Formação Continuada em Matemática
Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 2º Ano – 4º Bimestre/2012

Plano de Trabalho 1
Sistemas Lineares

Cursista: Ângela Pereira Cerqueira Halfeld
Tutora: Daiana da Silva Leite – Grupo 7

Sumário

INTRODUÇÃO 03

DESENVOLVIMENTO 04

AVALIAÇÃO 18

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 19

INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem por objetivo ajudar o aluno a desenvolver um conhecimento efetivo e de significado próprio utilizando os conceitos e aplicações dos sistemas lineares, possibilitando relações com conhecimentos adquiridos nos bimestres anteriores.

É importante que o aluno sinta-se capaz de aprender e resolver problemas matemáticos, por isso, deve ser trabalhado com conteúdos o mais próximos possíveis de sua realidade, com exemplos práticos e de fácil interpretação para que ele consiga vencer as barreiras e conseguir aprofundar seus estudos no futuro.

Devemos também expandir o uso de Sistemas lineares, em atividades contextualizadas, onde deve ser explorada a interdisciplinaridade, propiciando aos alunos relacionar a Matemática com outras áreas do conhecimento.

Procurei desenvolver nos alunos atitudes positivas em relação à Matemática, como autonomia, trabalho em grupo e perseverança na resolução de problemas.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1

- HABILIDADE RELACIONADA: Identificar os sistemas lineares como modelos matemáticos que traduzem situações-problemas para a linguagem matemática.
- PRÉ-REQUISITOS: Operações com números reais.
- TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos
- RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático, Texto do curso : "Cuidado com a reação química" exibido no Datashow, vídeo : "Gasolina ou álcool" e ficha 1.
- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Em duplas.
- OBJETIVOS: Mostrar aos alunos a importância do tema que será estudado e sua aplicabilidade em assuntos do cotidiano.
- METODOLOGIA ADOTADA:
  Apresentar as imagens no datashow para os alunos com o objetivo de informar alguns exemplos práticos do uso dos conceitos de sistemas lineares .

SISTEMAS LINEARES

Do grego systema (sy significa 'junto' e sta, 'permanecer'), sistema, em Matemática, é o conjunto de equações que devem ser resolvidas "juntas", ou seja, os resultados devem satisfazê-las simultaneamente.

Vocês já conhecem sistemas lineares com duas incógnitas, onde podemos aplicar os métodos da adição ou da substituição para resolvê-los, vamos relembrá-los a seguir :

Exemplos :

I – MÉTODO DA ADIÇÃO

1) Numa lanchonete os pastéis têm preço único e os refrigerantes também. Nesse lugar , paguei R$ 11,60 por 5 pastéis e 3 copos de refrigerante e meu amigo pagou R$ 7,20 por 3 pastéis e 2 copos de refrigerante. Qual o preço do pastel e do refrigerante?

- x : o preço do pastel
- y : o preço de cada refrigerante

Então :

$$\begin{cases} 5x + 3y = 11{,}60 \\ 3x + 2y = 7{,}20 \end{cases}$$

Temos assim, um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas.

Para achar a solução desse sistema, vamos utilizar o método da adição.

$$\begin{cases} 5x + 3y = 11{,}60 & \times (3) \\ 3x + 2y = 7{,}20 & \times (-5) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 15x + 9y = 34{,}80 \\ -15x - 10y = -36{,}00 \end{cases}$$

$$-y = -1{,}20$$

$$y = 1{,}20$$

Substituindo y por 1,20 na primeira equação, temos:

$5x + 3y = 11{,}60 \Longrightarrow 5x + 3.\ 1{,}20 = 11{,}60 \Longrightarrow 5x + 3{,}60 = 11{,}60 \Longrightarrow x = 1{,}60$

Logo, o pastel custa R$ 1,60 e o refrigerante custa R$ 1,20.

O par ordenado (1,60; 1,20) é a solução do sistema, ou seja, S = {(1,60; 1,20)}.

II – MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

Uma outra maneira de resolver esses tipos de sistemas é pelo método da substituição, veja o exemplo a seguir :

2) Resolva o sistema :

$$\begin{cases} -3x + y = -10 \Longrightarrow y = 3x - 10 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$$

Substituindo y por 3x – 10 na segunda equação, temos:

$2x + 5y = 1$

$2x + 5.\ (3x - 10) = 1$

$2x + 15x - 50 = 1$

$17x = 1 + 50$

$17x = 51$

$x = 3$

Agora que achamos o valor de x, devemos substituí-lo por 3 na primeira equação :

$y = 3x - 10 \Longrightarrow y = 3.3 - 10 \Longrightarrow y = 9 - 10 \Longrightarrow y = -1$

Logo, o par ordenado (3, -1)é a solução do sistema,ou seja, S = {(3, -1)}.

(Observação : Texto apresentado no datashow retirado do curso de formação continuada)

Cuidado com a reação química!

O lixo orgânico (lixo que tem origem animal ou vegetal) passa por várias transformações químicas e, quando submetido à ação de bactérias, em alta temperatura, se transforma em dois subprodutos: um é o adubo natural e o outro é o gás metano (CH_4), que pode ser usado como combustível em usinas termoelétricas.

A reação de combustão do gás metano (CH_4) ocorre quando ele interage com oxigênio (O_2), resultando na formação de gás carbônico (CO_2) e água (H_2O). As reações químicas estão presentes em muitos fenômenos naturais e para compreender melhor como elas funcionam costuma-se representar o efeito delas por "equações químicas". No caso do lixo a combustão do gás metano pode ser representada pela seguinte equação química:

$CH_4 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$

Na Química, o termo "equação" é usado para representar o que ocorre antes e depois de uma reação química. Os reagentes são postos à esquerda e os produtos à direita, separados por uma flecha.
Quando ocorre uma reação química, o *Princípio de Lavoisier* ou *Lei de conservação das massas* garante que o número de átomos envolvido nos reagentes deve ser o mesmo presente nos produtos formados.
Uma forma de a equação química representar a conservação da matéria é por meio do balanceamento químico da reação, ou seja, um mecanismo utilizado para garantir que em ambos os lados da equação química o número de átomos seja o mesmo.
O balanceamento de uma reação química pode ser realizado montando e resolvendo um *sistema de equações lineares.*
A equação que representa a combustão completa do gás metano pode ser escrita da seguinte forma:
$xCH_4 + yO_2 \rightarrow zCO_2 + tH_2O$
ou seja, **x** moléculas de gás metano, reagem com **y** moléculas de oxigênio e liberam **z** moléculas de gás carbônico e **t** moléculas de água.
Com essas informações podemos montar o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x=z \\ 4x=2t \\ 2y=2z+t \end{cases} \quad \begin{cases} x - z = 0 \\ 4x - 2t = 0 \\ 2y - 2z - t = 0 \end{cases}$$

Neste sistema, temos três equações e quatro variáveis: x, y, z e t.
Todo sistema originado a partir do balanceamento de uma reação química, é possível e indeterminado, logo admite infinitas soluções. Nesse caso, o número de equações é maior do que o número de incógnitas e podemos resolvê-lo com a atribuição de um valor para uma das incógnitas (variável livre) e assim reescrever as outras incógnitas em função desta.
Tomando z como variável livre e reescrevendo x, y e t em função de z, temos:
$x=z$
$4x= 2t \Rightarrow 2t = 4z \Rightarrow t = 2z$
$2y - 2z - t = 0 \Rightarrow 2y - 2z - 2z = 0 \Rightarrow 2y = 4z \Rightarrow y = 2z$
Uma solução particular pode ser obtida tomando-se z = 1, e nesse caso teremos: x = 1, y = 2 e t = 2.
Ou seja:
1.CH4 + 2. O2 → 1.CO2 + 2. H2O
Assim, pode-se verificar que a equação está balanceada, visto que temos do lado dos reagentes um átomo de Carbono, quatro átomos de Hidrogênio e quatro átomos de Oxigênio e, da mesma forma, temos o mesmo número de átomos do lado dos produtos, apesar de observamos a formação de substâncias diferentes.
Outras soluções particulares podem ser obtidas teoricamente, implicando em diferentes significados em uma reação química.

