Formação Continuada em Matemática
Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 2º Ano – 2º Bimestre/2014

Plano de Trabalho 1

Regularidades Numéricas:

Sequências

Tarefa 1

Mônica Cristina Martins Pereira
Tutor: **Susi Cristine Britto Ferreira**

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho foi baseado na leitura do roteiro de ação proposto. O objetivo do mesmo é introduzir os conceitos de sequências numéricas, inicialmente construindo o mesmo através de exercícios e jogos .Desenvolvendo nos alunos as habilidades relacionadas ao reconhecimento de uma sequência, suas regularidades e modelo matemático (fórmula). Com isso possibilitando o avanço do aluno no trato com informações seqüenciais e suas relações na resolução de problemas.

Iniciei a aula falando sobre sequências dando exemplo simples para que o aluno possa se apropriar do conceito básico. Como a unidade escolar que trabalho utiliza material próprio, utilizei no início da aula o plano de ação 2, onde o conceito de sequência foi construído através dos jogos. O mesmo foi adaptado para que eu utilizasse somente um tempo de 50 minutos para jogar.

Desenvolvimento

Iniciei a aula com os jogos propostos no roteiro de ação 2. Utilizei somente os jogos e a aula transcorreu acerca dos mesmos, onde as perguntas foram respondidas verbalmente para dinamizar a aula. O objetivo desta atividade é identificar as regularidades numéricas.

Após este primeiro momento que durou cerca de 50 minutos, introduzi através de atividades algumas sequências onde também de forma verbal foram respondidas as perguntas sobre as mesmas. O objetivo desta atividade foi realizar generalizações, utilizando a linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras, construindo a sequência possibilitando caminhos na resolução de programas, além de desenvolver o desenvolvimento lógico e cognitivo. As competência e habilidades nesta atividade será trabalhar a identificação e a representação de padrões em sequenciais por meio da linguagem escrita e da linguagem matemática algébrica e o uso de recursos aritméticos para identificação indutiv do padrão de sequencias.

Jogo I – Soma 30

Duração: 50 minutos

REGRAS

- Dispute um “par ou ímpar” com seu colega para que seja definido quem começa o

jogo. A próxima partida deverá começar pelo jogador que não iniciou a primeira partida.

- O jogador que iniciar o jogo deve escolher e pronunciar, em voz alta, um número

natural de 1 a 3.

- O jogador seguinte deve acrescentar uma, duas ou três unidades, ao número dito pelo jogador anterior e, pronunciar essa soma em voz alta. Por exemplo, vamos supor que o jogador anterior tenha pronunciado o número 2. Assim, se o jogador decidir acrescentar uma unidade, ele deverá pronunciar imediatamente o número 3, ou se decidir acrescentar três unidades, deverá pronunciar o número 5.

- Alternadamente, os jogadores deverão repetir o procedimento acima.

- Ganha o jogador que primeiro chegar e pronunciar o número 30.

Atividade II

Observe abaixo uma parte do calendário do mês de abril.

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16

O dia 25 cairá em que dia da semana?

OBS: A partir deste exemplo iniciei o conceito de sequência, utilizando o material próprio desenvolvido pelo corpo de professores da unidade C.E. Profª Jeannete S. C. Mannarino.

Apostila

SEQUÊNCIA OU SUCESSÃO 2ª série 2º bimestre

Sequência ou sucessão é o conjunto formado por elementos considerados numa certa ordem.

A representação formal de uma sequência é: (a_1, a_2, a_3, ..., an-1, an), onde:

a_1: é o primeiro termo

a_2: é o segundo termo

.

.

.

an: é o enésimo termo, com N $\in$ N*.

Exemplos:

• (1, 5, 9, 13) • (-8, -6, -4, ...) • ($\sqrt{2}$, 2, 2$\sqrt{2}$, 4, ...)

TERMO GERAL DE UMA SEQUÊNCIA

Também chamado de Lei de Formação permite encontrar qualquer termo da sequência.

Exemplo:

Determinar os quatro primeiros termos da sequência definida por an = 2n – 2, onde n $\in$ N.

