FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO: Estadual Padre Sebastião da Silva Pereira.
PROFESSOR: Cristiane Moura da Silva Bronsato Canella.
MATRÍCULA: 0008454050
SÉRIE: Terceira série do ensino médio
TUTOR (A): Andreia

PLANO DE TRABALHO SOBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA.

[Cristiane Moura da Silva Bronsato Canella]

[criscanella@oi.com.br]

Pontos positivos: De fácil aplicação, com exercícios fáceis, em ordem crescente de dificuldade.
Pontos os negativos: poucos objetos educacionais**.**
Alterações: Inclusão de um sitio eletrônico com um programa para baixar que calcula arranjos, permutações e combinações.
Impressão dos alunos: fácil, legal, parecia tão complicado, mas dá para aprender.

Introdução:

cidadão capaz de analisar alguns fenômenos à sua volta, como probabilidade,
O advento da era tecnológica nos dispõe uma mobilidade crescente para
obtenção de dados **1.** sobre eventos diversos. Para que isso seja proveitoso, é preciso

a compreensão e se estabeleçam conclusões adequadas aos fatos que o integram.
saber analisar tais fenômenos, mesmo que de forma primária, para que se obtenha
A contextualização do conhecimento de análise combinatória, com seu

emprego em diversas áreas do conhecimento, aliada à sistematização em forma crescente de complexidade, propiciam a reflexão sobre a análise do conteúdo, o desenvolvimento da consciência crítica, e sua inserção na sociedade, como

combinação, permutação, etc.

A análise gráfica dessas funções e de seus elementos facilita a visualização dessas situações, amplia conhecimento para conhecimentos futuros, como

probabilidade.

Estratégias adotadas no Plano de Trabalho:

2.

Utilização de um texto sobre analise combinatória e sobre o importante uso no dia-a- dia, com exemplos sobre a utilização desse conceito em algumas áreas do conhecimento.

Utilização dos recursos durante os exercícios e na construção de conceitos: quadro branco, data show (já que a aula será no laboratório de informática, para visualizar os exemplos), uso de tabelas e do geogebra, para melhor visualização das funções. Contextualização do conhecimento, através de problemas propostos, propiciando o desenvolvimento do raciocínio analítico do aluno, inclusive através da análise de gráficos que simulam funções, analisando suas características.

Atividades :

Habilidade s relacionadas:

Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números (padrões).

Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples.
Utilizar o princípio multiplicativo e o princípio aditivo da contagem na resolução de problemas.
Identificar e diferenciar os diversos tipos de agrupamentos.

Pré-requisitos:

Manipulação algébrica de equações, análise gráfica de situações, uso de árvore de possibilidades.

Tempo de Duração:

Duração 300minutos.

Recursos educacionais utilizados:

Utilização dos recursos: durante os exercícios, quadro branco, data show (já que a aula será no laboratório de informática, para visualizar os exemplos), régua.

Organização da turma:

Organização da classe em duplas, para uma discussão participativa e colaborativa das atividades.

Objetivos:

Introduzir a ideia de funcionalidade por meio de exemplos e permitir a resolução , validando as formulas apresentadas.

Estudar realmente o que significa combinatór ia(e seus fatores, conceitos e propriedades fundamentais não só no ensino de Matemática, mas abordando conceitos e contextos ainda pouco explorados pelos alunos em sala de aula para dinamizar e mostrar que este conceito matemático envolve mais que fórmulas e teorema abstratos .

Desenvolver conceitos, instigar a análise de situações, estabelecendo conexões entre as diversas áreas do conhecimento, contribuindo para o desenvolvimento da sua consciência crítica, favorecendo sua inserção na sociedade e sua capacidade de intervenção no real, tornando um cidadão crítico e integrado à sociedade em que vive.

Metodologia adotada:

Utilização dos recursos durante os exercícios e na construção de conceitos: quadro branco, data show (já que a aula será no laboratório de informática, para visualizar os exemplos),régua. Contextualização do conhecimento, através de problemas propostos sobre situações do cotidiano, propiciando o desenvolvimento do raciocínio analítico do aluno, inclusive através da análise de exemplos, analisando suas características.

