Formação Continuada em Matemática

Fundação CECIERJ / Consórcio CEDERJ

MATEMÁTICA 3º Ano – 1º Bimestre /2013

Plano de trabalho

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Tarefa 01

Cursista: Fabiano Battemarco da Silva Martins

fb.sm@bol.com.br

Tutor (a): EDESON DOS ANJOS SILVA

1. Introdução:

O Currículo Mínimo inicia o conteúdo do primeiro bimestre do terceiro ano do Ensino Médio com o conteúdo Análise combinatória que está dentro do campo numérico aritmético. No mesmo bimestre continua o estudo de Introdução à probabilidade que está dentro do campo numérico aritmético.

Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples não é algo simples, visto que os alunos são habituados à memorização e repetição metódica dos cálculos aritméticos. Para elaborar esse plano de trabalho, busquei livros e recursos que usassem a linguagem o mais simples possível e de maneira que possam ser adaptadas de acordo com o aprendizado da turma durante o bimestre, algumas questões foram retiradas de apostilas e do site http://www.saerjinho.caedufjf.net/diagnostica/ que é um banco de dados que fornece questões a partir das habilidades selecionadas. Sabemos que o plano de trabalho dificilmente entra em ação em sua totalidade, pois durante o percurso algumas coisas podem ser adicionadas, retiradas ou adaptadas. O livro didático adotado na escola é o do autor Manoel Paiva, que na apresentação do livro traz sintetizado a forma como esse plano foi traçado.

> As transformações do Ensino Médio brasileiro nos últimos anos visam, entre outros objetivos, a um aprendizado voltado para a continuação dos estudos e ao mundo do trabalho. Por isso, uma das orientações do Ministério da Educação para o Ensino Médio é recorrer a situações práticas, que possibilitem o trânsito entre as disciplinas escolares e suas aplicações na indústria, no comércio, em serviços etc. Além dessas orientações, comuns a todas as disciplinas, os documentos oficiais enfatizam: “A Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo e instrumental, mas deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas”. Essa ênfase tem a finalidade de alertar sobre os exageros da visão pragmática da ciência, que podem pôr em risco a aquisição do pensamento matemático. Neste livro, seguimos essas orientações, recorrendo frequentemente a aplicações práticas, destacando, porém, a Matemática como conhecimento científico e, como tal, evolutivo e sistêmico. Enfim, buscamos um ponto de equilíbrio entre ciência e prática. (PAIVA, 2010)

2. Estratégias adotadas no Plano de Trabalho:

O plano de trabalho está divido em aulas, cada dia com dois tempos de cinquenta minutos cada aula. São lecionados na turma de 3° ano do Ensino Médio quatro tempos de aula por semana e meu cronograma prevê durante o quarto bimestre trinta e seis tempos de aula (sendo desprezado aqui o mês de dezembro, devido as avaliações externas, culminância de projetos da escola, fechamento do ano letivo) que são destinadas para a aplicação de dois Planos de Trabalho, então faço uma previsão de dezoito tempos para cada Plano de Trabalho, mas acredito que a aplicação do Plano de Trabalho de Análise Combinatória dure um tempo maior do que o Plano de Trabalho de Introdução à probabilidade. As aulas são divididas em conceitos e resolução de exercícios de acordo com o aprendizado da turma.

Atividade 1: Desenvolvimento - 1ª e 2ª aula

Habilidade relacionada: Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples.

- **Pré-requisitos:** Conhecer o princípio aditivo e o multiplicativo.
- **Tempo de Duração:** 100 minutos.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Nenhum.
- **Organização da turma:** Individual.
- **Objetivos:** Compreender o que é PFC, utilizar o princípio multiplicativo e o princípio aditivo da contagem na resolução de problemas.
- **Metodologia adotada:** No momento inicial, analisaremos o seguinte problema:

Uma loja de roupas femininas vende 4 modelos diferentes de calças *jeans*. Cada calça pode ter uma das cores: preto, marrom ou azul.

Quantas opções de escolha terá uma consumidora interessada em comprar uma calça *jeans* nessa loja?

