FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA
Fundação CECIERJ – Consórcio CEDERJ
Matemática do 2º Ano – 1º Bimestre / 2014
Plano de Trabalho
LOGARITMOS

Tarefa: 001 – PLANO DE TRABALHO
Cursista: CLÁUDIO MAGNO PAULANTI
Tutor: EDESON DOS ANJOS SILVA
Curso: MATEMÁTICA_1B_2S_2014

Tarefa
001

S U M Á R I O

I N T R O D U Ç Ã O

Na matemática, o logaritmo (do grego: logos= razão e arithmos= número), de base "a", maior que zero e diferente de 1, é uma função que faz corresponder aos objetos "x" a imagem "y" tal que "$a^x = y$". Usualmente é escrito como "$\log_a y = x$".

Um exemplo: $3^4 = 81$, portanto $\log_3 81 = 4$.

Em termos simples o logaritmo é o expoente que uma dada base deve ter para produzir certa potência.

O inverso da operação é identificada como Antilogaritmo, dessa forma teremos como símbolo Antilog 4 = 81 nessa operação matemática de base 3.

No último exemplo o logaritmo de 81 na base 3 é 4, pois 4 é o expoente que a base 3 deve usar para resultar 81.

D E S E N V O L V I M E N T O

L O G A R I T M O

Habilidade relacionada:

- Efetuar operações utilizando o produto de logaritmos;
- Efetuar operações utilizando o quociente de logaritmos;
- Efetuar operações utilizando a potência de logaritmos;
- Efetuar operações utilizando a mudança de base de logaritmos.

Pré-requisitos:

- Potência;
- Fatoração
- Exponencial;
- Plano cartesiano.

Tempo de duração:

- 10 aulas de 50 minutos

Recursos educacionais utilizados:

- Livro didático, quadro branco.

Organização da turma:

- Individual

Objetivos:

- Efetuar operações utilizando as propriedades operatórias do logaritmo.
- Calcular o logaritmo de um número real positivo.
- Utilizar a definição de logaritmo na resolução de equações simples.
- Utilizar as propriedades operatórias do logaritmo na resolução de problemas significativos.
- Identificar a função logarítmica como a inversa da função exponencial.
- Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica.
- Resolver problemas significativos utilizando a função logarítmica.

Metodologia adotada:

Um pouco de história

John Napier (Edimburgo, 1550-1617) foi um matemático, físico, astrônomo, astrólogo e teólogo escocês.

Ele é mais conhecido como o decodificador do logaritmo natural (ou neperiano) e por ter popularizado o ponto decimal. Na decodificação dos logaritmos naturais, Napier usou uma constante que, embora não a tenha descrito, foi a primeira referência ao notável "e", descrito quase 100 anos depois por Leonhard Euler e que se tornou conhecido como número de Euler ou número de Napier.

Originário de uma família rica, ele mesmo barão de Merchiston, era um defensor da reforma protestante, tendo o mesmo prevenido o rei James VI da Escócia contra os interesses do rei católico Felipe II de Espanha. Filho de Archibald Napier, Master of the Mint, John Napier nasceu em Merchiston Tower, perto de Edinburgo, em 1550. A maior parte das terras da família Napier ficaram sob os cuidados de John, que construiu para si um castelo, no qual ele e sua família fixaram residência.

Ingressou aos 13 anos na Universidade de St Andrews e interessou-se por teologia e aritmética. Sua única obra de teologia, escrita em 1594, ocupa lugar de destaque na história eclesiástica escocesa. Napier também se dedicou à invenção de artefatos secretos de guerra, inclusive uma peça de artilharia de longo alcance, que ficaram apenas no papel. Foi como matemático, porém, que Napier mais se destacou. Sua mais notável realização foi a descoberta dos logaritmos, artifício que simplificou os cálculos aritméticos e assentou as bases para a formulação de princípios fundamentais da análise combinatória.

Uma unidade utilizada em telecomunicações, o neper, tem este nome em sua homenagem.