1. **Avaliação:**

Avaliação: durante todo o desenvolvimento, na forma de atividades e exercícios para que seja observado o desenvolvimento das competências e habilidades envolvidas nos objetivos propostos, contextualização do conhecimento, através de problemas propostos sobre permutação de palavras, organização de livros, problemas diários, etc. Análise e construção de proposições para resolução de problemas, contextualizando o conhecimento, através dos problemas propostos sobre problemas do cotidiano, propiciando o desenvolvimento do raciocínio analítico do aluno, inclusive, através da análise de situações, analisando suas características.

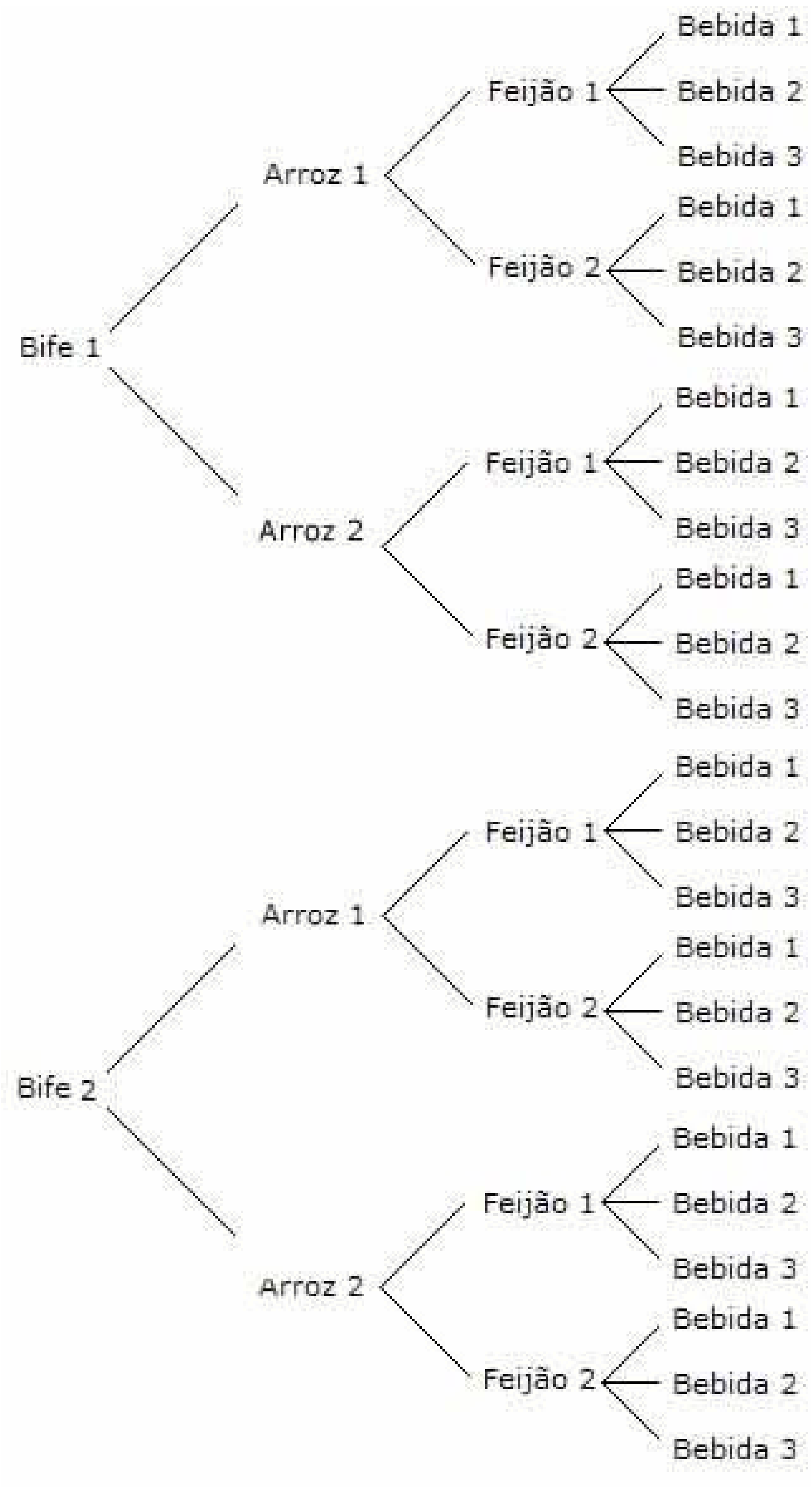
Análise combinatória

É um estudo realizado na matemática e na lógica, responsável pela análise das possibilidades e das combinações.

Análise Combinatór ia é um conjunto de procedimentos que possibilita a construção de grupos diferentes formados por um número finito de elementos de um conjunto sob certas circunstâncias. Arranjos, Permutações ou Combinações, são os três tipos principais de agrupamentos, sendo que eles podem ser simples, com repetição ou circulares.

O estudo da análise combinatór ia nos permite descobrir quais são as diferentes possibilidades de uma combinação de variáveis. Por exemplo, quantas placas de carro são possíveis de existir no sistema atual de placas brasileiro. É uma matéria bastante cobrada em vestibulares e concursos públicos, pois envolve um pensamento mais abstr ato, pois na maioria das vezes, não enxergamos todas as possibilidades.

A explicação dessa matéria é muito mais fácil quando utilizamos exemplos. Então, supondo que um restaurante “ la carte” tenha disponível 2 tipos de bifes, 2 tipos de arroz, 2 tipos de feijão e 3 tipos de bebidas. O dono do restaurante queira servir pratos contendo 1 elemento de cada tipo de comida. Nomeando os tipos de comida da forma “bife 1, arroz 1, arroz 2 bebida 1, bebida 2, etc”, montamos o esquema:



Se formos seguir os caminhos descritos pelas linhas, encontraremos 24 caminhos, que são o total de possibilidades de pratos diferentes. Perceba que quanto mais opções de comidas, maior e mais complexo fica o esquema. Então, imagine como seria descobrir as possibilidades das placas de carro no sistema brasileiro? (três letras, 4 algarismos).

Mas podemos calcular de forma diferente. Basta multiplicar todas as opções de comida disponíveis: $2 . 2 . 2 . 3 = 24$

Para saber essas combinações é necessário utilizar as propriedades da análise combinatória.

Fatorial

O fatorial de um número **n** (n pertence ao conjunto dos números naturais) é sempre o produto de todos os seus antecessores, incluindo si próprio e excluindo o zero. A representação é feita pelo número fatorial seguido do sinal de exclamação, **n!**.
Exemplo de número fatorial:

6! = 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 720

Importante: n >= 0 (n maior ou igual a zero) , ou seja, não existe fatorial para números negativos.

* O fatorial de 0 (**0!**) é 1, pois **o produto de número nenhum .é 1**

O numero fatorial pode ser modificado para outras formas:

n! = n . (n-1) . (n-2) . (n-3)!

exemplo:

6! = 6 . (6- 1) . (6- 2) . (6-3)!

6! = 6 . 5 . 4 . 3!

6! = 120 . 3!

6! = 120 . 3 . (3- 1) . (3-2)!

6! = 120 . 3 . 2 . 1!

6! = 120 . 6 = 720

Divisão de fatoriais
A divisão de fatoriais acontece bastante em análise combinatór ia. Observe:

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \,.\, (n-1)!}{(n-1)!} = \frac{n \,.\, \cancel{(n-1)}!}{\cancel{(n-1)}!} = n$$

$$\frac{(n+5)!}{(n+4)!} = \frac{(n+5).(n+4)!}{(n+4)!} = \frac{(n+5).\cancel{(n+4)!}}{\cancel{(n+4)!}} = n+5$$

Cuidado
As seguintes operações **NÃO** são válidas:

$n! + x! = (n + x)!$

$n! - x! = (n - x)!$

$n! . x! = (n . x)!$

Permutações

Quando formamos agrupamentos com m elementos, de forma que os m elementos sejam distintos entre sí pela ordem. As permutações podem ser simples, com repetição ou circulares.