(Observação : Apresentar no datashow o vídeo sugerido no curso de formação continuada : Gasolina ou álcool)

"Acesse o link http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1101 e assista o vídeo com seus alunos."

FICHA 1 – SISTEMAS LINEARES

TRABALHO DE MATEMÁTICA – 4. BIMESTRE – PROF.ª ÂNGELA – DATA : ______

NOME : _________________________________ N.: ____ TURMA : _____

1 – Conforme vocês observaram no vídeo e nas explicações anteriores, faça o balanceamento da reação química sugerida no vídeo, usando sistemas lineares:

$C_2H_5OH + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$

2 – Com os novos veículos, o consumidor pode escolher o tipo e a proporção do combustível. Admitindo que, para encher o tanque de um veículo com 60 l, contendo 6% de álcool e o resto de gasolina, um consumidor deverá utilizar o combustível proveniente de duas bombas no posto de abastecimento, qual será a quantidade consumida de cada bomba, nos seguintes casos :

a) O posto tem gasolina pura numa bomba e na outra, álcool puro.

b) Um posto de abastecimento possui duas bombas de combustível, sendo x o volume de gasolina e y o volume de álcool. Determine a quantidade de álcool e gasolina desse posto, de modo que :

$$\begin{cases} 23x + 2y = 3650 & \text{(bomba 1)} \\ 9x + y = 1450 & \text{(bomba 2)} \end{cases}$$

c) Caso você chegue a um posto de abastecimento e desconfie da qualidade do combustível, qual o seu procedimento como cidadão? Escreva um pequeno texto fundamentando a sua atitude.

Atividade 2

- HABILIDADE RELACIONADA: Resolver problemas utilizando sistemas lineares.
- PRÉ-REQUISITOS: Equação do 1º grau com 2 variáveis, representação gráfica de uma equação do 1º grau com 2 variáveis.
- TEMPO DE DURAÇÃO: 150 minutos
- RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático, papel quadriculado, régua, roteiro de ação 4 – Gráficos e sistemas, software Geogebra, computadores ou datashow e ficha 2.
- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Em duplas.
- OBJETIVOS: Correlacionar a representação algébrica de um sistema com sua representação gráfica, bem como classificar esse sistema.
- METODOLOGIA ADOTADA:
  Apresentar o software Geogebra no datashow para os alunos se familiarizarem com o software e mostrar alguns exemplos práticos do uso dos sistemas lineares através de sua representação gráfica, se possível, levá-los ao laboratório de informática. Caso haja algum problema técnico, fazer as atividades da ficha em papel quadriculado.

CLASSIFICAÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Quanto ao número de soluções, um sistema pode ser possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível.

O sistema possível e determinado tem uma única solução.

O sistema possível e indeterminado tem infinitas soluções.

O sistema impossível não tem nenhuma solução.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DOS SISTEMAS LINEARES 2X2

Os pares ordenados de números reais que são soluções de uma equação linear com duas incógnitas determinam, no gráfico, uma reta. A interseção das duas retas das equações do sistema determina sua solução, se existir.