Resolução

Consideremos o esquema em que cada casa representa uma escolha da consumidora:

modelo	cor

Para a primeira casa existem quatro possibilidades de escolha, e para a segunda, três possibilidades:

$$\underbrace{\boxed{\text{modelo}}}_{4}\ \underbrace{\boxed{\text{cor}}}_{3}$$

Pelo princípio fundamental da contagem, o número de escolhas é dado pelo produto 4 . 3, ou seja, a consumidora tem 12 opções de escolha.

Vamos ver alguns exemplos:

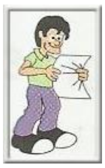
a)Quantos números naturais de três algarismos podem ser representados com os algarismos 2, 3, 4, 7, 8 e 9?

Resolução

As casas, da esquerda para a direita, representam as centenas, as dezenas e as unidades, respectivamente.
Como não há restrição no enunciado, pode haver repetição de algarismos, ou seja, podemos considerar números como 477 e 999. Logo, para preencher cada uma das casas existem seis possibilidades de escolha, pois podemos preenchê-la com um dos algarismos 2, 3, 4, 7, 8 e 9.

centenas	dezenas	unidades
6	6	6

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, o total de números que podem ser representados é dado pelo produto 6 3 6 3 6. Ou seja, nas condições enunciadas, é possível representar 216 números.

b)  **PRINCÍPIO ADITIVO - DIVIDIR PARA SOMAR**

Supondo que exista cinemas, e teatros em sua cidade, e que tenham entrado em cartaz 3 filmes e 2 peças de teatro diferentes para passarem no próximo sábado, e que você tenha dinheiro para assistir a apenas 1 evento destes 5 que foram descritos anteriormente. Quantos são os programas que você pode fazer neste sábado?

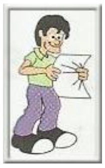
Vejamos então:

Vamos supor agora que cada programa custe apenas 1 real, e que você só tenha um real. Como você tem dinheiro para apenas um **evento** (programa), então **ou** você assiste ao filme 1 **ou** ao filme 2 **ou** ao filme 3 **ou** à peça de teatro 1 **ou** à peça de teatro 2.

A ideia é prestar atenção no **conetivo “ou”** do problema. **Ou** escolhe F1, **ou** escolhe F2, **ou** escolhe F3, e assim por diante.

Deste modo estamos **dividindo o problema em casos**. E como já citei anteriormente aparecerá a ideia do **conetivo “ou”**.

Caso eu escolher ver um filme, terei 3 opções ou caso eu escolher ver uma peça de teatro, terei 2 opções. Assim ao todo são 3 + 2 = 5 programas.



C) **PRINCÍPIO MULTIPLICATICO - DECISÕES EM SEQUÊNCIA**

Supondo que você tenha agora dois reais, e quer assistir a um filme e uma peça de teatro, quantos são os programas que poderá fazer no sábado?

Bom! Repare que diferente do primeiro exemplo, neste você tem que tomar **duas decisões em sequência.**

1º decisão – escolher um filme dos três em cartaz.
2º decisão – escolher uma peça de teatro das duas disponíveis.

Vamos enumerar os casos possíveis:

Aqui a idéia é prestar atenção no conetivo “e”.

Filme 1 e Peça 1
Filme 1 e Peça 2
Filme 2 e Peça 1
Filme 2 e Peça 2
Filme 3 e Peça 1
Filme 3 e Peça 2

Logo você vai escolher um filme dos três em cartaz **“e”** escolher uma peça de teatro das duas disponíveis. Logo você têm três vezes duas opções para escolher entre os programas.Ou seja, 3 . 2 = 6 possibilidades.

Atividade 2: Desenvolvimento - 3ª e 4ª aula

Habilidade relacionada: Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples.

- **Pré-requisitos:** Resolver problemas de contagem nas suas diferentes esferas.
- **Tempo de Duração:** 100 minutos**.**
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Nenhum
- **Organização da turma:** Individual.
- **Objetivos:** Distinguir os princípios aditivo e multiplicativo da contagem
- **Metodologia adotada:** Nesse momento aprofundaremos o estudo sobre o princípio aditivo / princípio multiplicativo da contagem.