Permutação s imples: São agrupamentos com todos os m elementos distintos.

Fórmula: $P_s(m) = m!$.

Cálculo para o exemplo: $P_s(3) = 3! = 6$.

Exemplo: Seja C={A,B,C} e m=3. As permutações simples desses 3 elementos são 6 agrupamentos que não podem ter a repetição de qualquer elemento em cada grupo mas podem aparecer na ordem trocada. Todos os agrupamentos estão no conjunto:

P_s ={ABC,ACB,BAC,BCA,CAB,CBA}

Permutação com repetição: Dentre os m elementos do conjunto $C=\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$, faremos a suposição que existem m_1 iguais a x_1, m_2 iguais a x_2, m_3 iguais a x_3, ..., m_n iguais a x_n, de modo que $m_1+m_2+m_3+...+m_n=m$.

Exemplo: Determine o número de anagramas da palavra ARARA.

Resolução:

Número de elementos: 5.

R aparece 2 vezes

Letras

A aparece 3 vezes

Total de anagramas $P^{2,3}_5 = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5.4.3!}{2!\,3!}$ Simplif icamos $3! = \frac{5.4}{2} = 10$

ARARA ARAAR ARRAA AAARR AARAR AARRA RAAAR RAARA RARAA RRAAA

Anagrama: Um anagrama é uma (outra) palavra construída com as mesmas letras da palavra original trocadas de posição.

Exemplo: Quantos anagramas podemos formar com as 6 letras da palavra ARARAT. A letra A ocorre 3 vezes, a letra R ocorre 2 vezes e a letra T ocorre 1 vez. As permutações com repetição desses 3 elementos do conjunto C={A,R,T} em agrupamentos de 6 elementos são 15 grupos que contêm a repetição de todos os elementos de C aparecendo também na ordem trocada. Todos os agrupamentos estão no conjunto:

P_r ={AAARRT,AAATRR,AAARTR,AARRTA,AARTTA,
AATRRA,AARRTA,ARAART,ARARAT,ARARTA,
ARAATR,ARAART,ARAATR,ATAARA,ATARAR}

Permutação circular: Situação que ocorre quando temos grupos com m elementos distintos formando uma circunferência de círculo.

Fórmula: $P_c(m)=(m-1)!$

Cálculo para o exemplo: P(4)=3!=6

Exemplo: Seja um conjunto com 4 pessoas K={A,B,C,D}. De quantos modos distintos estas pessoas poderão sentar-se junto a uma mesa circular (pode ser retangular) para realizar o jantar sem que haja repetição das posições?

Se considerássemos todas as permutações simples possíveis com estas 4 pessoas, teriamos 24 grupos, apresentados no conjunto:

P_c ={ABCD,ABDC,ACBD,ACDB,ADBC,ADCB,BACD,BADC,

BCAD,BCDA,BDAC,BDCA,CABD,CADB,CBAD,CBDA,

CDAB,CDBA, DABC,DACB,DBAC,DBCA,DCAB,DCBA}

Acontece que junto a uma mesa "circular" temos que:

ABCD=BCDA=CDAB=DABC

ABDC=BDCA=DCAB=CABD

ACBD=CBDA=BDAC=DACB

ACDB=CDBA=DBAC=BACD

ADBC=DBCA=BCAD=CADB

ADCB=DCBA=CBAD=BADC

Existem somente 6 grupos distintos, dados por:

P_c ={ABCD,ABDC,ACBD,ACDB,ADBC,ADCB}

1) Uma família é composta por seis pessoas: o pai, a mãe e quatro filhos. Num restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentes essas pessoas podem se sentar em torno da mesa de modo que o pai e a mãe fiquem juntos?

