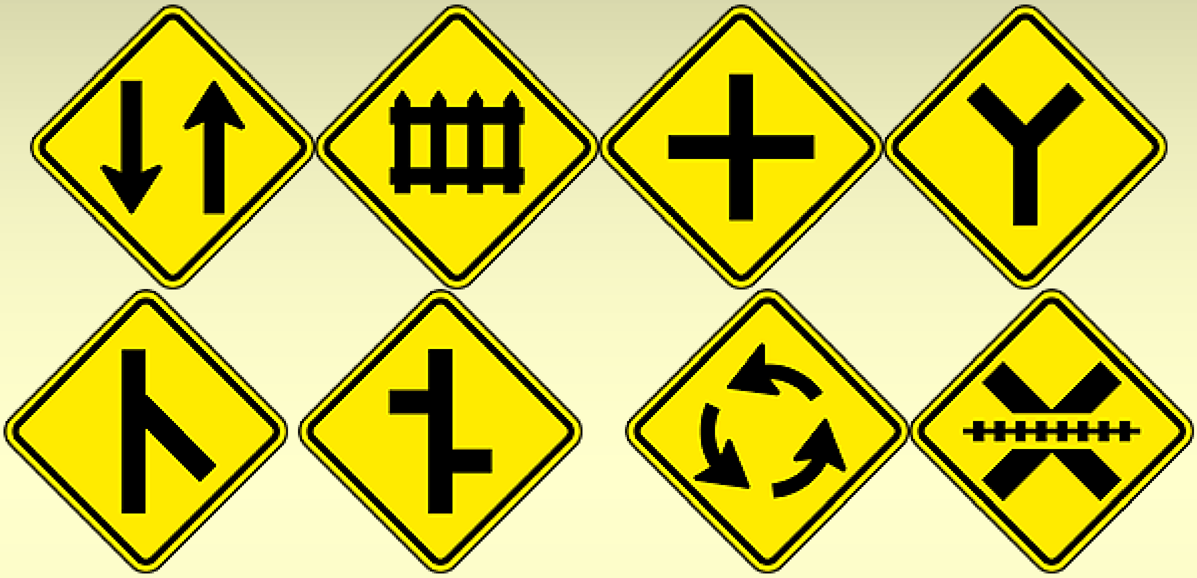
FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA

Fundação CECIERJ – Consórcio CEDERJ

Matemática do 3º Ano – 4º Bimestre – 2014

Plano de Trabalho 2

Geometria Analítica II



Tarefa: 002 – PLANO DE TRABALHO 2

Cursista: CLÁUDIO MAGNO PAULANTI

Tutora: DANUBIA DE ARAUJO MACHADO

Curso: MATEMÁTICA_4B_3S_2014

Tarefa 002

S U M Á R I O

I N T R O D U Ç Ã O

A Geometria Analítica é uma parte da Matemática, que através de processos particulares, estabelece as relações existentes entre a Álgebra e a Geometria. Desse modo, uma reta, uma circunferência ou uma figura podem ter suas propriedades estudadas através de métodos algébricos.

Os estudos iniciais da Geometria Analítica se deram no século XVII, e devem-se ao filósofo e matemático francês René Descartes (1596 - 1650), inventor das coordenadas cartesianas (assim chamadas em sua homenagem), que permitiram a representação numérica de propriedades geométricas. No seu livro Discurso sobre o Método, escrito em 1637, aparece a célebre frase em latim "**Cogito ergo sum**" , ou seja: "**Penso, logo existo**".

DESENVOLVIMENTO

Habilidade relacionada:

- Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.
- Reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.
- Identificar a equação de uma reta apresentada, a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.
- Identificar a posição relativa dos segmentos de retas a partir do plano cartesiano.
- Identificar retas paralelas e perpendiculares a partir de suas equações.

Pré-requisitos:

- Identificar ou marcar um ponto no plano cartesiano
- Teorema de Pitágoras
- Calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano.
- Calcular o ponto médio de dois pontos no plano cartesiano.
- Calcular a inclinação de uma reta, sendo conhecido dois pontos;
- Determinar a equação geral da reta, sendo conhecido dois pontos;
- Determinar a equação geral da reta, sendo conhecido um ponto e sua inclinação;
- Conhecer e transformar a equação da reta nas formas: geral, reduzida e segmentaria.

Tempo de duração:

- 8 aulas de 50 minutos

Recursos educacionais utilizados:

- Livro didático, quadro branco quadriculado, régua, compasso.
- Aplicativo de computador geogebra.
- Roteiros de Ação 1 e 2.

Organização da turma:

- Individual

Objetivos:

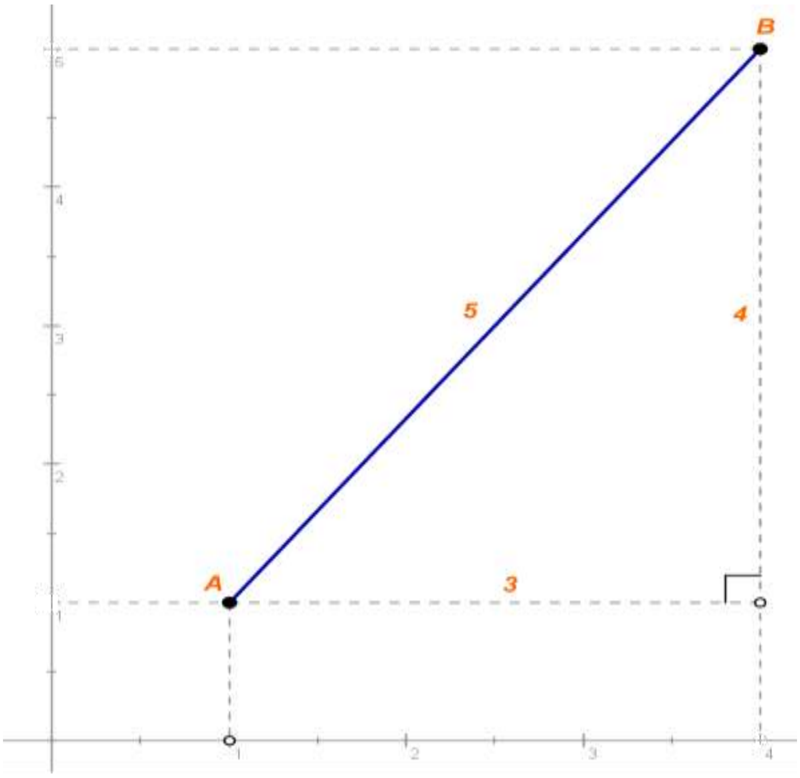
- Identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações.
- Discutir posições relativas entre duas retas.
- Determinar a equação da circunferência na forma reduzida e na forma geral, conhecidos o centro e o raio.

Metodologia adotada:

GEOMETRIA ANALÍTICA II

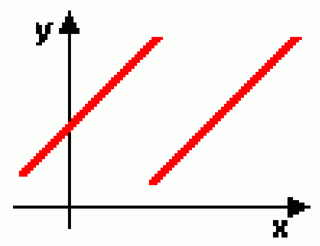
SE LIGA QUE É HORA DA REVISÃO

Revisar com os alunos o plano cartesiano, pontos, distância entre dois pontos, equação da reta, etc., assuntos esses que foram trabalhados no 3º bimestre.



RETAS PARALELAS E PERPENDICULARES

Retas paralelas: Duas retas no plano são paralelas se ambas são verticais ou se têm os mesmos coeficientes angulares.

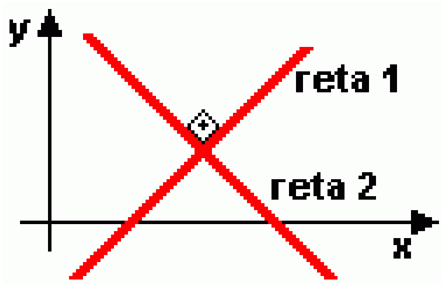


Exemplos:

- $x = 3$ e $x = 7$ são retas paralelas.
- As retas $y = 34$ e $y = 0$ são paralelas.
- As retas $y = 2x + 5$ e $y = 2x - 7$ são paralelas.

Retas perpendiculares: Duas retas no plano são perpendiculares se uma delas é horizontal e a outra é vertical, ou, se elas têm coeficientes angulares m' e m'' tal que:

$$m' \cdot m'' = -1.$$



Exemplos

1. As retas $y = x + 3$ e $y = -x + 12$ são perpendiculares, pois:

$$m' = 1,\ \ m'' = -1 \ \text{ e } \ \boxed{m' \cdot m'' = -1}.$$

2. As retas $y = 5x + 10$ e $y = (-{}^{1}/_{5}).x - 100$ são perpendiculares, pois:

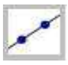
$$m' = 5,\ \ m'' = -{}^{1}/_{5} \ \text{ e } \ \boxed{m' \cdot m'' = -1}.$$