Vamos resolver alguns exercícios:

01)Para ir ao clube, Júnior deseja usar uma camiseta, uma bermuda e um par de tênis. Sabendo que ele dispõe de seis camisetas, quatro bermudas e três pares de tênis, de quantas maneiras distintas poderá vestir-se?

02)Um jantar constará de três partes: entrada, prato principal e sobremesa. De quantas maneiras distintas ele poderá ser composto, se há como opções oito entradas, cinco pratos principais e quatro sobremesas?

03)O vagão de um trem possui seis portas. De quantas maneiras distintas um passageiro pode entrar no trem e sair dele por uma porta diferente da que usou para entrar?

04)Um experimento consiste em lançar um dado e uma moeda sobre uma mesa. Um resultado desse experimento é, por exemplo, o par (5, coroa), isto é, face 5 no dado e face coroa na moeda.

a) Escreva todos os possíveis resultados, organizando- os em uma matriz de possibilidades.

b) Determine, pelo princípio fundamental da contagem, quantos são os possíveis resultados desse experimento.

05)Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, determine:

a) quantos números naturais de quatro algarismos podem ser representados.

b) quantos números naturais de quatro algarismos distintos podem ser representados.

06)(FEI – SP) Um *hacker* sabe que a senha de acesso a um arquivo secreto é um número natural de cinco algarismos distintos e não nulos. Com o objetivo de acessar esse arquivo, o *hacker* programou o computador para testar, como senha, todos os números naturais nessas condições. O computador vai testar esses números um a um, demorando 5 segundos em cada tentativa. O tempo máximo para que o arquivo seja aberto é:

a) 12 h 30 min b**)** 12 h 26 min c**)** 11 h 15 min 36 s d**)** 7 h e**)** 21 h

07)Com os algarismos 1, 3, 4, 5, 7 e 9, determine:

a) Quantos números naturais pares de três algarismos podem ser formados.

b) Quantos números naturais pares de três algarismos distintos podem ser formados.

08)Duas linhas de ônibus ligam as cidades A e B, e três linhas ligam as cidades B e C, conforme mostra o esquema:

a)De quantos modos diferentes um usuário pode escolher uma sequência dessas linhas indo de A para C e passando por B?
(*Sugestão*: Esse experimento é composto de dois outros: ir de A para B e de B para C. Represente por um quadrinho cada um desses experimentos.)

b)De quantas maneiras diferentes um usuário pode escolher uma sequência dessas linhas fazendo o trajeto de ida e volta de A para C e passando por B na ida e na volta de modo que não use a mesma linha que usou na ida?

09)Mensalmente, um colégio oferece aos alunos duas palestras sobre orientação profissional. No mês passado, a primeira foi sobre Informática, e a segunda, sobre Economia. Todos os alunos de uma classe assistiram a pelo menos uma das palestras, sendo que 18 assistiram à primeira, 23 assistiram à segunda e 8 assistiram às duas palestras. Quantos alunos há nessa classe?

10)(UGF-RJ) Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, quantos múltiplos positivos de 5 compostos de três algarismos distintos podemos formar?
a) 32 **b)** 36 **c)** 40 **d)** 60 **e)** 72

Atividade 3: Desenvolvimento - 5ª e 6ª aula

- **Habilidade relacionada:** Identificar e diferenciar os diversos tipos de agrupamentos.
- **Pré-requisitos:** Compreender o conceito de fatorial.
- **Tempo de Duração:** 100 minutos**.**
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Nenhum
- **Organização da turma:** Individual.
- **Objetivos:** Distinguir os diversos tipos de agrupamentos.
- **Metodologia adotada:** Nesse momento aprofundaremos o estudo aprendendo como podemos diferenciar os diversos tipos de agrupamentos.