No início do século XVII, inventou um dispositivo chamado Ossos de Napier que são tabelas de multiplicação gravadas em bastão, permitindo multiplicar e dividir de forma automática, o que evitava a memorização da tabuada, e que trouxe grande auxílio ao uso de logaritmos, em execução de operações aritméticas como multiplicações e divisões longas.

Idealizou também um calculador com cartões que permitia a realização de multiplicações, que recebeu o nome de Estruturas de Napier.

Apresentação

Um caminhão custa hoje R$100.000,00 e sofre uma desvalorização de 10% ao ano de uso.

Depois de quanto tempo de uso o valor do veículo será igual a R$20.000,00?

A cada ano que passa o valor do caminhão fica sendo 90% do que era um ano atrás. Então, seu valor evolui da seguinte forma:

- Após um ano de uso: 90% de R$100.000,00, ou seja, R$90.000,00.
- Após dois anos de uso: 90% de R$90.000,00, ou seja, R$81.000,00.
- Após três anos de uso: 90% de R$81.000,00, ou seja, R$72.900,00.

E assim por diante.

O valor do veículo em reais evolui, ano a ano, de acordo com a sequência:

$$100.000.(0,9)^0;\ 100000.(0,9)^1;\ 100.000.(0,9)^2;\ 100.000.(0,9)^3;\ ...\ ;\ 100.000.(0,9)^x.$$

Em que x representa indica o número de anos de uso.

Para responder à pergunta feita, devemos resolver a equação:

$100.000.(0,9)^x = 20.000$ ou $(0,9)^x = 0,2$, que é uma equação exponencial.

No estudo feito anteriormente, só tratamos de situações em que poderíamos reduzir as potências à mesma base. Então, para tratar desse tipo de caso estudaremos os logaritmos.

Definição

Sendo a e b números reais positivos com $a \neq 1$ chama-se logaritmo de b na base a o expoente x ao qual se deve elevar a base a de modo que a potência a^x seja igual a b.

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

Onde:

- a é a base do logaritmo
- b é o logaritmando
- x é o logaritmo

Citar alguns exemplos de logaritmos.

Convenção importante

Convencionou-se que, ao escrevermos o logaritmo de um número com a base omitida, estamos no referindo ao logaritmo desse número na base 10, isto é:

$$\log 2000 = \log_{10} 2000$$

Os logaritmos na base 10 são conhecidos como **logaritmos decimais**.

As restrições para a ($0 < a \neq 1$) e para b ($b > 0$) indicadas na definição garantem a existência e a unicidade de $\log_a b$.

Exercícios

COLÉGIO MIGUEL COUTO FILHO – MATEMÁTICA – 2014

Aluno(a): ______________________________Turma: _________________

EXERCÍCIOS SOBRE LOGARITMOS

GRUPO 1 – Potência de 2:

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}

a) O logaritmo de 256 na base 2 é = _________ b) 512 x 16 = _________

c) $\log_2 1024$ = ________ d) 32 x 256 = _________

e) O logaritmo de 2048 na base 2 é = _________ f) $\log_2 4096$ = _________

g) 4096 / 256 = _________ g) 8192 / 128 = _________

GRUPO 2 – Potência de 3:

3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}

a) 59049 / 6561 = _________ b) 243 / 729 = _________

c) 2187 / 81 = _________ d) 531541 / 19683 = _________

e) $\log_3 531441$ = ________ f) O logaritmo de 81 na base 3 é _________

g) $\log_3 6561$ = ________ h) O logaritmo de 177147 na base 3 é _________

i) $\log_3 729$ = ________ j) O logaritmo de 3 na base 3 é _________

GRUPO 3 – Potência de 1

3^0	1^1	1^2	1^3	1^4	1^5	1^6	1^7	1^8	1^9	1^n

Qual é o valor de $\log_1 1024$? _____. E de $\log_1 8$ = ______. E de $\log_1 n$ = ___________

O que você conclui? ____

GRUPO 4) Calcule o valor dos seguintes logaritmos:

a) $\log_{16} 64$ b) $\log_{625} \sqrt{5}$

c) $\log_5 (0{,}000064)$ d) $\log_{49} \sqrt[3]{7}$

e) $\log_{(\sqrt[5]{2})} 128$ f) $\log_9 (3\sqrt{3})$

g) $\log_2 (\sqrt[8]{64})$ h) $\log_2 0{,}25$

GRUPO 5) Calcule o valor da incógnita *"N"* em cada exercício:

a) $\log_5 N = 3$ b) $\log_2 N = 8$ c) $\log_2 N = -9$ d) $\log_{\sqrt{3}} N = 2$