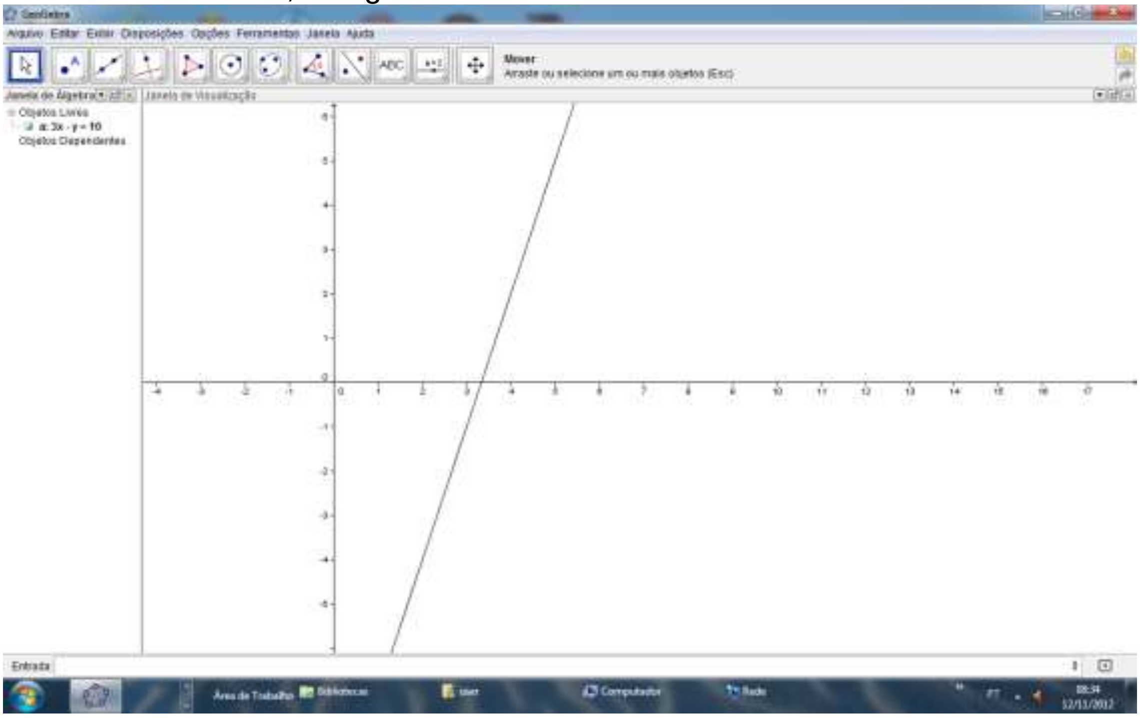
Veja a representação gráfica de dois sistemas de equações com duas incógnitas no software Geogebra:

Exemplo 1 :

$$\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$$

Primeiro, digitar a primeira equação em entrada, montando a primeira reta referente a esta equação, onde temos os pontos (4, 2); (2, -4); ... como soluções da equação.

Como vemos, a seguir :



Depois, digitar a 2.ª equação em entrada, montando a segunda reta referente a esta equação, onde temos os pontos (-2, 1); (3, -1); ... como soluções dessa equação.

Como vemos a seguir :

