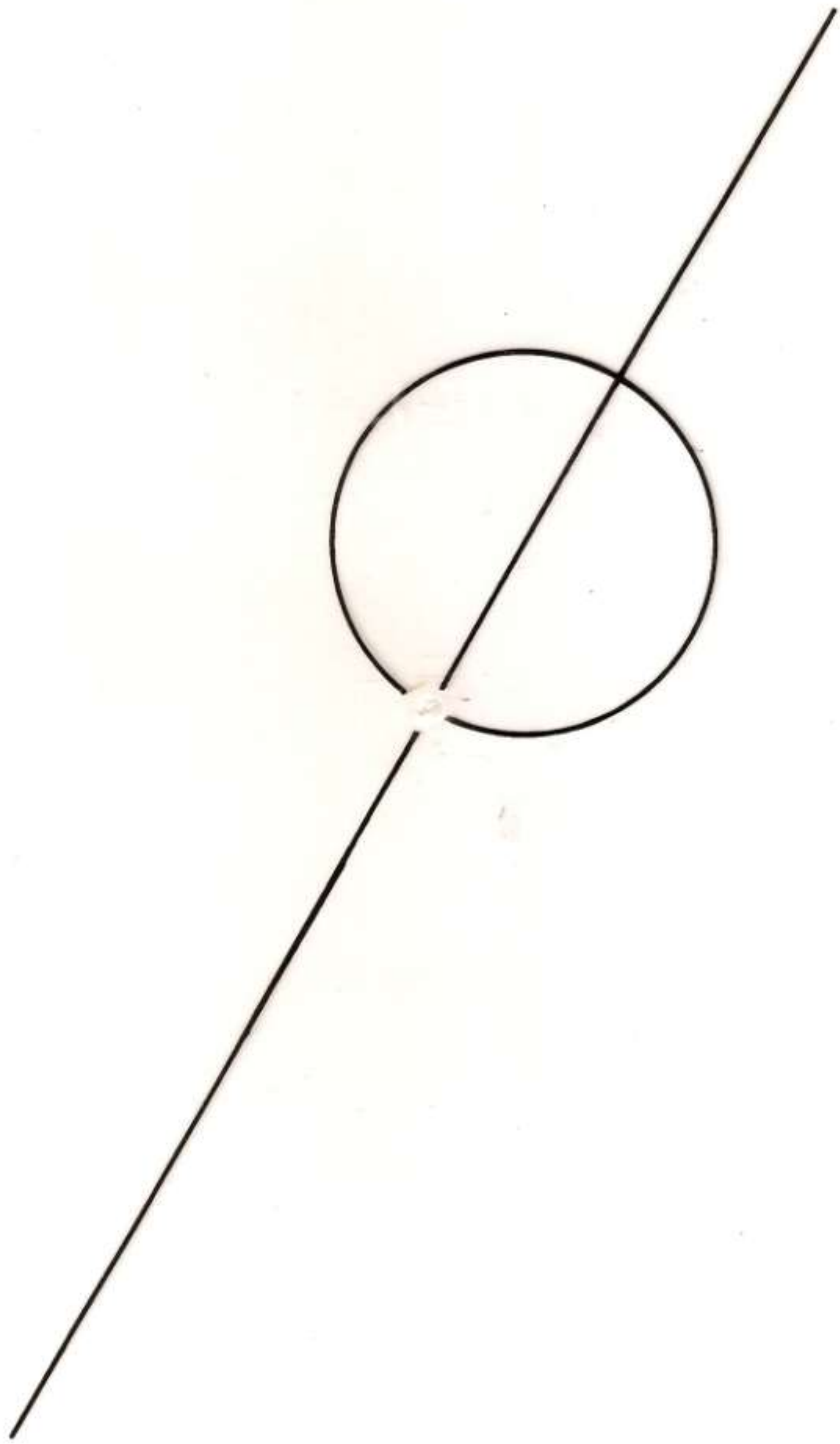
Novamente será feita a construção de uma tabela, dessa vez direcionada apenas aos valores dos arco (assumidos por x) e dos valores encontrados para as respectivas tangentes no manuseio do ciclo trigonométrico distribuído. Assim:

Arco em radianos	Tangente
$\frac{\Pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