$a_1 = 2 . 1 – 2 = 2 – 2 = 0$

$a_2 = 2 . 2 – 2 = 4 – 2 = 2$

$a_3 = 2 . 3 – 2 = 6 – 2 = 4$

$a_4 = 2 . 4 – 2 = 8 – 2 = 6$

EXERCÍCIOS

1) Determinar os quatro primeiros termos da sequência definida por:

   a) $a_n = n + 1$
   b) $a_n = 3n - 2$
   c) $a_n = 2^n$
   d) $a_n = n^2 + 4$
   e) $a_n = 2 . 3n$

2) Obter o décimo quarto termo da sequência definida por $a_n = 2n - 6$.

3) Determinar o vigésimo termo da sequência definida por $a_n = n^2 + 1$.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

É chamada progressão aritmética (P.A.) toda sequência de números reais, na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado com uma constante, denominada razão e indicada pela letra **r**.

A representação é $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, onde:
a_1: é o primeiro termo
n : número de termos
r : razão
a_n : último termo ou termo geral

Para determinar a razão de uma P.A., basta calcular a diferença entre um termo, a partir do segundo, e seu antecessor.

Exemplo:

a) (1, 3, 5, 7, 9) P.A. finita, onde $a_1 = 1$, $r = 2$ e $n = 5$
   $r = 3 - 1 = 5 - 3 = 7 - 5 = 9 - 7 = 2$

b) (-3, -7, -11, ...) P.A. infinita, onde $a_1 = -3$ e $r = -4$
   $r = -7 - (-3) = -11 - (-7) = -4$

c) (5, 5, 5, 5, 5, 5) P.A. finitaq onde $a_1 = 5$, $r = 0$ e $n = 6$
   $r = 5 - 5 = 0$

CLASSIFICAÇÃO DE UMA P.A.

r > 0 Crescente

Uma P.A. é crescente quando a razão **r** for positiva.
Exemplo: (2, 7, 12, ...) é uma P.A. crescente, pois r > 0, r = 7 – 2 = 5.

r = 0 Constante
Uma P.A. é constante quando a razão **r** for igual a zero.
Exemplo: (4, 4, 4, 4, 4, ...) é uma P.A. constante, pois r = 4 – 4 = 0.

r < 0 Decrescente
Uma P.A. é decrescente quando a razão **r** for negativa.
Exemplo: (9, 4, -1, ...) é uma P.A. decrescente, pois r = 4 – 9 = -5

EXERCÍCIOS

1) Verificar quais sequências abaixo formam uma P.A e classificar em crescente, decrescente ou constante.

a) (5, 7, 9, ...)
b) (3, 11, 22, 31)
c) (12, 8, 4, ...)
d) (-2, 4, -8, ...)
e) (-35, -30, -25, ...)
f) (7, 7, 7, 7, 7)

2) Determinar a razão das seguintes P.A.:

a) (1, 7, 13, 19)
b) (-7, -5, -3, -1)
c) (10, 8, 6, 4, ...)
d) (√3, √3, √3, √3, ...)
e) (2, 1, 0)
f) (3, 9, 15, 21)

TERMO GERAL DE UMA P.A.

É dado pela seguinte fórmula:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Exemplos:
1) Determinar o décimo segundo termo da P.A. (3, 5, 7, ...).

$a_1 = 3$
$r = 5 - 3 = 2$
$n = 12$

$a_{12} = 3 + (12 - 1) \cdot 2$
$a_{12} = 3 + 11 \cdot 2$
$a_{12} = 3 + 22$
$a_{12} = 25$

2) Determinar o primeiro termo de uma P.A. em que o vigésimo termo é igual a 99 e a razão é igual a 5.

$a_{20} = 99$

$r = 5$
$n = 20$

$99 = a_1 + (20 - 1) . 5$
$99 = a_1 + 19 . 5$
$99 = a_1 + 95$
$99 - 95 = a_1$
$a_1 = 4$

3) Calcular o número de termos da P.A. (3, 8, ..., 48).
$a_1 = 3$
$r = 8 - 3 = 5$
$an = 48$

$48 = 3 + (n - 1) . 5$
$48 = 3 + 5n - 5$
$48 = 5n - 2$
$48 + 2 = 5n$
$50 = 5n$
$\frac{50}{5} = n \quad \rightarrow n = 10$

EXERCÍCIOS

1) Determinar o vigésimo primeiro termo da P.A. (1, 8, 15, ...).