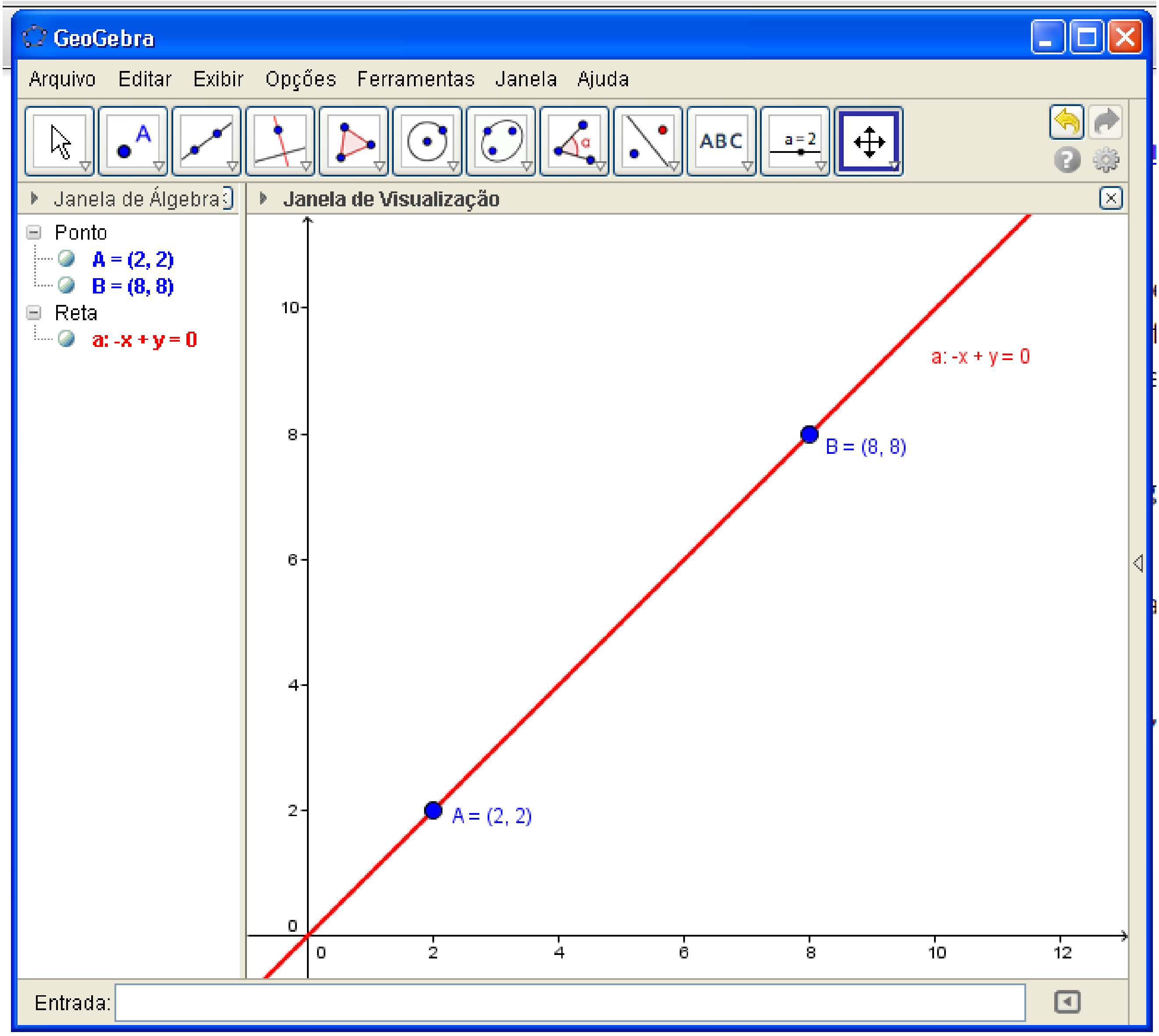
UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA ESTUDAR RETAS PARALELAS

Roteiro de Ação 1

Aplicativo: Geogebra.

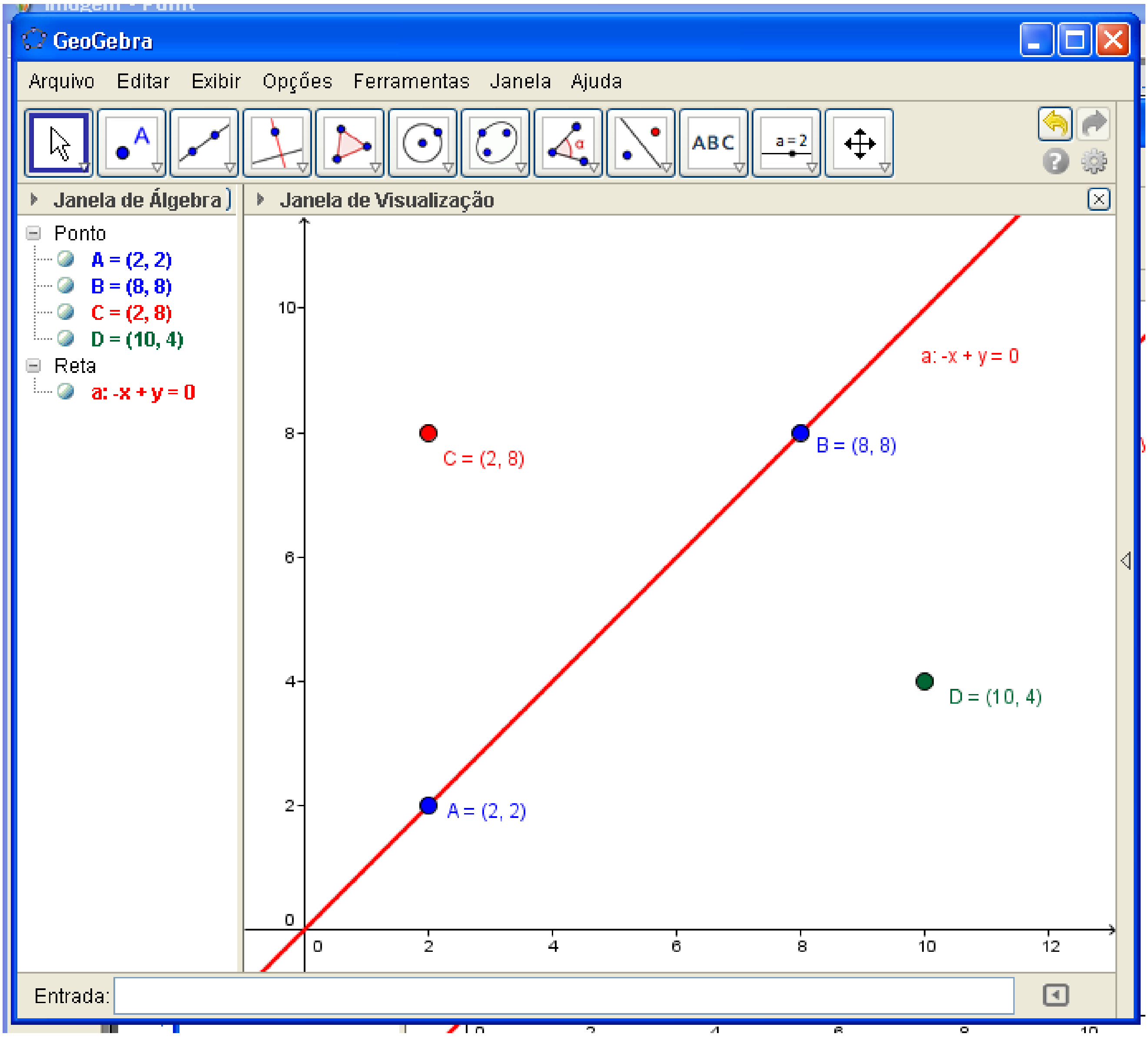
1-Usando a ferramenta "Reta definida por dois pontos", marcar dois pontos quaisquer A e B no plano cartesiano, gerando assim uma reta.