GRUPO 6) Calcule o valor da incógnita *"a"* em cada exercício:

a) $\log_a 81 = 4$ b) $\log_a 1024 = 20$ c) $\log_a 10 = 2$ d) $\log_{9a} \sqrt{27} = \frac{1}{2}$

Consequências da definição - propriedades

Sejam *a*, *b* e *c* números reais com $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c>0$.

- O logaritmo de 1 em qualquer base *a* é igual a *0*.

1° Conseqüência: $\log_b 1 = 0$

- O logaritmo da base, qualquer que seja ela, é igual a *1*.

2°Conseqüência: $\log_b b = 1$

- A potência de base *a* e expoente $\log_a b$ é igual a *b*.

3°Conseqüência: $a^{\log_a b} = b$

- Se dois logaritmos em uma mesma base são iguais, então os logaritmandos também são iguais.

4°Conseqüência: $\log_a b = \log_a c \leftrightarrow b = c$

Citar exemplos para cada conseqüência.

Propriedades operacionais

➔ Logaritmo do produto

Em qualquer base, o logaritmo do produto de dois números reais e positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um deles, isto é, se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c>0$, então:

$$\boxed{\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c}$$

Exemplos:

log 3.5 = log 3 + log 5

log x.y = log x + log y

➔ Logaritmo do quociente

Em qualquer base, o logaritmo do quociente de dois números reais e positivos é igual à diferença dos logaritmos de cada um deles, isto é, se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c>0$, então:

$$\boxed{\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c}$$

Exemplos:

log (3/5) = log 3 - log 5

log (x/y) = log x - log y

➔ Logaritmo da potência

Em qualquer base, o logaritmo de uma potência de base real e positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência, isto é: *se* $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $n \in$ R, então:

$$\boxed{\log_a b^n = n \cdot \log_a b}$$

Exemplos:

$\log 3^5 = 5.\log 3$

$\log x^y = y.\log x$

Mudança de base

Há situações em que nos defrontamos com um logaritmo em certa base e temos de convertê-lo a outra base.

Supunha a, b e c números reais positivos, com a e b diferentes de 1. Temos:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Exemplo:

$$\log_5 8 = \frac{\log 8}{\log 5} = \frac{0{,}90309}{0{,}69898} = 1{,}292$$

Exercício

Resolva, aplicando as propriedades estudas e sabendo que $\log 2 \cong 0{,}301$ e $\log 3 \cong 0{,}477$:

log 60 =
log 80 =
log 81 =
log 5 =
log 150 =
$\log_3 200$ =

Função logarítmica

Definição.

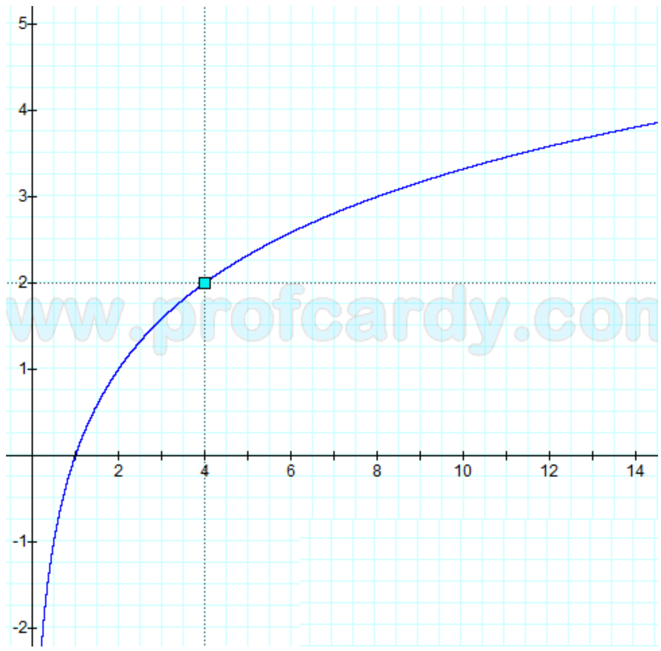
Dado um número real a ($0 < a \neq 1$), chama-se função logarítmica de base *a* a função *f* de R_+^* em *R* dada pela lei $f(x) = log_a x$.