Observe:

Fatorial

A multiplicação de números naturais consecutivos é muito frequente na Análise combinatória, e algumas dessas multiplicações envolvem muitos fatores. Por exemplo, a quantidade de números naturais de 7 algarismos distintos que podem ser formados com os 7 algarismos 1, 3, 4, 5, 6, 8 e 9 é dada por:

$$7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1$$

Para simplificar as operações com expressões desse tipo, adotaremos o símbolo $n!$ (lemos: "*n* fatorial"), que indica o produto dos números naturais consecutivos n, $n - 1$, $n - 2$, ..., 1, com $n > 2$. No nosso exemplo, temos:

$$7! = 7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 .\, 2 \,.\, 1$$

Essa notação ajuda muito em problemas que envolvem cálculos trabalhosos, porque permite apresentar resoluções extensas de maneira abreviada. Definimos:

Seja n um número natural tal que $n \geqslant 2$. Define-se o **fatorial de n**, que é representado por $\mathbf{n!}$, como o produto dos números naturais consecutivos n, $n - 1$, $n - 2$, ..., 1. Isto é:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 1$$

Exemplos

a) $2! = 2 \,.\, 1 = 2$

b) $3! = 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 6$

c) $4! = 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 24$

d) $5! = 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 120$

Extensão da definição de fatorial

$0! = 1$ $1! = 1$

Vamos resolver alguns exercícios:

01) Calcule:

a) $7!$
b) $5!$
c) $4! + 3!$

02) Calcule:

a) $7! - 5!$
b) $5 + 4!$
c) $6! - 20$

03) Efetue:

a) $\dfrac{6!}{5!}$

b) $\dfrac{4!}{6!}$

c) $\dfrac{3 \cdot 2!}{6!}$

04) Efetue:

a) $\dfrac{6! - 5!}{5!} + 0!$

b) $\dfrac{10! + 9!}{11!}$

c) $\dfrac{7!}{6!} + \dfrac{6!}{7!}$

05) Simplifique:

a) $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)!}$

b) $\dfrac{(n+1)! + n!}{n!}$

c) $\frac{(n-4)!}{(n-3)!}$

06) Simplifique:

a) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

b) $\frac{n! - (n-1)!}{(n-1)! + (n-2)!}$

07) Resolva a equação (n + 2)! = 6n!

08)Se *n*! = 40.320, então *n* é igual a:

a) 6 b**)** 9 c**)** 7 d**)** 10 e**)** 8

09)(UFF-RJ) Um garçom anotou os pedidos de três fregueses. Cada freguês pediu um prato principal, um acompanhamento e uma bebida. Posteriormente, o garçom não sabia identificar o autor de cada pedido. Lembrava-se, porém, de que não havia nenhumacoincidência entre os pedidos: os pratos principais eram diferentes entre si, o mesmo ocorrendo com os acompanhamentos e as bebidas.

O número de maneiras diferentes que o garçom poderia distribuir os pedidos entre os três fregueses é:

a) $(3!)^3$ b**)** **(**3^3)! **c)** $3^{3!}$ **d)** $3!^{3!}$ **e)** 3!

10) Determine o número *n* tal que *n*! = $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Classificação dos agrupamentos

1)Identifique o termo ou o conceito que pode ser associado à definição:

1. É todo agrupamento em que não se considera a ordem dos elementos, isto é, mudanças na ordem não alteram o agrupamento. COMBINAÇÃO

2. É todo agrupamento em que se considera a ordem dos elementos, isto é, qualquer mudança na ordem dos elementos altera o agrupamento. ARRANJO

3. É todo arranjo simples que pode ser formado com *n* elementos distintos tomados *n* a *n*. PERMUTAÇÃO

2)Classifique os agrupamentos descritos nas situações a seguir como arranjo ou combinação.

Formar um grupo de 5 alunos numa classe de 30 alunos.	combinação
Criar uma senha de quatro dígitos usando apenas os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.	arranjo
Premiar com medalhas de ouro, prata ou bronze os três melhores atletas entre 10 que participam de uma competição.	arranjo
Escolher 6 números entre 60 para apostar numa loteria.	combinação

3)Escreva o que representa cada um dos termos destacados a seguir.