Ferramenta: 



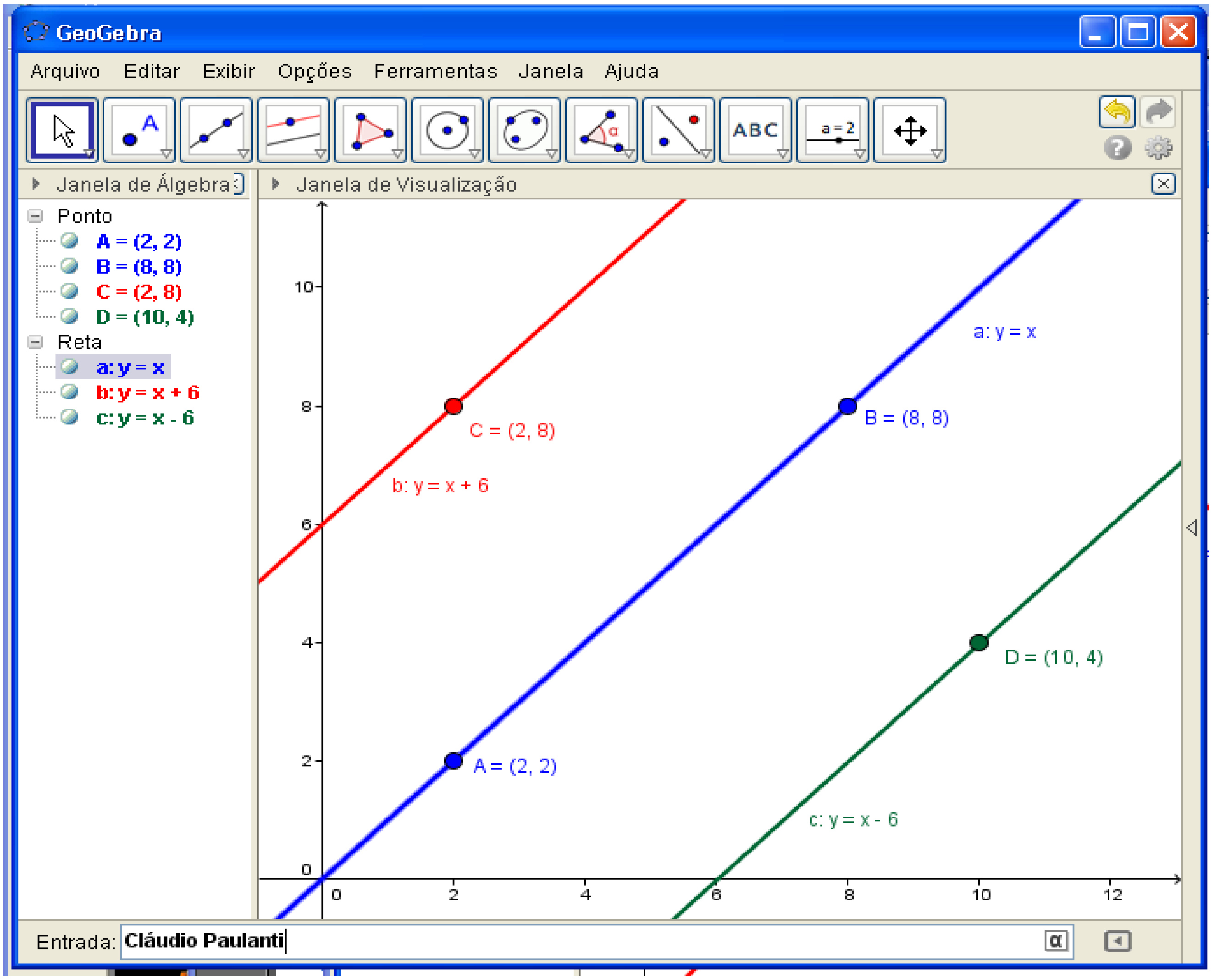
2- Utilizando a ferramenta “Novo Ponto”, marque dois pontos quaisquer no plano cartesiano e que não estejam contido na reta “a”.

Ferramenta: 



3-Utilizando a ferramenta "Retas Paralelas", clique sobre a reta "a"e o ponto "C". Repita o processo para o ponto "D" . Gerando assim duas retas paralelas.

Ferramenta: 



Dados:

Retas:

a: y = x

b: y = x + 6

c: y = x - 6

Pontos:

A(2, 2)

B(8, 8)

C(2, 8)

D(10, 4)

Analisando

1-Observar as equações das três retas e verificar se existe algum padrão entre elas.

2-Movimentar a reta “a” que contém os pontos “A” e “B”, selecionando a ferramenta “Mover”. Verificar se o padrão observado anteriormente continua a ser satisfeito.

Ferramenta: 

3- Usando ainda a ferramenta “Mover”, movimentar os pontos “C” e “D” e verificar o que aconteceu com o coeficiente angular de cada reta. Houve alteração?