Essa função associa cada número real positivo ao seu logaritmo na base *a*.

Gráfico da função logarítmica.

Construir para o aluno o gráfico da função f, com domínio em R_+^*, definida por $y = log_2 x$. Para isso, podemos construir uma tabela dando valores a *x* e calculando os correspondentes valores de *y*.

x	$y = log_x 2$
1/8	-3
¼	-2
½	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



Informar ao aluno que os valores atribuídos a x são potências de base 2; desse modo, $y = log_2 x$ é um número inteiro facilmente calculado.

Propriedades do gráfico da função logarítmica.

- Localiza-se a direita do eixo y, isto é, seus pontos pertencem ao 1º e 4º quadrante.
- Corta o eixo dos x no ponto de abscissa 1, ou seja, no ponto (1, 0), pois se x=1, $y = log_a 1 = 0$ para qualquer a real.
- É simétrico do gráfico da função exponencial g definida por $y = a^x$ em relação à reta bissetriz do 1º e 3º quadrantes.
- O conjunto imagem de f é R, pois todo número real y é imagem do número real positivo $x = a^y$.
- Quando $a > 1$, a função logarítmica dada for $f(x) = log_a x$ é crescente.
- Quando $0 < a < 1$, a função logarítmica dada for $f(x) = log_a x$ é decrescente.

A V A L I A Ç Ã O

C O L É G I O   E S T A D U A L   D R .   M I G U E L   C O U T O   F I L H O

CURSO FORMAÇÃO GERAL – MATEMÁTICA – 2ª SÉRIE

Professor: *Cláudio Paulanti* – ***Avaliação – 1º bimestre de 2014***

Turma: ________ **Aluno(a)** ________________________ **Nº** ___ **Nota/Valor:** ____/_____

01) Qual o nome da parte

$\log_b a = x$

____

____

____

---

02) Mude os logaritmos para a base 11

a) $\log_2 3 =$

b) $\log_5 7 =$

---

03) Quanto vale o logaritmo de:

$\log 0{,}01 =$ _________

$\log 0{,}1 =$ _________

$\log 1 =$ _________

$\log 10 =$ _________

$\log 100 =$ _________

$\log 1000 =$ _________

04) Calcule os logaritmos sabendo que: log 2 = 0,30; log 3 = 0,48; e, log 7 = 0,85				
k) $\log 5$	l) $\log 35$	m) $\log 21$	n) $\log 14$	o) $\log 42$
p) $\log\left({}^{7}/_{2}\right)$	q) $\log\left({}^{7}/_{3}\right)$	r) $\log 2^{8}$	s) $\log 3^{10}$	t) $\log_2 3$

05) Resolva os logaritmos

a) $\log_2 128 = x$	b) $\log_3 243 = x$	c) $\log_5 625 = x$
d) $\log_2 8 = x$	e) $\log_2 256 = x$	f) $\log_2 2048 = x$
g) $\log_3 27 = x$	h) $\log_3 243 = x$	i) $\log_3 81 = x$
j) $\log_{12} 144 = x$	k) $\log_{14} 196 = x$	l) $\log_{31} 961 = x$
m) $\log_7 49 = x$	n) $\log 10000 = x$	o) $\log_7 1 = x$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Endereços eletrônicos acessados de 10/02/2014 a 16/02/2014:

- http://www.somatematica.com.br/
- http://www.vestibulandia.com.br/
- http://www.brasilescola.com/matematica
- http://pt.wikipedia.org/wiki/Logaritmo
- http://www.profcard.com

Livro didático utilizado pelos alunos:

- MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES, 2º Ano/Gelson IEZZI – 6ª Edição – São Paulo: Saraiva, 2010.

∴