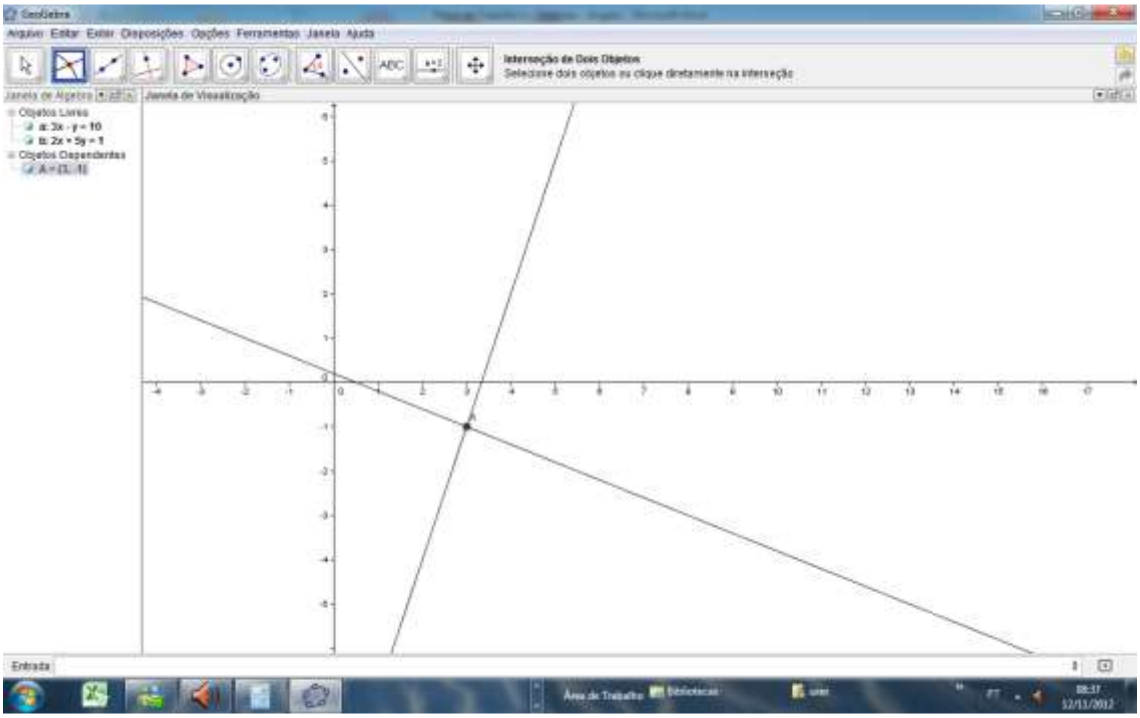
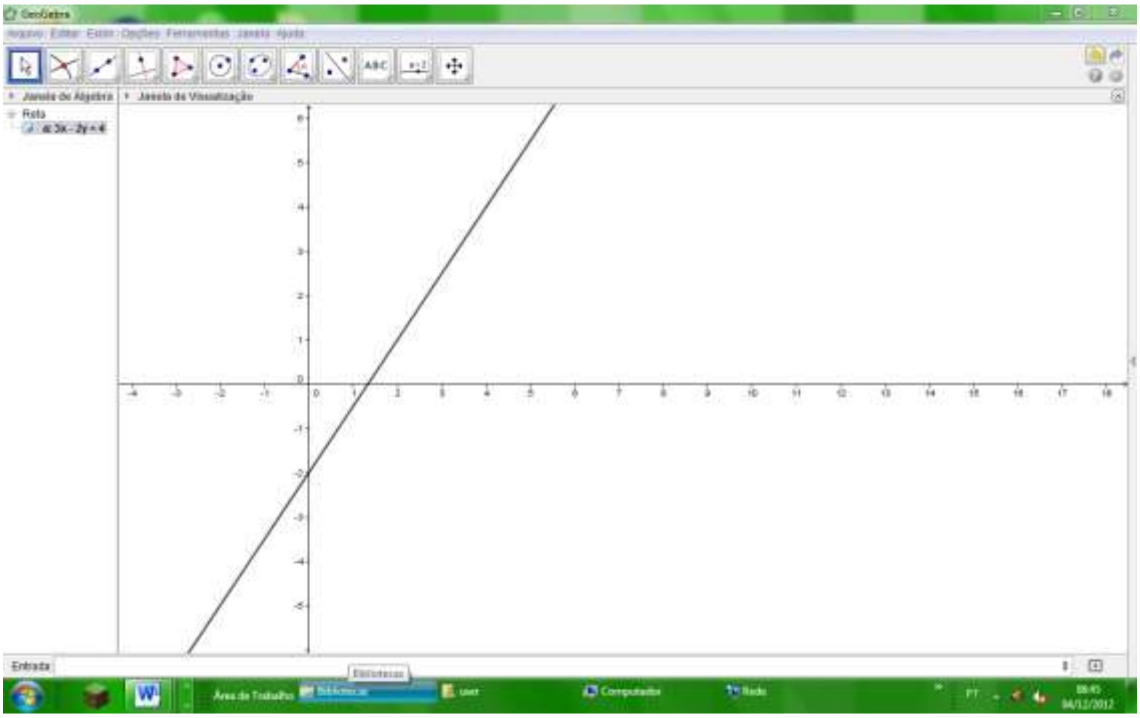