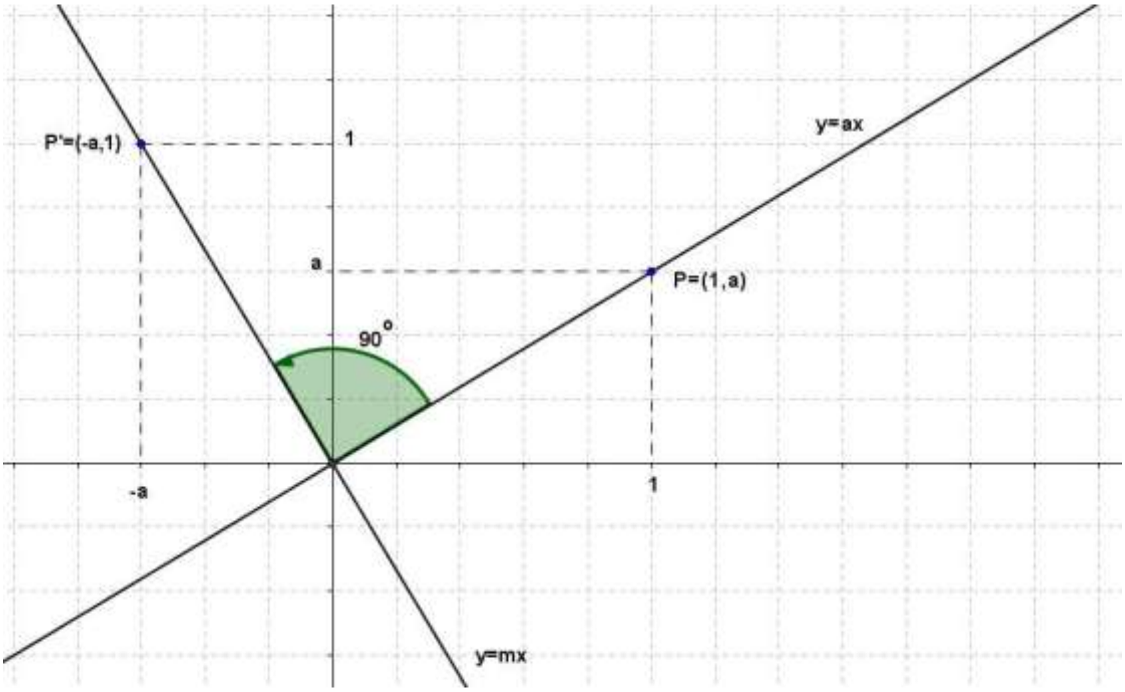
4- Uma determinada reta tem como equação geral “ax + by = c”, qual seria a equação de uma reta paralela a essa?

5- Conclusão.

DEDUÇÃO DA RELAÇÃO ENTRE OS COEFICIENTES ANGULARES DE RATAS PERPENDICULARES

Roteiro de Ação 2

Vamos considerar duas retas perpendiculares passando pela origem com equações $y = ax$ e $y = mx$ respectivamente.



ND: Imagem feita pelo conteudista Vinicius Mendes

Repare que após uma rotação positiva (sentido anti-horário) de 90 ° em torno da origem, o ponto $P = (1, a)$ irá cair sobre o ponto $P' = (-a, 1)$.

Messe momento, lembrar ao aluno, que após uma rotação de 90° no sentido anti-horário, um ponto de coordenadas (x, y) irá cair sobre o ponto de coordenadas $(-y, x)$.

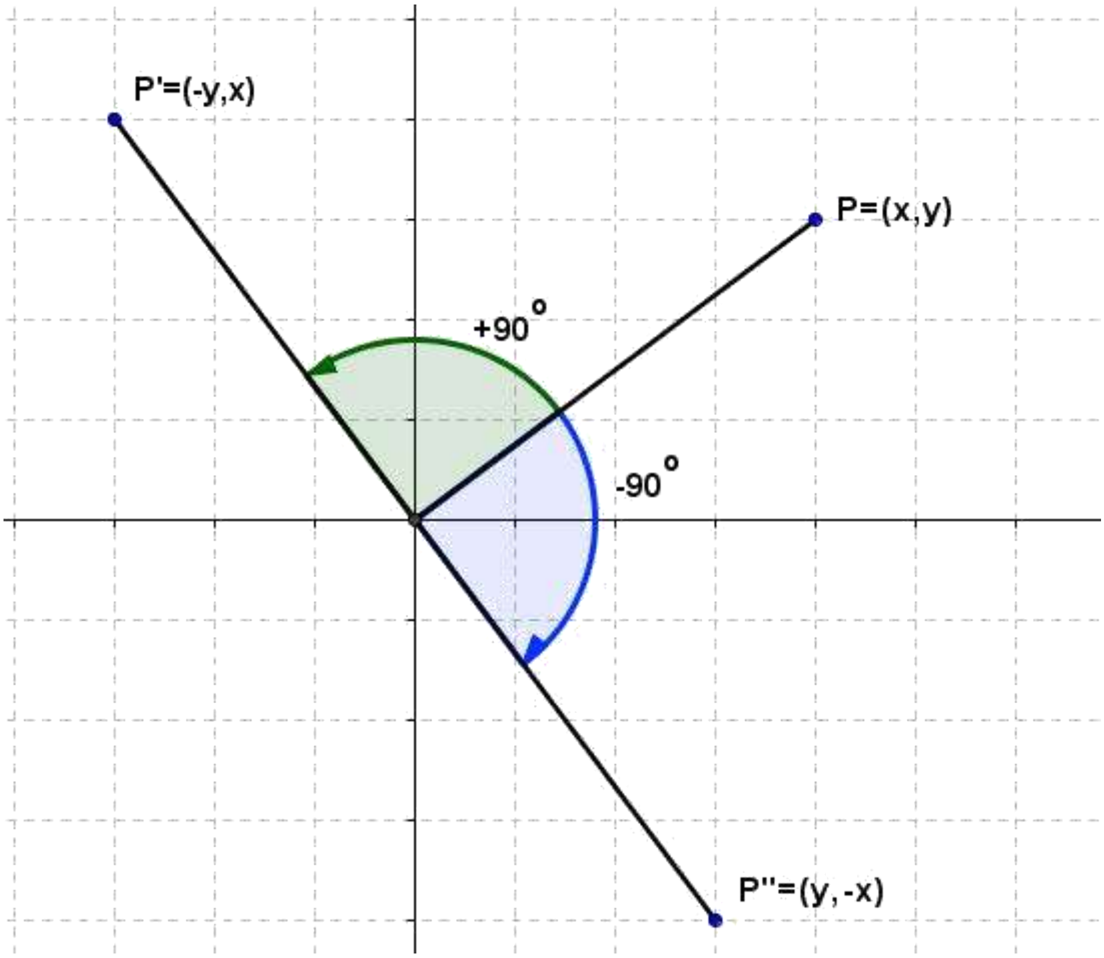
Você pode mostrar que dados $P = (x, y)$ e $P' = (-y, x)$ temos que:

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2} = d(O, P')$$

Além disso,

$$d(P, P')^2 = (x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2) = d(O, P)^2 + d(O, P')^2$$

Concluímos então que OPP' é um triângulo isósceles, retângulo em no ponto que coincide com o centro do plano cartesiano.



Portanto, esse raciocínio mostra que o ponto P'=(-y, x) é obtido do ponto P=(x, y) pela rotação de 90° (em sentido anti-horário) do segmento OP em torno da origem O.

De forma análoga, podemos mostrar que o ponto P" = (y, -x) é obtido do ponto P pela rotação de 90° do segmento OP em torno da origem (sentido horário).

1) Observando que o ponto P' = (-a, 1) pertence a reta de equação y = mx , substitua as coordenadas de P' na equação da reta e estabeleça uma relação entre os coeficientes angulares "a" e "m".

2) Agora, substitua o ponto P=(1, a) na equação y=mx . Que relação podemos estabelecer entre os coeficientes angulares "a" e "m".

3) De acordo com o descoberto nos itens anteriores, se uma reta que passa pela origem tem equação y=ax , qual será a equação da reta que também contém a origem e é perpendicular a esta?

4) Considere duas retas perpendiculares de equação y=ax e y=mx . Qual será a relação entre as retas de equação y=ax+b e y= mx+c?

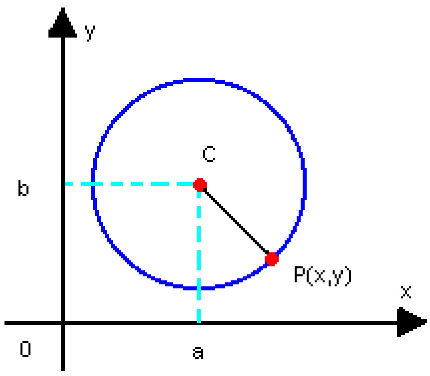
5) Na sua opinião, dadas as retas de equações $ax + by = c$ e $a_1x + b_1y = c_1$, quais devem ser as condições dos coeficientes de “x” e “y” para garantir que as retas sejam perpendiculares?.

6) Escreva as equações do item 5 na forma reduzida e encontre o coeficiente angular de cada uma das retas.

7) Lembrando que o coeficiente angular de uma reta é o oposto do inverso da outra, encontre uma condição algébrica para que as retas sejam perpendiculares.

EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

Denomina-se **circunferência** o conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo C desse plano, denominado centro da circunferência.



Se considerarmos o plano cartesiano e a circunferência de centro C(a,b) e raio r, conforme indica a figura acima, termos que o ponto P(x, y) pertence a circunferência se, e se somente se:

$$D_{P,C} = r \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

ou

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ → Equação reduzida da circunferência.

Onde:

$$a \in \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{R}, \ r \in \mathbb{R} \ \text{e} \ r > 0.$$

Essa igualdade é chamada de equação reduzida da circunferência.

No caso particular de o centro da circunferência estar na origem (a = b = 0), a equação ficará:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

EQUAÇÃO GERAL DA CIRCUNFERÊNCIA

Partindo da equação reduzida de uma circunferência {$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$}, desenvolvemos os quadrados teremos.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2.a.x + a^2 + y^2 - 2.b.y + b^2 = r^2$$