2) Determinar o décimo sétimo termo da P.A. (-6, -1, 4, ...).

3) Qual é a razão da P.A. em que $a_{26} = 140$ e $a_1 = 15$?

4) Qual é o número de termos da P.A. em que a razão é igual a 8, o primeiro termo é igual a 3 e o último termo é 187?
5) Quantos termos possui a P.A. em que r = -11, a_1 = 1 e o termo an = -186?

INTERPOLAÇÃO ARITMÉTICA

Considerando a sequência (a_1, a_2, a_3, ..., an-1, an), os termos a_1 e na são chamados de extremos e os demais são chamados de meios.

Interpolar ou inserir meios aritméticos entre dois números dados (extremos) é obter uma P.A. na qual os números dados sejam o primeiro e o último termos. Para isso, devemos determinar a razão dessa P.A.

Exemplo:

Interpolar sete meios aritméticos entre 1 e 17.

1, ____ , ____ , ____ , ____ , ____ , ____ , ____ , 17

a1 = 1	17 = 1 + (9 – 1) . r
an = 17	17 – 1 = 8r
n = 9	16 = 8r
	r = 2

Logo: P.A. (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17)

EXERCÍCIOS

1) Interpolar quatro meios entre os números 11 e 26.

2) Interpolar oito meios entre os números -2 e 43.

3) Inserir doze meios entre os números 60 e -5.

4) Interpolar 6 meios aritméticos entre 98 e 14.

SOMA DOS TERMOS DE UMA P.A.

É dada pela fórmula:

$$\mathbf{Sn = \frac{(a_1 + an) \cdot n}{2}}$$

Exemplos:

1) Calcular a soma dos dez primeiros termos da P.A. (4, 7, 10, ...).

$a_1 = 4$

$r = 7 – 4 = 3$

$n = 10$

$a_{10} = 4 + (10 – 1) . 3 = 4 + 9 . 3 = 4 + 27 = 31$

$Sn = \frac{(4 + 31) . 10}{2}$

$Sn = \frac{35 . 10}{2}$

$Sn = 175$

2) Calcular a soma da P.A. (-16, -14, -12, ..., 84).

a1 = -16

r = -14 – (-16) = -14 + 16 = 2

an = 84

Cálculo de n: $84 = -16 + (n – 1) . 2$

$84 = -16 + 2n – 2$

$84 + 18 = 2n$

$\frac{102}{2} = n \rightarrow n = 51$

$Sn = \frac{(-16 + 84) . 51}{2}$

$Sn = \frac{68 . 51}{2}$

$Sn = 1734$

3) Determine o último termo de uma P.A. em que a soma doze primeiros termos é 180 e $a_1 = 4$.

$a_1 = 4$

$n = 12$

$Sn = 180$

$$180 = \frac{(4 + an) \cdot 12}{2}$$

$$\frac{180}{6} = 4 + an$$

$30 - 4 = an$

$an = 26$

EXERCÍCIOS

1) Calcular a soma dos dezoito primeiros termos da P.A. (1, 5, 9, ...).

2) Determinar a soma dos 25 primeiros termos da P.A. (-7, -9, -11, ...).

3) Qual é a soma dos múltiplos de 3 compreendidos entre 10 e 100?

4) Numa P.A. de dez termos, o último termo é igual a 22 e a razão igual a 2. Determine o primeiro termo e a soma.

5) Quantos termos tem uma P.A. finita onde o primeiro termo é 7, o último termo 123 e a soma de seus termos 1040?

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Progressão Geométrica (P.G.) é toda sequência de números não nulos em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto de seu termo precedente por uma constante, denominada razão ***q*** da progressão geométrica.

Para achar a razão de uma P.G. dada através de uma sequ2ência de números não-nulos, basta dividir qualquer termo, a partir do segundo, por seu antecessor.

Exemplos:

a) (2, 4, 8) P.G. finita; razão $q = \frac{4}{2} = 2$.

b) (5, 15, 45, ...) P.G. infinita; razão $q = \frac{15}{5} = 3$.

c) (-7, 14, -8, 56) P.G. finita de razão $q = \frac{14}{-7} = -2$.

CLASSIFICAÇÃO DE UMA P.G.

