

FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA  
FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ

CURSO: MATEMÁTICA 1º ANO do ENSINO MÉDIO  
3º BIMESTRE DE 2013

**Tarefa 1: Plano de trabalho**  
**Tema: Funções Quadráticas**

**Cursista:** Waine Vieira Junior  
**Tutor:** Emilio Rubem Batista Junior

Rio de Janeiro  
Agosto de 2013

## ***Sumário***

---

<b>Introdução</b>	<b>Pág. 3</b>
<b>Atividades</b>	
Atividade 1	<b>Pág. 4</b>
Atividade 2	<b>Pág. 7</b>
<b>Avaliação</b>	<b>Pág. 10</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>Pág. 11</b>
<b>Apêndice</b>	<b>Pág. 12</b>

## ***Introdução:***

---

Neste plano de trabalho, buscaremos tratar das funções ditas quadráticas, ou funções de 2º grau. Consideramos que a abordagem deste conteúdo em matemática busca contemplar quatro aspectos essenciais: introdução do tema, traçando uma conexão direta com dois conteúdos vistos anteriormente: equações do 2º grau e funções afins; aspectos operatórios, de forte teor algébrico; a construção do gráfico da função, seus pontos-chave e elementos fundamentais; e, por fim, a contextualização do tema em problemas e aplicações diversas. O foco deste plano de trabalho é o cumprimento da parte **conceitual** da implementação da idéia de funções quadráticas, que entendemos cobrir as três etapas iniciais.

Neste sentido, procuramos fundamentar inicialmente seu terreno de atuação, lembrando aspectos operacionais das equações de segundo grau, a fórmula geral (nossa conhecida fórmula de Bháskara), traçando um rápido histórico do desenvolvimento deste dispositivo de cálculo que proporemos no apêndice, como instrumento para discussão e debate. Em seguida, faremos uma rápida recapitulação com exercícios simples e diretos, unicamente com o intuito de reavivar as etapas para o cálculo destas equações. Após esta etapa, propõe-se uma breve discussão conceitual sobre os aspectos que diferenciaram a equação de 1º grau das funções de 1º grau, para que, de modo análogo, possamos fazer a mesma transposição no contexto das equações quadráticas. Assim, acreditamos que daremos conta de observar as duas primeiras etapas a que nos propomos tratar.

Para a etapa seguinte pretendemos trabalhar com o aplicativo (app.) disponível no site Chrome Web Store<sup>1</sup> chamado **graph.tk**, que lida com a construção de gráficos de função. O objetivo é demonstrar ao aluno como os elementos fundamentais do gráfico da parábola – o gráfico de uma função quadrática – podem influenciar a construção do mesmo.

Por fim, proporemos algumas situações onde funções de 2º grau podem se fazer claramente presentes, e de que modo podemos nos utilizar de suas especificidades para solucionarmos problemas contextualizados. Também entendemos que, nesta etapa, a diferenciação entre matemática num contexto puro e num contexto aplicado pode ser muito interessante. Por isso, proporemos também situações problema que envolvam apenas elementos essencialmente matemáticos, sem uma contextualização extrínseca.

Para a implementação deste plano de trabalho, serão necessários quatro tempos de cinquenta minutos, e sua avaliação se dará ao longo da execução das atividades propostas, com destaque para a confecção de relatório proposto na atividade 2.

---

<sup>1</sup> ([https://chrome.google.com/webstore/category/apps?utm\\_source=chrome-ntp-icon](https://chrome.google.com/webstore/category/apps?utm_source=chrome-ntp-icon))

## Atividade 1

---

- **Habilidade Relacionada:** H48 – Resolver situações-problema envolvendo equação do 2º grau.
- **Pré-Requisitos:** Equações quadráticas.
- **Tempo de duração:** 100 min.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Folha de exercícios.
- **Organização da turma:** Duplas.
- **Objetivos:** Recapitular o processo operatório para a solução de equações quadráticas.
- **Metodologia:** Apresentação breve do processo histórico que levou à solução de equações quadráticas e posterior execução de exercícios de revisão sobre o conteúdo citado.

### Vamos Relembrar

Vamos começar pela definição:

Chamamos de *equação do 2º grau* – ou *equação quadrática* – na incógnita x, toda equação cujo maior expoente de incógnita na forma :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

é igual a dois.