Sabendo que pai e mãe devem ficar juntos, vamos amarrar os dois e tratá- los como se fossem um único elemento. Veja a *figura 1* abaixo:

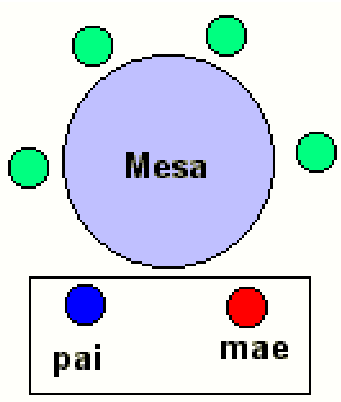


Fig. 1

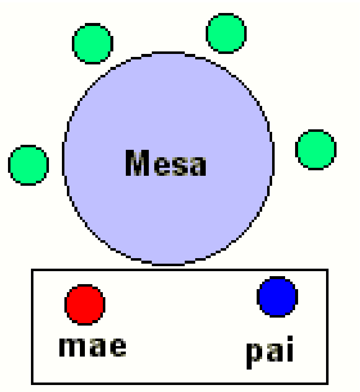


Fig. 2

Ao tratar o pai e mãe como um único elemento, passamos a ter somente 5 elementos. Portanto, utilizando a *Permutação circular* de 5 elementos, calculamos o número de possibilidades desta família sentar- se ao redor da mesa com pai e mãe juntos sendo que o pai está à esquerda da mãe.

Permutação circular (P_c) de 5 elementos calcula-se:
P_c 5 = (5- 1)! = 4! = 4.3.2.1 = 24

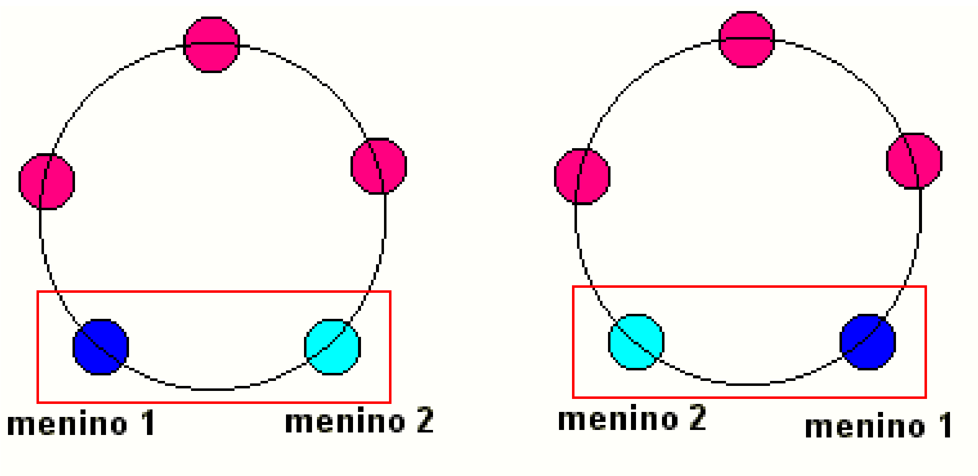
Portanto, para o pai a esquerda da mãe, temos 24 posições diferentes. Mas o pai pode estar a direita da mãe, como na figura 2, e então teremos mais 24 posições diferentes para contar (novamente $P_c 5$).
Portanto, o número total de disposições é 48.

2) Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos. De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?

No total temos 5 elementos para dispor em círculo, ou seja, novamente utilizaremos Permutação Circular. Mas agora a restrição é diferente, os dois meninos NÃO podem ficar juntos. Para esta situação, iremos calcular o número total de disposições (sem restrição) e diminuir deste resultado o número de disposições em que os meninos estão juntos (para calcular o número de disposições deles juntos, fazemos como no exercício 1).

O número total de disposições é $P_c 5 = (5 - 1)! = 4! = 4.3.2.1 = 24$.