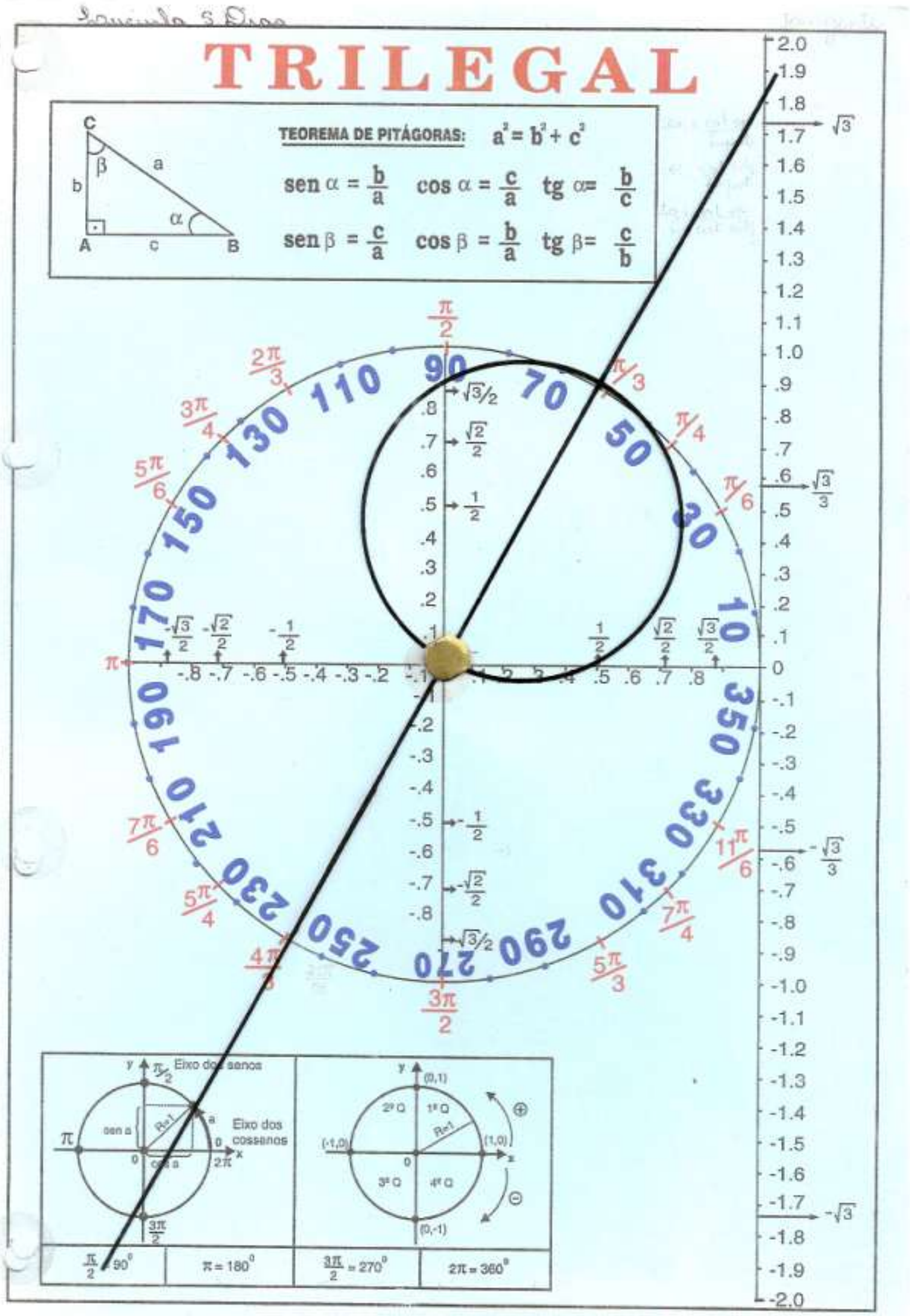
Modelo do ciclo trigonométrico:



Modelo da transparência que deve ser fixada com uma bailarina ao centro do ciclo trigonométrico:



Depois de montado ficará assim e poderá ser manipulado:



Os alunos poderão fazer novamente o esboço do gráfico da função em folha quadriculada. Observar o período e discutir as diferenças entre o gráfico da função tangente o os gráficos das funções seno e cosseno.

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM:

Será feita durante a realização da atividade, do manuseio do ciclo trigonométrico e através da observação dos esboços dos gráficos e colocações verbais feitas pelos alunos.

Referências

ROTEIROS DE AÇÃO e TEXTOS – Função Trigonométrica – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2012. Disponíveis em: http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=36#campo_conceitual_c1Acesso em 26 novembro de 2012.

GIOVANNI, José Ruy & BONJORNO, José Roberto – MATEMÁTICA COMPLETA – vol. 1 ed. São Paulo, FTD, 2005

FILHO, Benigno Barreto & SILVA, Claudio Xavier da – MATEMÁTICA AULA POR AULA . São Paulo, FTD, 2000.

SAERJINHO 2012, Matriz de referência de Matemática, 1º ano ensino médio. Disponível em http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=6

CURRÍCULO MÍNIMO 2012 – MATEMÁTICA. Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro – Rio de Janeiro, 2012.