**Obs:** Este é o formato denominado *forma reduzida* de uma equação quadrática. Toda equação quadrática pode ser traduzida neste formato.

De fato chamamos a equação de *quadrática* porque ela envolve o quadrado da incógnita em questão. Temos ainda que a, b e c são coeficientes reais (pertencem ao conjunto dos números reais), e são chamados, respectivamente, de *coeficiente quadrático*, *coeficiente linear* e *coeficiente constante* ou termo independente.

### Glossário:

- **Coeficiente:** é o fator multiplicativo de um termo num polinômio, não se confundindo com a parte literal (incógnita).
- **Equação:** (*aequatio,ónis* 'igualação, repartição igual; igualdade) igualdade entre duas expressões matemáticas.
- **Incógnita:** valor a ser determinado na solução de uma equação.

**Obs<sub>2</sub>:** Lembre-se: cada coeficiente é definido pelo grau da incógnita que acompanha, independente da ordem dos termos! Assim, o coeficiente quadrático (**a**) é sempre aquele que acompanha  $x^2$ , o coeficiente linear (**b**) sempre acompanhará x, e o termo independente (**c**) é aquele que “anda sozinho”!

Assim, são exemplos de equação quadrática:

$$5x^2 + 41x - 2 = 0$$

$$x^2 = 49$$

$$x^2 - x = 10$$

**1) Determine quem são os coeficientes a, b e c das equações abaixo, em suas formas reduzidas:**

$$7x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$a =$$

$$b =$$

$$c =$$

$$9x^2 + x - 3 = 0$$

$$a =$$

$$b =$$

$$c =$$

$$-12x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$a =$$

$$b =$$

$$c =$$

$$4x - 2x^2 - 6 = 0$$

$$a =$$

$$b =$$

$$c =$$

$$3 - 12x^2 + 5 = 0$$

$$a =$$

$$b =$$

$$c =$$

$$10 - 13x + 9 = 0$$

$$a =$$

$$b =$$

$$c =$$

$$9x^2 - 5 = 0$$

$$a =$$

$$b =$$

$$c =$$

$$8x^2 + 40x = 0$$

$$a =$$

$$b =$$

$$c =$$

$$3x^2 = 27$$

$$a =$$

$$b =$$

$$c =$$

$$4x^2 = 23$$

$$a =$$

$$b =$$

$$c =$$

$$2x^2 - x - x^2 = 3x - 5$$

$$a =$$

$$b =$$

$$c =$$

$$2x(x - 1) = 0$$

$$a =$$

$$b =$$

$$c =$$

**2) Determine, se possível, quais são as raízes das equações quadráticas abaixo:**

$$9x^2 - 18 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$10x^2 + 72x - 64 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$8x^2 + 40x = 0$$

$$3x^2 - 27 = 0$$

$$4x^2 = 256$$

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$2x(x - 1) = 0$$

## Vamos agora lidar diretamente com a idéia de função quadrática

Relembrando agora a idéia de função, temos que uma função é uma regra ou relação, que liga um conjunto domínio (conjunto de entrada) com um conjunto contradomínio (conjunto de valores de saída) de tal maneira que:

- 1) Cada elemento do domínio está associado a **apenas um** elemento do contradomínio;
- 2) **Todos** os elementos do domínio possuem um correspondente no contradomínio, de modo que não sobre ninguém sozinho no domínio.

Para o caso específico das funções definidas como sendo funções de primeiro grau, temos que sua forma reduzida é:

$$f(x) = ax + b$$

Onde:

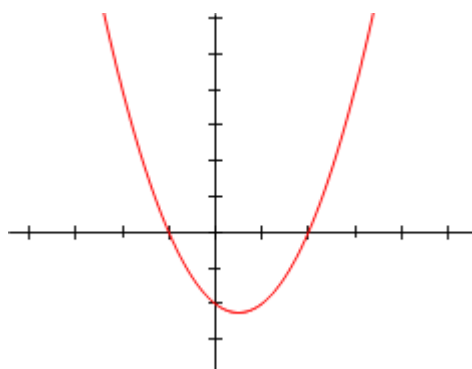
**a** = *coeficiente angular*, ou *declividade* da reta. Ele influencia diretamente o ângulo de inclinação de nossa função, de modo que, quanto mais ele se aproxima de zero, mais próxima a nossa reta se aproxima de uma paralela ao eixo x, assemelhando-se a uma função constante. E quanto mais se afasta de zero, mais a reta se aproxima de uma paralela ao eixo y.