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

n representa
o número de elementos do conjunto

p representa
o número de elementos em cada agrupamento

Explique com suas palavras a diferença entre arranjo simples e permutação simples.

SUGESTÃO: A permutação é um caso particular de arranjo simples de *p* elementos de um conjunto com *n* elementos.
No arranjo, o número de elementos é menor ou igual ao total de elementos do conjunto ($p < n$), enquanto na permutação o número de elementos em cada agrupamento é igual ao total de elementos do conjunto, isto é, $n = p$.

4) Escreva a fórmula do cálculo do número de permutações simples de *n* elementos.

$$P_n = n!$$

Abaixo há um exercício e algumas etapas de sua resolução. Complete a resolução do exercício.

Quantos são os anagramas que podemos formar com a palavra AMOR?

SUGESTÃO: São 4 letras. Logo temos $P_4 = 4! = 24$ anagramas.

Explique com suas palavras a diferença entre arranjo simples e combinação simples.

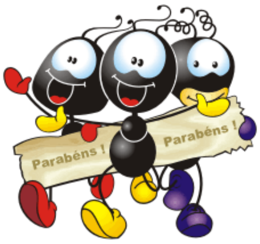
SUGESTÃO: No arranjo simples, a ordem dos elementos é relevante no agrupamento, enquanto na combinação não é.

5)Escreva a fórmula do cálculo do número de combinações simples de *n* elementos tomados *p* a *p*.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Atividade 4: Desenvolvimento - 7ª e 8ª aula

- **Habilidade relacionada:** Resolver problemas diferenciando os diversos tipos de agrupamento.
- **Pré-requisitos:** Distinguir os diversos agrupamentos.
- **Tempo de Duração:** 100 minutos**.**
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Nenhum.
- **Organização da turma:** Em grupo (3 alunos), propiciando um trabalho organizado e colaborativo.
- **Objetivos:** Resolução de atividades sobre os tipos de agrupamentos.
- **Metodologia adotada:** Os alunos deverão realizar as atividades abaixo.



Você já aprendeu como diferenciar os diversos tipos de agrupamento. Agora é só exercitar.

Arranjos

01) Calcule:

a) $A_{9,\,3}$
b) $A_{8,\,4}$

02) Resolva a equação $A_{x,\,2} = 20$.

03) Resolva a equação $A_{x\,+\,3,\,2} = 42$.

04) Um cinemateca dispõe de seis filmes e oferece uma sessão dupla, na qual serão exibidos dois desses filmes: o primeiro às 16 horas, e o segundo às 18 horas. De quantas maneiras distintas a seqüência de filmes pode ser escolhida?

05) Para e eleição do corpo dirigente de uma empresa candidatam-se oito pessoas. De quantas maneiras poderão ser escolhidos presidente e vice-presidente?

06) Dispondo dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, quantos números de quatro algarismos distintos podemos formar?

Permutação

07) Calcule:

a) P_4
b) P_6
c) $\frac{P_7}{P_3}$

08) Determine *n*, sabendo que $P_n = 120$.

09) Resolva a equação $\frac{P_{n-2}}{P_n} = \frac{1}{6}$.

10) Qual é o número de anagramas da palavra SOMA? E de LIVRO?

11) Considere os anagramas da palavra BRASIL.

a) Quantos são?
b) Quantos começam por *B*?
c) Quantos começam por vogal?

12) Determine quantos anagramas da palavra BRASIL apresentam as letras BR juntas e:

a) nessa ordem;
b) em qualquer ordem.

13) Considere os anagramas formados com as letras C, A, S, T, E, L, O:

a) Quantos são?
b) Quantos começam por C?
c) Quantos começam por CAS?
d) Quantos começam por vogal?
e) Quantos começam por vogal e terminam por consoante?

Combinações

14) Calcule:

a) $C_{10,\,3}$
b) $C_{9,\,6}$
c) $C_{8,\,4}$
d) $\frac{C_{10,2}}{C_{8,3}}$

15) Resolva a equação $\frac{C_{n,\,2}}{C_{n+1,\,2}} = \frac{3}{4}$.