Agora, para calcular o número de disposições com os meninos juntos, devemos amará- los e tratá- los como um único elemento, lembrando que podemos ter duas situações:



O número total de disposições com os meninos juntos é $2.P_c 4$ (4 elementos pois os meninos estão juntos e valem por 1). Calculando este valor:

$2.P_c 4 = 2.(4- 1)! = 2.3! = 2.3.2.1 = 12$

Portanto, o número de disposições em que os meninos não estão juntos *24-12=12*.

Exemplos:

1- Simplifique a expressão a seguir de acordo com as regras do Fatorial de um número:

$$\frac{(n+1)!}{(n+2)!}$$ Resolvendo:

Como o “maior” é (n+2), desenvolvemos ele, para poder simplificar com (n+1):

$$\frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \frac{(n+1)!}{(n+2)*(n+1)!} = \frac{(\cancel{n+1})!}{(n+2)*(\cancel{n+1})!} = \frac{1}{(n+2)}$$

2- Newton possui 9 livros distintos, sendo 4 de Geometria, 2 de Álgebra e 3 de Análise. O número de maneiras pelas quais Newton pode arrumar esses livros em uma estante, de forma que os livros de mesmo assunto permaneçam juntos, é:

a) 288

b) 296

c) 864

d) 1728

e) 2130

Resolvendo :

4 livros de Geometria $= P_4$

2 livros de Álgebra $= P_2$

3 livros de Análise $= P_3$

$P_4 * P_2 * P_3 * P_3$ (este ultimo porque eles podem mudar de lugar entre si: 3 posições)

= 4! * 2! * 3!*3!

4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24

2! = 2

3! = 3 * 2 * 1 = 6

P4 * P2 * P3 * P3 = 24 * 2 * 6 * 6

P4 * P2 * P3 * P3 = 1728 maneiras

Resposta correta item d.

As permutações são agrupamentos formados pelos mesmos elementos, por isso diferem entre si somente pela ordem dos mesmos.

Por exemplo, se C = (2, 3, 4), as permutações simples de seus elementos são: 234, 243, 324, 342, 423 e 432.

Indicamos o número de Permutações simples de n elementos distintos por $P_n = n!$

Exemplo 3

Quais os anagramas da palavra AMOR?

Um anagrama formado com A, M, O, R corresponde a qualquer permutação dessas letras, de modo a formar ou não palavras.

Temos 4 possibilidades para a primeira posição, 3 possibilidades para a segunda posição, 2 possibilidades para a 3 posição e 1 possibilidade para a quarta posição.

Pelo princípio fundamental da contagem temos 4 * 3 * 2 * 1 = 24 possibilidades ou 24 anagramas.

Alguns anagramas: ROMA, AMRO, MARO, ARMO, MORA . . .

Exemplo 4

Formar os anagramas a partir da palavra PATO

Pelo Princípio Fundamental da Contagem podemos dizer que é possível formar 24 sequências.

P4 = 4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24

PATO PAOT POTA POAT PTOA PTAO

APTO APOT ATPO ATOP AOTP AOPT

TAPO TAOP TOPA TOAP TPAO TPOA

OAPT OATP OPTA OPAT OTPA OTAP

Exemplo 5

Carlos e Rose têm três filhos: Sérgio, Adriano e Fabíola. Eles querem tirar uma foto de recordação na qual todos apareçam lado a lado. Quantas fotos diferentes podem ser registradas?

A forma como irão se distribuir corresponde a uma permutação entre eles, então:

P5 = 5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120 formas distintas.

São agrupamentos formados com p elementos, (p<m) de forma que os p elementos sejam distintos entre sí pela ordem ou pela espécie. Os arranjos podem ser simples ou com repetição.

Arranjo simples:

Não ocorre a repetição de qualquer elemento em cada grupo de p elementos.

Fórmula: $A_s(m,p) = m!/(m-p)!$

Cálculo para o exemplo: $A_s(4,2) = 4!/2!=24/2=12$.