**b** = *coeficiente linear*. É o coeficiente b que desloca nossa reta ao longo do eixo x.

Já as **funções quadráticas** são funções polinomiais da forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Onde  $a \neq 0$ .



O gráfico de uma função quadrática, diferente das funções afim, não forma uma reta, mas uma parábola, cujos elementos fundamentais são:

- 1) **Raízes:** Ou *zeros* da função. São os valores de x cuja imagem é 0, ou seja, os pontos em que a função “corta” o eixo x. Por isso, são as soluções

buscadas na fórmula de Bháskara. O número de raízes reais depende do valor do discriminante, nosso famoso delta. Lembre-se:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Onde:

- Para  $\Delta > 0$ , a função terá duas raízes.

- Para  $\Delta = 0$ , a função terá apenas uma raiz.
- Para  $\Delta < 0$ , a função não terá raízes reais.

2) **Vértice**: Ponto mais extremo da parábola. Se a função é dita crescente, é seu ponto mínimo. Se a função é dita decrescente, é seu ponto máximo. Este ponto possui coordenadas definidas da seguinte forma:

$$\left( X_{\text{vertice}} = -\frac{b}{2a}, Y_{\text{vertice}} = -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

Como vimos, a forma canônica (ou reduzida) de uma função quadrática é

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Onde, de modo análogo à função afim, temos:

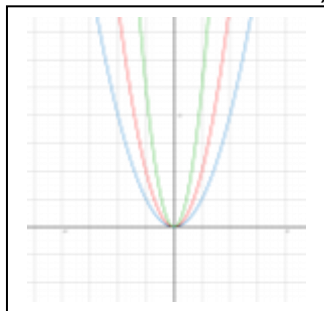
- O coeficiente **a** controlando a “*abertura*” de nossa parábola. Quanto **maior o módulo de a**, mais **estreita** ficará a nossa parábola. Quanto **menor o módulo de a**, mais **aberta** nossa parábola será. O coeficiente **a** também influenciará diretamente a **concauidade** de nossa parábola, determinando se a função será **crescente** ou **decrescente**. Se o **a** for **positivo**, teremos a concauidade voltada para **cima**, determinando uma função crescente. Se nosso coeficiente **a** for **negativo**, nossa parábola terá a concauidade voltada para **baixo**, o que determinará uma função decrescente.
- O coeficiente **b** e **a**, juntos, controlam o eixo de simetria da parábola (e também a coordenada do **x** do vértice).
- O coeficiente **b** sozinho é a declividade da parábola ao cortar o eixo **y**.
- O coeficiente **c** determina a altura da parábola, ou seja, é o ponto onde a parábola corta o eixo **y**.

## Atividade 2

- **Habilidade Relacionada: H02** – Associar pontos no plano cartesiano às suas coordenadas e vice-versa; **H38** – Identificar o gráfico de uma função, a partir da correspondência entre duas grandezas representadas em uma tabela; **H48** – Resolver situações-problema envolvendo equação do 2º grau; **H62** – Reconhecer a representação algébrica ou gráfica da função polinomial do 2º grau; **H66** – Reconhecer intervalos de crescimento/decrescimento e/ou zeros de funções reais representadas em um gráfico
- **Pré-Requisitos:** Equações quadráticas.
- **Tempo de duração:** 100 min.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Laboratório de informática com o software **graph.tk** instalado.

- **Organização da turma:** Duplas ou trios.
- **Objetivos:** Apresentar os elementos de um gráfico de função quadrática e como eles influenciam o “comportamento” da função.
- **Metodologia:** Após uma pequena apresentação do programa **graph.tk**, demonstrando suas funcionalidades proporemos as atividades a seguir, para análise e discussão posterior com preenchimento de relatório que será parte de nossa avaliação.