1º Caso: $q > 1$

a) $a_1 > 0 \rightarrow$ P.G. crescente
Exemplo: (1, 2, 4, 8, ...), onde q = 2

b) $a_1 < 0 \rightarrow$ P.G. decrescente
Exemplo: (-10, -20, -40, ...), onde q = 2

2º Caso: $q = 1 \rightarrow$ P.G. constante
Exemplo: (5, 5, 5, ...), onde q = 1

3º Caso: $0 < q < 1$

a) $a_1 > 0 \rightarrow$ P.G. decrescente
Exemplo: (8, 4, 2, 1, ...), onde q = 1/2

b) $a_1 < 0 \rightarrow$ P.G. crescente

Exemplo: (-18, -6, -2, ...), onde q = 1/3

4 Caso: $q < 0$

Os números da seqüência têm sinais contrários. Nesse caso a P.G. é denominada P.G. alternante.

Exemplo: (-3, 6, -12, 4, ...), onde q = -2

EXERCÍCIOS:

1) Obter a razão de cada P.G.:

a) (5, 15, 45, ...)
b) (1, 3, 9, ...)
c) (-6, -24, -96, ...)
d) (3, -9, 27, ...)
e) (1/4, 1, 4, ...)
f) 16, 8, 4, ...)

2) Dados o termo a_1 e a razão, determinar os cinco primeiros termos de cada P.G.

a) $a_1 = -7$; $q = 2$
b) $a_1 = 4$; $q = 3$
c) $a_1 = -10$; $q = 2$
d) $a_1 = -80$; $q = -1/2$

3) Classificar as seguintes progressões geométricas:

a) (12, 3, ¾, ...)
b) (1, 9, 81, ...)
c) (-15, -5, -5/3, ...)
d) (-1, 1, -1, ...)
e) (7, 21, 63, ...)
f) (-9, -90, -900, ...)
g) (5, 5, 5, ...)
h) (-2, 4, -8, ...)
i) (-30, 3, -3/10, ...)
j) (-4, -8, -16, ...)

TERMO GERAL DE UMA P.G.

É dado pela seguinte fórmula:

$$\mathbf{an = a_1 \cdot q^{\,n-1}}$$

Exemplos:

a) Determinar o nono termo da P.G. (81, 27, 9, ...).

$a_1 = 81$
$q = 27/81 = 1/3$
$n = 9$
$a_9 = 81 . (1/3)^{9-1}$
$a_9 = 3^4 . (1/3)^8$
$a_9 = (1/3)^4$
$a_9 = 1/81$

b) Determinar o primeiro termo da P.G. em que $a_6 = 96$ e $q = 2$.

$n = 6$
$an = 96$
$q = 2$
$96 = a_1 . 2^{(6-1)}$
$96 = a_1 . 2^5$
$96 = a_1 . 32$
$96/32 = a_1$
$a_1 = 3$

c) Determinar o número de termos da P.G. (-1, -2, -4, ..., -512).

$a_1 = -1$
$q = -2/-1 = 2$
$an = -512$
$-512 = -1 . 2^{(n-1)}$
$-512/-1 = 2^{(n-1)}$
$512 = 2^{(n-1)}$
$2^9 = 2^{(n-1)}$
$n - 1 = 9$
$n = 10$

EXERCÍCIOS:

1) Determinar o décimo termo da P.G. (1, 2, 4, ...).

2) Determinar o oitavo termo da P.G. (1, 3, 9, ...).

3) Determinar o primeiro termo da P.G. em que a7 = 32 e q = 2.

4) Quantos termos tem uma P.G. cujo primeiro termo é 1/9, a razão é 3 e o último termo é igual a 27?

5) Qual é a ordem do termo igual a 192 na P.G. (3, 6, 12, ...)?

6) Interpolar 4 meios geométricos entre 4 e 128.

7) Interpolar 5 meios geométricos entre 1 e 729.

SOMA DOS TERMOS DE UMA P.G. FINITA

É dada pela fórmula:

$$Sn = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Exemplos:

a) Calcular a soma dos nove primeiros termos da P.G. (3, 6, 12, ...)

$a_1 = 3$

$q = 6/3 = 2$

$Sn = 3 \cdot \frac{2^9 - 1}{2 - 1}$

$Sn = 3 \cdot 512 - 1$

$Sn = 3 \cdot 511$

$Sn = 1533$

b) Calcular a soma dos cinco primeiros termos de uma P.G., sabendo que o quinto termo é 162 e que a razão é igual a 3.

