Formação Continuada Nova Eja

Plano de Ação II

Nome: Armando dos Anjos Fernandes

Regional: Metro VI Tutor: Deivis de Oliveira Alves

Este plano de ação contemplará as unidades 29 e 30.

Unidade 29

I - “Matrizes e Determinantes”

INTRODUÇÃO

As matrizes e os determinantes não são encontrados apenas no estudo da matemática, mas também na engenharia, informática, tabelas financeiras etc. Na Matemática, as matrizes são de grande utilidade na solução de equações com várias incógnitas. Na informática a tela do computador é matricial, usando linhas e colunas e também temos o aplicativo Excel que usa linhas e colunas para identificar uma célula.

Uma matriz é um conjunto ordenado de elementos dispostos em linhas e colunas representadas respectivamente por “m” e “n”, onde $m \geq 1$ e $n \geq 1$.

A quantidade de linhas e colunas deve ser maior ou igual a “1”. Cada elemento vem representado com a linha e a coluna a qual pertence. Por exemplo, dada uma matriz “B” de ordem 2 x 3, o elemento que se encontra na 1ª linha e 2ª coluna será representado por b_{12} .

Para representar essas linhas e colunas devemos obedecer às regras, dependendo do número de linhas e colunas a matriz recebe um “nome”. As quatro operações também são aplicadas a elas.

Determinante é um tipo de matriz, mas essa deverá ter o mesmo número de linhas e colunas, sendo denominada de matriz quadrada. Nele são aplicadas algumas propriedades particulares com o intuito de achar um determinado valor numérico.

Esta unidade será ministrada em “6” tempos de aula.

DESENVOLVIMENTO

I-1 – Apresentação da matriz:

Trabalharei em paralelo ao plano de ação as atividades I, II e III do livro do aluno (Unid. 29)

Será ministrado no 1º e 2º tempos de aula.

Digite a equação aqui.

Supor a matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

As linhas horizontais da matriz são chamadas de “Linhas” e as verticais chamadas de “Colunas”. Logo, uma matriz é formada com “m” linhas e “n” colunas e é chamada de matriz “m x n”(lê-se m por n). M e n são chamados de “dimensões”, tipo ou ordem. Por exemplo a matriz acima é uma matriz de ordem 2 x 3, pois possui 2 linhas e 3 colunas. Esta matriz possui “6” elementos.

I-2 – Tipos de matriz:

- Matriz diagonal: $A = \begin{vmatrix} \mathbf{4} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{7} \end{vmatrix}$

- Matriz identidade: $B = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{vmatrix}$

- Matriz simétrica: $C = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

- Matriz transposta: $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & -4 & 8 \end{vmatrix} \rightarrow D^t = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

I-3 – <u>Adição e Subtração de matrizes</u>:

Digite a equação aqui.

A operação com qualquer matriz sempre resultará em outra matriz, independentemente da operação utilizada. As matrizes envolvidas na adição devem ser de mesma ordem e o resultado dessa soma será também outra matriz com a mesma ordem.

Assim podemos concluir que:

Se somarmos uma matriz “A” com uma matriz “B” de mesma ordem, A + b = C, teremos como resultado outra matriz “C de mesma ordem e para formar os elementos de “C” somaremos os elementos correspondentes de A e B, assim $a_{11} + b_{11} = c_{11}$.

<u>Exemplo:</u>

Dada a matriz A= $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 6 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 3 x 3 e matriz B= $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ 3 x 3, se somarmos A + B, teremos:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 6 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -6 \\ 8 & 0 & -3 \\ -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Observe os elementos em destaque:

$a_{13} = -1$ e $b_{13} = -5$ ao somarmos esses elementos chegaremos a um terceiro que é o $c_{13} = -6$. Pois **-1 + (-5) = -1 – 5 = - 6**

O mesmo ocorre com os outros elementos, para chegarmos ao elemento c_{32}, tivemos que somar $a_{32} + b_{32}$. Pois, 3 + (-5) = 3 – 5 = - 2

Assim: A + B = C, onde “C” tem a mesma ordem de A e B.

- <u>Subtração de matrizes:</u>

As duas matrizes envolvidas na subtração devem ser da mesma ordem. E a diferença delas deverá dar como resposta outra matriz, mas de mesma ordem.

Assim temos:
Se subtrairmos a matriz A da matriz B de mesma ordem, A – B = C, obteremos outra matriz “C” de mesma ordem. E para formarmos os elementos de C, subtrairemos os elementos de A com os elementos correspondentes de B, assim: $\mathbf{a_{21} - b_{21} = c_{21}}$.