- 1) Digite no campo de descrição das funções, aquelas funções com que trabalhamos na atividade 1.
- 2) Compare os resultados encontrados por vocês e as raízes dos gráficos das funções que digitamos no campo de descrição. Lembre-se da definição de raízes da função quadrática que acabamos de expor.
- 3) Debata com seu colega: o que ocorre com os gráficos das funções quadráticas cujas equações apresentam duas soluções reais? E aqueles que só apresentam uma solução? E aqueles que não apresentam nenhuma solução real?
- 4) Verifique se as coordenadas dos vértices dos gráficos é condizente com os valores de delta encontrados na solução das equações em questão.



- 5) Digite agora a função  $y = x^2$  no campo de descrição. Em outro campo de descrição (clique no sinal de “+”), digite  $y = 2x^2$ . As duas funções aparecerão sobrepostas. Digite, em um novo campo de descrição, a função  $y = 5x^2$ . Responda: Qual o coeficiente que estamos alterando? O que podemos dizer com relação ao valor do coeficiente em questão e o comportamento do gráfico da função?
- 6) Ainda utilizando os gráficos do tópico anterior, digite as mesmas funções em novos campos de descrição, desta vez com a coeficiente em questão com o sinal negativo. O que podemos dizer com relação ao sinal do coeficiente em questão e o comportamento do gráfico da função?
- 7) Agora, digite numa tela em branco, a função  $y = x^2 + x$ . Em um novo campo de descrição, altere o valor do coeficiente **b**. Faça novamente em um novo campo de descrição, com outro valor, desta vez, negativo. O que podemos dizer com relação ao valor do coeficiente em questão e o comportamento do gráfico da função?
- 8) Agora, digite numa tela em branco, a função  $y = x^2 + x$ . Em um novo campo de descrição, altere o valor dos coeficientes **a** e **b**. Faça novamente em um novo campo de descrição, com outros valores, desta vez, negativos. O que podemos dizer com relação ao valor dos coeficientes em questão e o comportamento do gráfico da função?
- 9) Digite agora, numa tela em branco, a função  $y = x^2 + 1$ . Em um novo campo de descrição, altere o valor do coeficiente **c**. Faça novamente em um novo campo de descrição, com outro valor, desta vez, negativo. O que podemos dizer com relação ao valor do coeficiente em questão e o comportamento do gráfico da função?



- 10) Escreva agora um relatório descrevendo todas as atividades que você realizou e as conclusões tiradas para cada atividade proposta, relacionando-as com as descrições dos elementos dos gráficos e dos coeficientes das funções.

## **Avaliação:**

---

Reconhecendo a etapa de avaliação como de vital importância para o processo ensino-aprendizagem, e de suma importância na fundamentação da boa execução do plano de trabalho, observamos que esta etapa deve não apenas envolver o conhecimento demonstrado pelo aluno na execução de um exame, mas todas as condições variantes envolvidas no processo de implementação do plano. Assim, entendemos que a avaliação deve ser tão abrangente quanto possa ser possível, de modo que professor e aluno se integrem nela conjuntamente. Observando o quanto, como, o que (e porque) se pode alcançar no desenvolvimento das competências relacionadas ao tema proposto.

Ao longo da implementação deste plano de trabalho, as atividades propostas devem ser executadas em dupla, o que exige a organização de etapas e responsabilidades na execução da atividade; há ainda uma proposta de debate de modo a incentivar a interpretação dos dados apresentados pelos gráficos. O intuito dessas discussões é justamente de construir (e posteriormente refinar) as informações e argumentos em questão, e deverão ser levadas em conta na avaliação das atividades.

No caso do exercício individual proposto na **atividade 2**, estaremos avaliando a aplicação dos conceitos vistos. São atividades com teor mais prático, exigindo maior capacidade de desenvoltura operativa bem como da interpretação dos gráficos e seus respectivos comportamentos de modo a consolidar no aluno o aparato conceitual em questão.

Além de também utilizar o relatório proposto ao cabo dos exercícios realizados ao longo da atividade 2 como instrumento efetivo de avaliação, cabe ressaltar que as habilidades e competências a serem desenvolvidas ao longo da implementação de todo o plano de trabalho, como dito ainda na introdução, são avaliadas no âmbito da execução das tarefas (individualmente e coletivamente).