16) Determine *n*, sabendo que $C_{n,\,2} = 10$.

17) Um torneio de futebol será disputado em duas sedes a serem escolhidas entre seis cidades. De quantas maneiras poderá ser feita a escolha das duas cidades?

18) Quinze alunos participam de um sorteio promovido pelo professor de Matemática. Ser ele dispõe de três prêmios idênticos, de quantas formas poderão ser escolhidos os alunos?

19) Uma classe tem 30 alunos. Um professor organiza uma prova oral para a qual 5 alunos serão sorteados ao acaso. De quantas formas o professor poderá escolher os alunos?

20) De um baralho de 52 cartas, sorteamos simultaneamente cinco cartas.

a) Quantas são as possibilidades de sorteio das cartas?
b) De quantas formas essas cartas podem ser sorteadas de modo que o ás de copas seja sempre incluído?

21) Um baralho contém 52 cartas. De quantas maneiras poderão ser sorteadas simultaneamente quatro cartas, de modo que o resultado do sorteio contenha:

a) dois reis e duas damas?
b) o rei de copas?

22) De um baralho de 52 cartas, sorteamos simultaneamente quatro cartas.

a) De quantas formas essas cartas podem ser sorteadas de modo que entre elas apareçam exatamente dois reis?
b) De quantas maneiras podemos sorteá-las de modo que tenhamos uma carta de cada naipe?

Permutação com elementos repetidos

23) Determine o número de anagramas formados a partir de:

a) MALA
b) CORRER
c) AMIGA
d) CASSINO
e) RODOVIA

24) Determine o número de anagramas formados a partir de:

a) BANANA
b) CACHORRO
c) ASSISTENTE
d) COCADA
e) IRRIGAR

25) Um dado é lançado 4 vezes. De quantos modos distintos pode ser obtida uma seqüência em três faces iguais a 1 e uma face igual a 6?

26) Permutando os algarismos 3, 2, 3, 4, 4 e 5, quantos números de 6 algarismos podemos formar?

27) Uma moeda é lançada 5 vezes. De quantos modos distintos podem ser obtidas 2 caras e 3 coroas?

28) Considere os anagramas formados a partir de CORREDOR.

Responda:

a) quantos são?
b) quantos começam por *R*?
c) quantos começam por *COR*?
d) quantos começam e terminam por *R*?

29) Uma prova contém 10 testes que devem ser respondidos com *V* ou *F*. De quantos modos distintos ela pode ser resolvida assinalando-se 3 testes com *V* e 7 com *F*?

- **Referências:**

NERY, CHICO. **Matemática para o Ensino Médio**, Volume Único, 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

PACCOLA, HERVAL; BIANCHINI, EDWALDO. **Curso de Matemática**, Volume Único, 2. Ed. São Paulo: Moderna, 1998.

PAIVA, MANOEL RODRIGUES. **Matemática: Paiva**, Volume 3, 2.ed. São Paulo: Moderna, 2010.

- **Endereços eletrônicos acessados de 29/10/2012 a 14 /09/2012.**

http://2.bp.blogspot.com/_5lutUHN9gkk/TJqGjPdRTeI/AAAAAAAAAAc/M7wiTObdBNg/s1600/polin%C3%B4mio.JPG

http://www.coladaweb.com/exercicios-resolvidos/exercicios-resolvidos-de-matematica/polinomios

http://exercicios.brasilescola.com/matematica/exercicios-sobre-polinomios.htm

http://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&cad=rja&ved=0CCwQFjAC&url=http%3A%2F%2Fprofessorwaltertadeu.mat.br%2FGABlistaconceitodepolinomios2009.doc&ei=U4iOUKHwG4bq9AT7t4DgBA&usg=AFQjCNEf86DAtvjVSku135D38jLvg108aA

http://www.rdmf.mat.br/arquivos/downloads/251de62a8678ab157202d39793c20029.pdf