<u>Exemplo:</u>

Digite a equação aqui.

Dada a matriz A = $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 6 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ e B = $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$, se subtrairmos A – B, teremos:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 6 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Observe os elementos destacados:

Quando subtraímos $a_{13} - b_{13} = c_{13},$

$$-1 - (-5) = -1 + 5 = 4$$

Quando subtraímos $a_{31} - b_{31} = c_{31},$

$$-4 - (-1) = -4 + 1 = -3$$

Assim A – B = C, onde “C” é uma matriz de mesma ordem de A e B.

1-4 - Multiplicação de um nº real por uma matriz

Multiplicam-se todos os elementos da matriz por este número.

$$2 * \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (2)\ -2 & (2)\ 3 & (2)\ 0 \\ (2)\ 1 & (2)\ 4 & (2)\ 7 \\ (2)\ 4 & (2)\ 6 & (2)\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 6 & 0 \\ 2 & 8 & 14 \\ 8 & 12 & 4 \end{vmatrix}$$

I-5 - Multiplicação de matrizes

No exemplo abaixo segue uma multiplicação entre uma matriz “A” de ordem 2 x 3 por uma matriz de ordem 3 x 2. A condição para que este produto seja válido é que “o nº de colunas

Digite a equação aqui.

da 1ª matriz deve ser igual ao nº de linhas da 2ª matriz, e isto ocorre, pois são “3” colunas e “3” linhas.

O interessante é perceber

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} (2*2)+(5*4)+(9*5) & (2*7)+(5*3)*(9*2) \\ (3*2)+(6*4)+8*5) & (3*7)+(6*3)+(8*2) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4+20+45 & 14+15+18 \\ 6+24+40 & 21+18+16 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 69 & 47 \\ 70 & 55 \end{vmatrix}$$

O interessante é perceber que a matriz que resultou da multiplicação é de ordem 2 x 2, isto é “2” linhas e “2” colunas, possuindo o mesmo nº de linhas da 1ª e o mesmo nº de colunas da 2ª.

Portanto, todas essas condições são observadas na multiplicação entre matrizes. Caso alguma dessas condições não seja válida, a operação da multiplicação estará sendo efetuada de forma incorreta.

II - <u>Determinantes</u>:

Será ministrado no 3º e 4º tempos de aula.

O determinante de uma matriz de segunda ordem é a diferença entre o produto dos termos da diagonal principal e o produto dos termos da diagonal secundária. Esses produtos se chamam, respectivamente, *termo principal* e *termo secundário* da matriz.

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Por exemplo, o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ é dado por:
$0.(-1) - 2.1 = 0 - 2 = -2.$

II-1 – <u>Regra de Sarrus</u>

Em Álgebra Linear, a <u>Regra de Sarrus</u> é um método para o cálculo do determinante de matrizes quadradas de 3ª ordem.

Seja a <u>matriz</u>

Digite a equação aqui.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

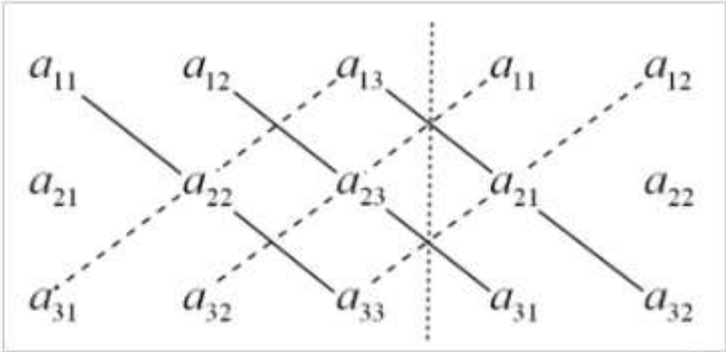
O determinante é dado, segundo a regra de Sarrus por:

$$|A| = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Uma forma prática de calcular o determinante por esta regra consiste em começar por escrever à direita da matriz as duas primeiras colunas da mesma:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

Somam-se então os produtos dos elementos das diagonais que partem de cima e da esquerda, e subtraem-se os produtos dos elementos das diagonais que partem de cima e da direita.