Exemplo: Seja Z={A,B,C,D}, m=4 e p=2. Os arranjos simples desses 4 elementos tomados 2 a 2 são 12 grupos que não podem ter a repetição de qualquer elemento mas que podem aparecer na ordem trocada. Todos os agrupamentos estão no conjunto:

A_s ={AB,AC,AD,BA,BC,BD,CA,CB,CD,DA,DB,DC}

Arranjo com repetição:

Todos os elementos podem aparecer repetidos em cada grupo de p elementos.

Fórmula: $A_r(m,p) = m^p$.

Cálculo para o exemplo: $A_r(4,2) = 4^2 = 16$.

Exemplo: Seja C={A,B,C,D}, m=4 e p=2. Os arranjos com repetição desses 4 elementos tomados 2 a 2 são 16 grupos que onde aparecem elementos repetidos em cada grupo. Todos os agrupamentos estão no conjunto:

A_r ={AA,AB,AC,AD,BA,BB,BC,BD,CA,CB,CC,CD,DA,DB,DC,DD}

Exercícios

1- Resolvendo a equação $(x + 4)! = 120$, então x vale:

a) 5.

b) 6.

c) 7.

d) 8.

e) 9.

2- Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre, passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo, partindo de Recife, e 4 roteiros diferentes para chegar a Porto Alegre, partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre?

a) 15.

b) 20.

c) 25.

d) 30.

e) 9.

3- Quantos números de dois algarismos distintos podemos escrever com os algarismos:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

a) 72.

b) 71.

c) 70.

d) 69.

e) 68.

4- Quantos números pares e de quatro algarismos distintos podemos formar com os algarismos:

1, 3, 4, 5, 6, 7?

a) 100.

b) 110.

c) 120.

d) 130.

e) 140.

5- Quantos são os anagramas possíveis com as letras da palavra: ARARA?

6- Quantos são os anagramas possíveis para a palavra: ULYSSES?

7- . Quantos são os anagramas possíveis para a palavra: ULYSSES começando por U?

8- Quantos são os anagramas possíveis para a palavra: ULYSSES terminando por S?

9- Quantos são os anagramas possíveis para a palavra: ULYS SES começando por U e terminando por S?

10- . Qual é o número possível de anagramas que se pode montar com as letras da palavra AMA?

11- De quantos modos distintos 5 pessoas podem sentar-se em volta de uma mesa circular?

12- De quantas maneiras 6 pessoas podem sentar-se num banco de 6 lugares de modo que duas delas fiquem sempre juntas, em qualquer ordem?

13- Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes (juntos), mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

a) 144

b) 180

c) 240

d) 288

e) 360

14-

Dada a expressão $\frac{(n-2)!}{(n+3)!} * \frac{(n+2)!}{(n-1)!}$, realize sua simplificação.

15- Um casal e seus quatro filhos vão ser colocados lado a lado para tirar uma foto. Se todos os filhos devem ficar entre os pais, de quantos modos distintos os seis podem posar para tirar a foto?

a) 24

b) 48

c) 96

d) 120

e) 720

Entre no sitio eletrônicohttp://www.adisioribeiro.com.br/instalacomb.exe,
e explore o programa sobre analise combinatoria.
Bom trabalho!

1. **Referências:**

DANTE, Luiz Roberto. Matemática contextos e aplicações. Primeira edição. Brasil:Ed. Ática ,2011.Volume único.

BARROSO,Juliana Matsubara. Conexões com a matemática..Primeira edição. Brasil:Ed. Moderna ,2011.Volume 3.

Brasil escola. Disponivel em :< http://exercicios.bras ilescola.com/matematica/exer cicios- sobre- fatorial-pr incipio- fundamental- contagem.htm#resposta- 2117.> Acesso em 19 de fevereiro de 2013

Info escola. Disponível em< http://www.infoescola.com/matematica/analise- combinator ia/>.Acesso em 19 de fevereiro de 2013.

Muteoria. Disponível em : < http://educar.sc.usp.br/f isica/muteoria.html>Acesso em: março 2012.

PEC. Ensino médio. Disponível em < http://www.vanzolini- ead.org.br >Acesso em: março 2012