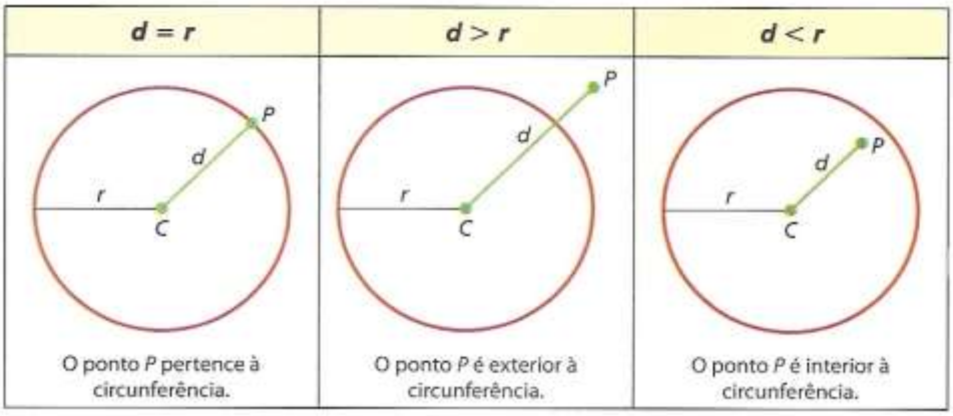
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Essa equação é denominada equação **normal ou geral da circunferência.**

POSIÇÃO RELATIVAS DE UM PONTO E UMA CIRCUNFERÊNCIA

Um ponto pode ser interno, externo ou pode pertencer a uma dada circunferência de centro (a, b) e raio "r".

As figuras ilustram o exposto:

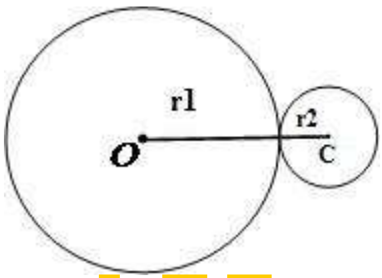


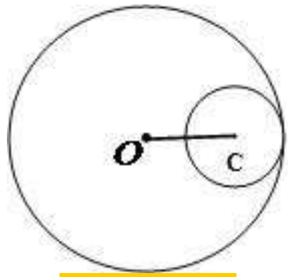
Observe que para conhecer a posição do ponto P em relação à circunferência, basta calcular a distância do ponto P ao centro da circunferência e compará-la com a medida do raio.

POSIÇÃO RELATIVA DE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

No estudo analítico da circunferência, os elementos raio, diâmetro e centro da circunferência são fundamentais para conclusões de diversos problemas e para a determinação da equação que define essa forma geométrica tão importante. Em se tratando de posições relativas entre duas circunferências, elas podem ser: tangentes, secantes, externas, internas ou concêntricas. Vamos analisar cada caso.

1. Circunferências tangentes.

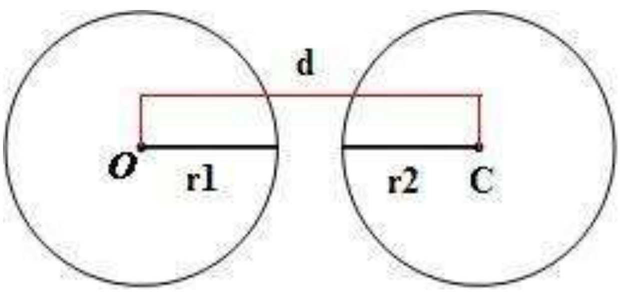
<table>
<tr>
<td>a) Tangentes externas
Duas circunferências são tangentes internas quando possuem somente um ponto em comum e uma exterior à outra. A condição para que isso ocorra é que a distância entre os centros das duas circunferências seja equivalente à soma das medidas de seus raios.


$d_{OC} = r_1 + r_2$</td>
<td>b) Tangentes internas
Duas circunferências são tangentes internas quando possuem apenas um ponto em comum e uma esteja no interior da outra. A condição para que isso ocorra é que a distância entre os dois centros seja igual à diferença entre os dois raios.


$d_{OC} = r_1 - r_2$</td>
</tr>
</table>

2. Circunferências externas.

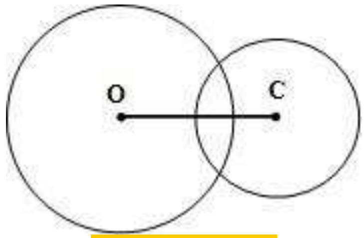
Duas circunferências são consideradas externas quando não possuem pontos em comum. A condição para que isso ocorra é que a distância entre os centros das circunferências deve ser maior que a soma das medidas de seus raios.



$d_{OC} > r_1 + r_2$

3. Circunferências secantes.

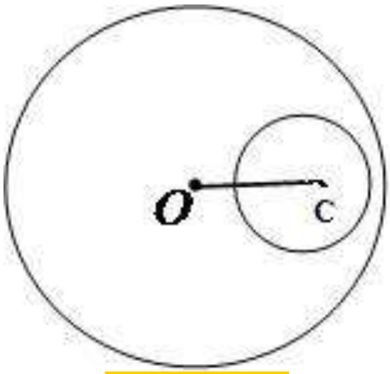
Duas circunferências são consideradas secantes quando possuem dois pontos em comum. A condição para que isso aconteça é que a distância entre os centros das circunferências deve ser menor que a soma das medidas de seus raios.



$d_{CO} < r_1 + r_2$

4. Circunferências internas.

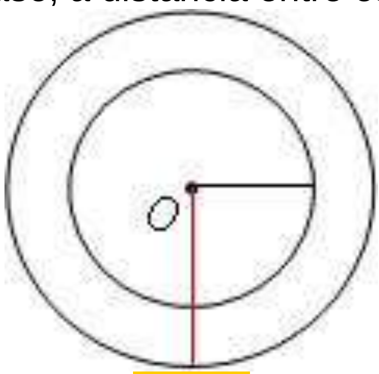
Duas circunferências são consideradas internas quando não possuem pontos em comum e uma está localizada no interior da outra. A condição para que isso ocorra é que a distância entre os centros das circunferências deve ser equivalente à diferença entre as medidas de seus raios.