Regra de Sarrus: somam-se as diagonais a traço cheio e subtraem-se as a tracejado.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ -1 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 10 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = ((1.1.10)+(3.10.0)+(10.(-1).2)) - ((0.1.10)+(2.10.1)+(10.(-1).3$$

$$= (10 + 0 + (-20)) - ((0 + 20 + (-30))$$

$$= 0$$

Digite a equação aqui.

II-2 - Cálculo da área de um triângulo usando determinante:

Será ministrado no 5º e 6º tempos de aula.

- Dado um triângulo ABC com suas coordenadas cartesianas dos seus respectivos vértices, pode-se calcular sua área usando a fórmula abaixo:

$$ÁREA_{ABC} = ½ . |D|, \text{ onde o } D = \begin{matrix} X_a & Y_a & 1 \\ X_b & Y_b & 1 \\ X_c & Y_c & 1 \end{matrix}$$

Na fórmula acima, |D| é o módulo do determinante de ordem três, onde a 1ª coluna é formada pelas abscissas dos pontos, a 2ª coluna formada pelas ordenadas e a 3ª formada por "1".

Exemplo: Determinar a área do triângulo ABC com os seguintes pontos: A (2,1), B (3,2) e C (4,0). Determinar sua área?

$$Área = ½ . \begin{vmatrix} X_a & Y_a & 1 \\ X_b & Y_b & 1 \\ X_c & Y_c & 1 \end{vmatrix} \rightarrow Área = ½ . \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow -8 -3 + 4 + 4 = 8 – 11 = \mathbf{-3}$$

Logo a área = ½ . | **-3** | = **1,5**

II-3 - Através do cálculo de determinantes pode-se saber, por exemplo se três pontos (A, B e C) são colineares, ou são vértices de um triângulo.

Ex: Determinar o valor de "x" para que os pontos A(2,-3), B(x,7) e C(x,1) sejam colineares:

$$\begin{matrix} | & 2, & -3 & 1 & | & 2 & -3 & \\ | & x & 7 & 1 & | & x & 7 & = 0 \\ | & x & 1 & 1 & | & x & 1 & \end{matrix}$$

Resolvendo pela regra de Sarrus, temos:

14 – 3x + x – (-3x + 2 + 7x) = 0

Digite a equação aqui.

$- 6x + 12 = 0$ □

$6x = 12 \rightarrow$ **$x = 2$**

Ex2: Determinar o valor de “x” para que os pontos A(2,-3), B(x,7) e C(x,1) sejam vértices do triângulo:

Seguindo o mesmo raciocínio do exemplo 1, para que os pontos A, B e C sejam vértices do triângulo o “x” tem que ser diferente de 2.

III – Sistemas Lineares:

Será ministrado no 1º e 2º tempos de aula.

INTRODUÇÃO

Os sistemas de equação são ferramentas muito comuns na resolução de problemas em várias áreas (matemática, química, física, engenharia,...) e aparecem sempre em concursos e exames, como é o caso do Enem. Um sistema de duas equações possui duas retas representadas no plano e a intersecção dessas retas é a solução geométrica do sistema. Concluímos que a solução de um sistema pode ser apresentada de duas formas matemáticas, uma algébrica outra geométrica (graficamente). Os sistemas, geralmente, são resolvidos aplicando algumas regras, como por exemplo adição , substituição e etc. A maior dificuldade que o aluno encontra está na armação e principalmente na solução final da questão.

DESENVOLVIMENTO

III-1 – Sistemas de equações do 1º grau com “2” incógnitas

Ex: { $x + y = 6$

{ $x – y = 4$

Existem vários métodos para resolver um sistema de equações do 1º grau:

Vamos mostrar os 2 métodos mais usuais, que são os métodos da substituição e adição.

1º) Método da substituição:

Este método consiste em isolar uma das incógnitas numa das equações e substituir a expressão encontrada na outra equação.

Digite a equação aqui.

Ex1: { x + y = 6 -> x = 6 – y   (I)

{ x – y = 4   (II)

Substituindo o valor de "x" na equação II, temos:

6 – y – y = 4

- 2y = 4 – 6 → -2y = -2   x (-1) → 2y = 2 → **y = 1**

Substituindo o valor de y em I: x + y = 6 → x + 1 = 6 → **x = 5**

Resposta: **Par ordenado (5, 1) é a solução do sistema.**

Ex2: { x + y = 3 -> y = 3 – x (I)

{ 3x + 2y = 9   (II)

Substituindo o valor de "x" na equação (II), temos:

3x + 2 (3 – x) = 9 → 3x + 6 – 2x = 9 → x = 9 – 6 → **x = 3**

Substituindo o valor de x em (I): y = 3 - x → y = 3 - 3 = 0 → **y = 0**

Resposta: **Par ordenado (3, 0) é a solução do sistema.**

2º) Método da adição:

Será ministrado no 3º e 4º tempos de aula.