$a5 = 162$

$n = 5$

$q = 3$

$162 = a_1 \cdot 3^{(5 - 1)}$

$162 = a_1 \cdot 3^4$

$162 = a_1 \cdot 81$

$162/81 = a_1$

$a_1 = 2$

$Sn = 2 \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1}$

$Sn = 2 \cdot \frac{243 - 1}{2}$

$Sn = 2 \cdot \frac{242}{2}$

$Sn = 242$

EXERCÍCIOS:

1) Calcular a soma dos sete primeiros termos da P.G. (1, 3, 9, ...).

2) Calcular a soma dos oito primeiros termos da P.G. (2, 4, 8, ...).

3) Determinar a soma dos cinco primeiros termos de uma P.G. em que o quinto termo é -81 e a razão é igual a 3.

4) Determinar a soma dos sete primeiros termos de uma P.G. em que o sétimo termo é igual a 320 e a razão igual a 2.

SOMA DOS TERMOS DE UMA PG INFINITA

É dada pela fórmula:

$$\mathbf{Sn = \frac{a_1}{1 - q}}, \text{ sendo } -1 < q < 1$$

Exemplos:

1) Calcular a soma dos termos da PG (1/3, 1/6, 1/12, ...).

$a_1 = 1/3$

$q = 1/6 : 1/3 = 1/2$

$$Sn = \frac{1/3}{1 - 1/2} = \frac{1/3}{½} = 2/3$$

2) Determinar a fração geratriz da dízima 2,777... .

$$2{,}777... = 2 + 0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + ... = 2 + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ...$$

As frações formam uma PG de razão $q = \frac{7}{100} : \frac{7}{10} = \frac{1}{10}$

$$Sn = \frac{7/10}{1 - 1/10} = \frac{7/10}{9/10} = 7/9$$

Assim, a fração geratriz da dízima 2,777... é:

$$2 + \frac{7}{9} = \frac{25}{9}$$

EXERCÍCIOS:

1) Determine a soma de cada PG infinita:

a) (1/2, 1/6, 1/18, ...)
b) (3, 1, 1/3, ...)
c) (1, 1/10, 1/100, ...)

d) (100, 50, 25, ...)

2) Escreva a fração geratriz das seguintes dízimas:

a) 0,555...
b) 0,1212...
c) 3,444...
d) -2,777...

Recursos Materiais

- Apresentação de figuras e suas regularidades;;
- Apresentação na lousa .

-Apostila sobre o assunto

Etapas previstas

4 semanas (16 aulas)

a) Identificação do padrão da sequência;

b) Representação do padrão da sequência, por meio de palavras, figuras ou símbolos;

c) Uso de recursos aritméticos para identificação de termos da sequência;

d) Problematização da necessidade de atribuir números que identifiquem posições da sequência;

Procedimentos metodológicos

- Levantar com os alunos o que eles entendem por sequência e regras;
- Reconhecer onde pode ser observada a presença de sequências e quais são as regras;
- Apresentar uma sequência de desenhos e pedir que comentem as regras observadas;
- Registrar as informações e socializar as observações;
- Tabular as informações para a verificação da regularidade numérica;
- Verificar as possíveis fórmulas que podem gerar os valores da tabela;
- Discutir a equivalência entre as fórmulas obtidas e verificar as várias possibilidades;
- Socializar os vários caminhos para a obtenção da fórmula;
- Propor que os alunos criem novas sequências e socializem entre os colegas para a obtenção das regras e fórmulas.

Avaliação

Pode ser feita por meio de observação do comprometimento, envolvimento dos alunos nas atividades, provas individuais, trabalho em grupo e jogos (por exemplo: disponibilizar sequências para que os grupos descubram fórmulas recursivas e não recursivas).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: contexto & apli8cações* .1. ed. V. 2. Ensino Médio. São Paulo: Ática, 2012.

IEZZI, Gelson e *et al*. *Matemática: ciência e aplicações.* 6 ed. V. 2. Ensino Médio. São Paulo: Saraiva, 2010.

Ruy Giovanni, José e Roberto Bonjorno, José. Matemática.V.2. Ensino Médio: FTD.