## **Bibliografia:**

---

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 2002

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática – Volume único*. São Paulo: Ática, 2010.

IEZZI, Gelson e MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de matemática elementar, vol. 1*. São Paulo: Atual, 2004.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO. *Saerjinho 2012 – Matriz de Referência*. Rio de Janeiro, 2012.

## Apêndice:

### A história da equação quadrática



As equações quadráticas já ocupavam matemáticos babilônicos desde cerca de 2000 a.C. segundo demonstram algumas placas de argila descobertas em sítios arqueológicos onde hoje é o Irã. A principal aplicação destas equações eram as mensurações de terrenos (áreas e perímetros).

Nos *Sulba Sutras* (livros que determinavam regras para práticas religiosas) da antiga Índia, por volta do século VIII a.C. as equações quadráticas na forma  $ax^2 = c$  e  $ax^2 + bx = c$  eram investigadas utilizando-se um método geométrico, com o intuito de construir altares adequados para as cerimônias religiosas do antigo hinduísmo. Matemáticos da Babilônia do século IV a.C. e chineses do século II usaram também métodos geométricos – estes chamados de *métodos de dissecção* (onde repartimos a figura em figuras cada vez menores, de modo a reorganizá-las numa única com os mesmos atributos) – para resolver equações com raízes positivas, o que evidencia o caráter pragmático de suas investigações. Por isso mesmo, nunca desenvolveram uma fórmula geral, mas apenas soluções para tipos específicos de problemas.



Euclides de Alexandria, o famoso matemático grego, também se aventurou pelas equações quadráticas, apresentando uma abordagem puramente geométrica, propondo um método geral, como era de se esperar de um matemático grego. Mais tarde, em sua obra *Arithmetica*, Diofanto de Alexandria, no século III a.C. resolveu uma série de equações quadráticas, mas apenas fornecendo uma raiz positiva (mesmo que a equação admitisse duas raízes positivas).

Em 628 d.C. Brahmagupta, um matemático indiano deu a primeira solução explícita (embora ainda não apresentasse uma solução geral) para equações quadráticas na forma  $ax^2 + bx = c$  em seu livro *Brahmasphutasiddhanta*. Mais adiante, no século XII d.C., outro matemático indiano, chamado Bhaskara Akaria – considerado o mais importante matemático do século, preencheu algumas lacunas na obra de Brahmagupta, em suas obras *Vija-Ganita* e *Lilavati*.



O persa Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi no século IX, inspirado por Brahmagupta, desenvolveu um conjunto de fórmulas que valiam para soluções positivas. Al-Khwarizmi vai ainda além: propõe uma solução completa e geral para equações quadráticas, aceitando uma ou duas soluções. No entanto, embora al-Khwarizmi não aceitasse soluções negativas, matemáticos islâmicos posteriores admitiam soluções negativas, bem como números irracionais.

Assim, para equações quadráticas sob a forma reduzida  $ax^2 + bx + c = 0$ , Al-Khwarizmi formalizou a seguinte solução:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= 0 \Leftrightarrow \\
 (4a)(ax^2 + bx + c) &= (4a) \cdot 0 \Leftrightarrow \\
 4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 \Leftrightarrow \\
 (2ax)^2 + 2(2ax)b &= -4ac \Leftrightarrow \\
 (2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 &= -4ac + b^2 \Leftrightarrow \\
 (2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac \Leftrightarrow \\
 |2ax + b| &= \sqrt{b^2 - 4ac}
 \end{aligned}$$

Onde temos

$(2ax + b) \geq 0$	$(2ax + b) < 0$
$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac} \Leftrightarrow$	$2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac} \Leftrightarrow$
$2ax = \sqrt{b^2 - 4ac} - b \Leftrightarrow$	$2ax = -\sqrt{b^2 - 4ac} - b \Leftrightarrow$
$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

E, portanto,

$$x = \begin{cases} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow r_1 \\ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow r_2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Que chamamos de Fórmula Geral de Resolução da Equação do 2º Grau, ou, comumente de Fórmula de Bhaskara – embora não tenha sido ele o autor desta fórmula.