Esse método consiste em adicionar as duas equações de tal forma que a soma de uma das incógnitas seja zero. Para que isso aconteça será preciso que multipliquemos algumas vezes as duas equações ou apenas uma equação por números inteiros para que a soma de uma das incógnitas seja zero.

Ex3) {2 x + y = 7   (I)

{ 5x – 2y = - 5   (II)

Vamos multiplicar a equação (I) por 2.

{2 x + y = 7   (x2) → { 4x + 2y = 14   (I)

{ 5x – 2y = - 5   (II)

Somando (I) com (II), temos:

9x + 0 = 9 → **x = 1**

Substituindo o valor de x em (I): $4(1) + 2y = 14$

$2y = 14 – 4 \rightarrow 2y = 10 \rightarrow \mathbf{y = 5}$

Resposta: **Par ordenado (1, 5) é a solução do sistema.**

Ex4) { $x - y = 10$ (I)

{ $2x + 3y = 10$ (II)

Vamos multiplicar a equação (I) por 3.

{$x - y = 10$ (x3) $\rightarrow$ {$3x - 3y = 30$ (I)

{ $2x + 3y = 10$ (II)

Somando (I) com (II), temos:

$5x + 0 = 40 \rightarrow 5x = 40 \rightarrow \mathbf{x = 8}$

Substituindo o valor de x em (I) temos: $x - y = 10$

$8 – y = 10 \rightarrow y = 8 - 10 \rightarrow \mathbf{y = - 2}$

Resposta: **Par ordenado (8, -2) é a solução do sistema.**

Os sistemas também podem ser utilizados na solução de problemas, para isso será necessário descobrir as equações, resolver o sistema e verificar se a solução satisfaz.

Será ministrado no 5º e 6º tempos de aula.

Ex5) A soma de “2” números é 40. O maior tem 10 unidades mais que o menor. Calcule esses números ?

Solução: Indicando o maior por “x” e o menor por “y”, temos:

{ $x + y = 40$ (I)

{ $x = y + 10$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtém-se: $y + 10 + y = 40 \rightarrow 2y = 40 - 10$

$2y = 30 \rightarrow \mathbf{y = 15}$

Logo de (II) temos: $x = y + 10 \rightarrow x = 15 + 10 \rightarrow \mathbf{x = 25}$

Resposta: **Os números procurados são 25 e 15.**

Digite a equação aqui.

Ex6) Na compra de “2” camisetas, Joana pagou R$ 75,00. Uma custou R$ 12,00 mais que a outra. Qual o preço de cada camiseta ?

{ $x + y = 75$ (I)

{ $x = y + 12$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtém-se: $y + 12 + y = 75 \rightarrow 2y = 75 - 12$

$2y = 63 \rightarrow \mathbf{y = 31{,}50}$

Logo de (II) temos: $x = y + 12 \rightarrow x = 31{,}50 + 12 \rightarrow \mathbf{x = 43{,}50}$

Resposta: **As camisetas custaram R$ 31,50 e R$ 43,50.**

MATERIAL DE APOIO

Livro do aluno Unid. 29 (atividades I, II e III)

Livro do professor (seção I – Conhecendo e construindo Matrizes)

VERIFICAÇÃO DO APRENDIZADO

Serão realizadas duas avaliações, a primeira será individual com consulta valendo 10 pontos e a segunda as atividades IV e V (material do aluno), valendo também 10 pontos. A nota final do bimestre será a média aritmética dessas duas avaliações.

BIBLIOGRAFIA UTILIZADA

- Livro do aluno e do professor (Mód. 3 _ Neja)

- Livro: “Matemática” Construção e significado (Ed. Moderna)

Volume único / Autor: José Luiz Pastore Mello

- Livro: Matemática – Edwaldo Bianchini 8º ano (Editora Moderna)

-http://www.brasilescola.com/matematica/multiplicacao-matrizes.htm

- http://estudomatematico.blogspot.com.br/2009/04/sistemas-lineares-introducao.html

Digite a equação aqui.

Abraços,

Digite a equação aqui.

Digite a equação aqui.

Digite a equação aqui.