$d_{OC} < r_1 - r_2$

5. Circunferências concêntricas.

Duas circunferências são consideradas concêntricas quando possuem o centro em comum. Nesse caso, a distância entre os centro é nula.



$d_{CO} = 0$

COLÉGIO ESTADUAL DR. MIGUEL COUTO FILHO

Exercícios de Matemática – Geometria Analítica II – Novembro / 2014 – Lista 1

ALUNO(A) _________________________ Nº ______ TURMA: _______

1) Determine a forma geral da equação da circunferência com centro no ponto (1, 2) e raio r = 5.

2) Determine as coordenadas do centro e o raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0$

3) Verifique se a equação $4x^2 + 4y^2 + 4x + 8y + 9 = 0$ representa uma circunferência.

4) Determine a posição dos pontos A(-2, 3), B(-4, 6), C(4, 2) e D(5, 6) em relação à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 8x - 20 = 0$.

5) Determine a equação da circunferência com centro no ponto C(2, 3) e que passa pelo ponto P(-1, 2).

COLÉGIO ESTADUAL DR. MIGUEL COUTO FILHO

Exercícios de Matemática – Geometria Analítica II – Novembro / 2014 – Lista 2

ALUNO(A) ________________________ Nº ______ TURMA: _______

1) Determine a posição da reta “r”, de equação “$x + 2y - 6 = 0$”, em relação a reta “s”, de equação “$3x + 5y - 5 = 0$”.

2) Dado o ponto P(2, 1), obter a equação reduzida da reta “s” que passa pelo ponto P e é paralela à reta “r” de equação “$2x - y + 7 = 0$”.

3) Verifique se as retas de equações r: $2x + 3y - 6 = 0$ e s: $3x - 2y + 1 = 0$, são perpendiculares.

4) Determinar as coordenadas do centro C e o raio r de uma circunferência a partir de sua equação reduzida $(x + 1)^2 + y^2 = 16$.

5) Determinar a equação reduzida da circunferência que tem centro C(–1,–3) e passa pelo ponto P(3,– 6).

TRABALHO ESCOLAR

COLÉGIO ESTADUAL DR. MIGUEL COUTO FILHO

Trabalho de Matemática – Geometria Analítica II – Novembro / 2014 – Lista 2

ALUNO(A) _________________________ Nº ______ TURMA: _______

1) No País **Zebrasil**, todo o território é um grande plano cartesiano. Um avião emite um bit de socorro e desaparece dos radares. Os dados que foram possíveis de coletar são os seguintes:

O radar A, localizado na posição A(80, 80), percebeu o bit e calculou que o avião está num raio de 60km da torre de controle A. Já o radar B, localizado na posição B(140, 140), percebeu o bit e calculou que o avião está num raio de 60km da torre de controle B. Baseado nessas informações, quais são os locais onde deverão iniciar as buscas pelo avião desaparecido.

a) Monte a equação da circunferência, com os dados da torre A.

b) Monte a equação da circunferência, com os dados da torre B.

c) Compare as duas equações e encontre uma equação da reta.

d) Comente que “reta é essa”?.

e) Tire o valor de x da equação da reta e substitua em uma das equações da circunferência.

f) Em que pontos do plano cartesiano o avião poderá estar?

A V A L I A Ç Ã O

A avaliação envolve aluno e professor e deve ser realizada de maneira que ambos possam avaliar o quanto se desenvolveu da competência relacionada ao tema estudado.

Será aplicada uma avaliação escrita e individual, com questões para investigação da capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos e raciocínio lógico para resolver problemas envolvendo a geometria analítica.

C O L É G I O E S T A D U A L D R . M I G U E L C O U T O F I L H O
CURSO FORMAÇÃO GERAL – MATEMÁTICA – 3ª SÉRIE
***Professor*: Cláudio Paulanti – Avaliação – 3º bimestre de 2014**
Assunto: Geometria Analítica II

Turma: _____ Aluno(a) ____________________ nº ___ Nota/Valor: ____/___

1) Determinar a posição relativas das retas de equações: r: $x + 2y – 6 = 0$ e s: $3x + 5y – 5 = 0$.

2) Dado o ponto P(2, 1), obter a equação reduzida da reta s que passa por P e é que é paralela à reta de equação r: $2x – y + 7 = 0$.

3) Verificar se as retas de equações r: $2x + 3y – 6 = 0$ e s: $3x – 2y + 1 =0$, são perpendiculares.

4) Determinar as coordenadas do centro C e o raio r de uma circunferência a partir de sua equação $(x +4)^2 + y^2 = 25$.

5) Determinar a equação reduzida da circunferência que tem centro C(2, 4) e passa pelo ponto P(5, 8).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Endereços eletrônicos acessados de 30/10/2014 a 02/11/2014:

- http://www.somatematica.com.br/
- http://www.vestibulandia.com.br/
- http://www.brasilescola.com.br
- http://www.mundoeducacao.com/matematica/geometria-analitica.htm

Livro didático e/ou outros utilizado:

- IEZZI, Gelson. Matemática Ciência e Aplicação. Volume 3 - 6a edição. São Paulo: Savaiva, 2010.
- ROTEIROS DE AÇÃO – **Geometria Analítica** – Curso de Formação Continuada oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2014.

.:.