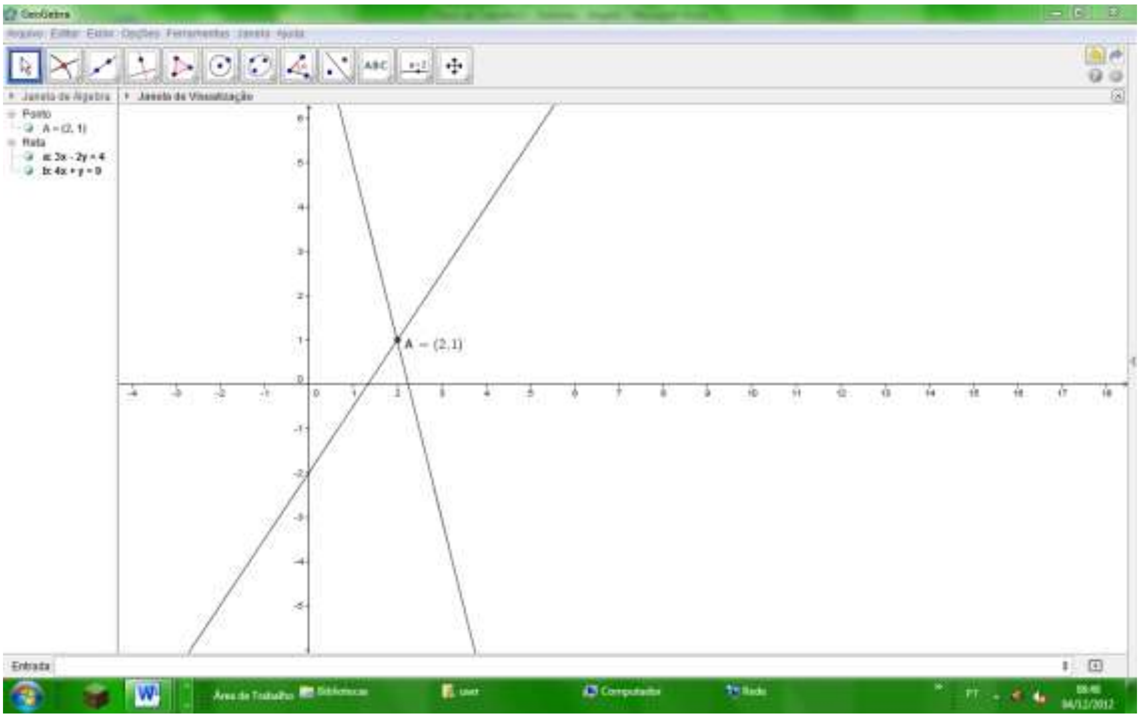
Imagem feita pelo autor retirada do Geogebra

As retas concorrentes indicam que existe um único par ordenado que é solução do sistema (sistema possível e determinado), ou seja, o ponto (3, -1) que é a interseção entre as duas retas.

Exemplo 2 : Seguindo o mesmo procedimento do exemplo anterior, temos :

$$\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$$





As retas concorrentes indicam que existe um único par ordenado que é solução do sistema (sistema possível e determinado), ou seja, o ponto A (2, 1) que é a interseção entre as duas retas.

Obs. : Mais exemplos no livro didático.

FICHA 2 – SISTEMAS LINEARES E GRÁFICOS

TRABALHO DE MATEMÁTICA – 4. BIMESTRE – PROF.ª ÂNGELA – DATA : ______

NOME : ________________________________ N.: ____ TURMA : _____

1 – Considere o seguinte problema :

Qual deve ser a capacidade máxima de um contêiner vermelho e um branco a serem encomendados a uma indústria, se o cargueiro Água do Mar, que pode transportar no máximo 54 toneladas, deve levar 10 vermelhos e 12 brancos, lotados, e o Salinas, cuja carga máxima é de 42 toneladas, deve levar 8 vermelhos e 9 brancos, também lotados ?

a) Complete a tabela abaixo :

Cargueiro	Carga máxima	Contêiner Vermelho	Contêiner Branco
Água do Mar			
Salinas			

b) Represente a tabela acima na forma de um sistema de equações :

c) Usando o software Geogebra, represente graficamente esse sistema.

d) Esse sistema é possível e determinado?

e) De acordo com a representação acima, qual é a solução desse problema ?

2 – Agora, represente graficamente os sistemas abaixo, usando o software Geogebra e verificando se os sistemas são possíveis ou não :

a) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = -8 \\ -x - 2y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}$

Atividade 3

- HABILIDADE RELACIONADA: Resolver problemas utilizando sistemas lineares.
- PRÉ-REQUISITOS: Equação do 1º grau com 2 variáveis, representação gráfica de uma equação do 1º grau com 2 variáveis.
- TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos
- RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático, papel quadriculado, régua, roteiro de ação 4 – Gráficos e sistemas, software Geogebra, computadores ou datashow.
- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Em duplas.
- OBJETIVOS: Correlacionar a representação algébrica de um sistema com sua representação gráfica de um sistema 3x3, mostrando as possibilidades para as posições relativas no espaço.
- METODOLOGIA ADOTADA:
  Apresentar o software Geogebra no datashow para os alunos perceberem as diferentes posições relativas dos três planos no espaço dos sistemas lineares 3x3, se possível, levá-los ao laboratório de informática.

POSSIBILIDADES PARA AS POSIÇÕES RELATIVAS DOS TRÊS PLANOS NO ESPAÇO

Existem oito possibilidades para as posições relativas dos três planos formados pelas três equações de um sistema linear 3x3, que definem os planos π_1, π_2, π_3, no espaço.

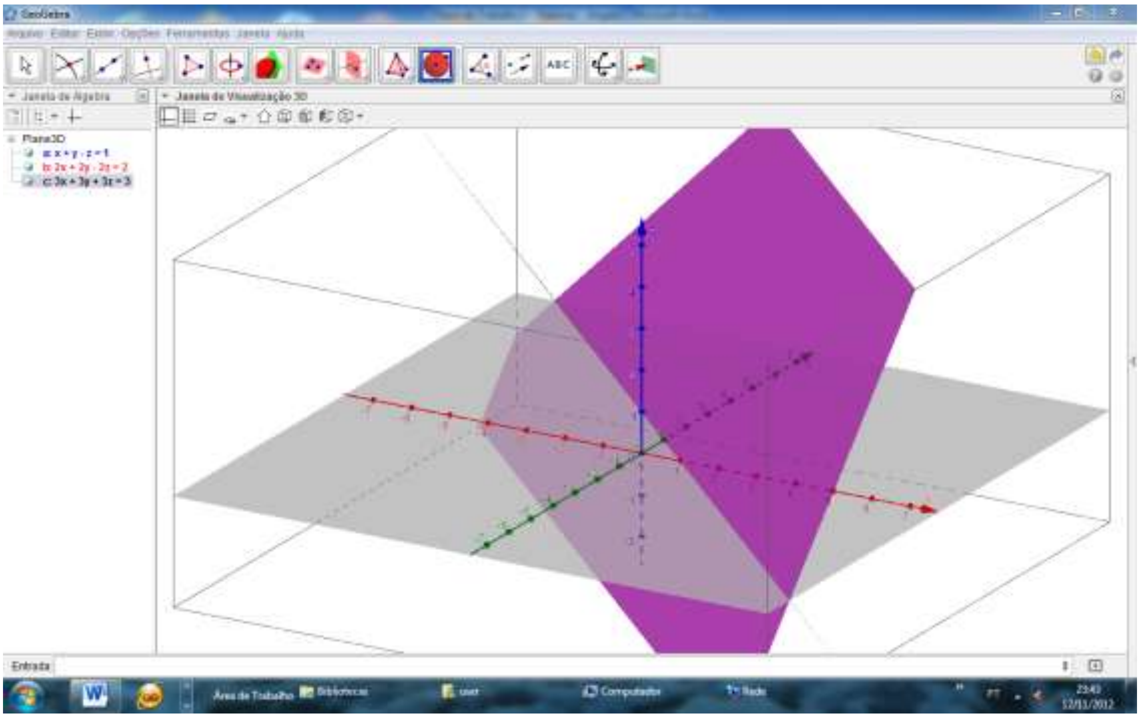
1.ª possibilidade : os três planos coincidem.

Neste caso, todos os pontos P(x, y, z) de π_1, são soluções do sistema. Há, portanto, infinitas soluções para o sistema (Possível e indeterminado).

Vamos fazer um exemplo no Geogebra 3D (exibir no Datashow):

a)

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + 3y - 3z = 3 \end{cases}$$



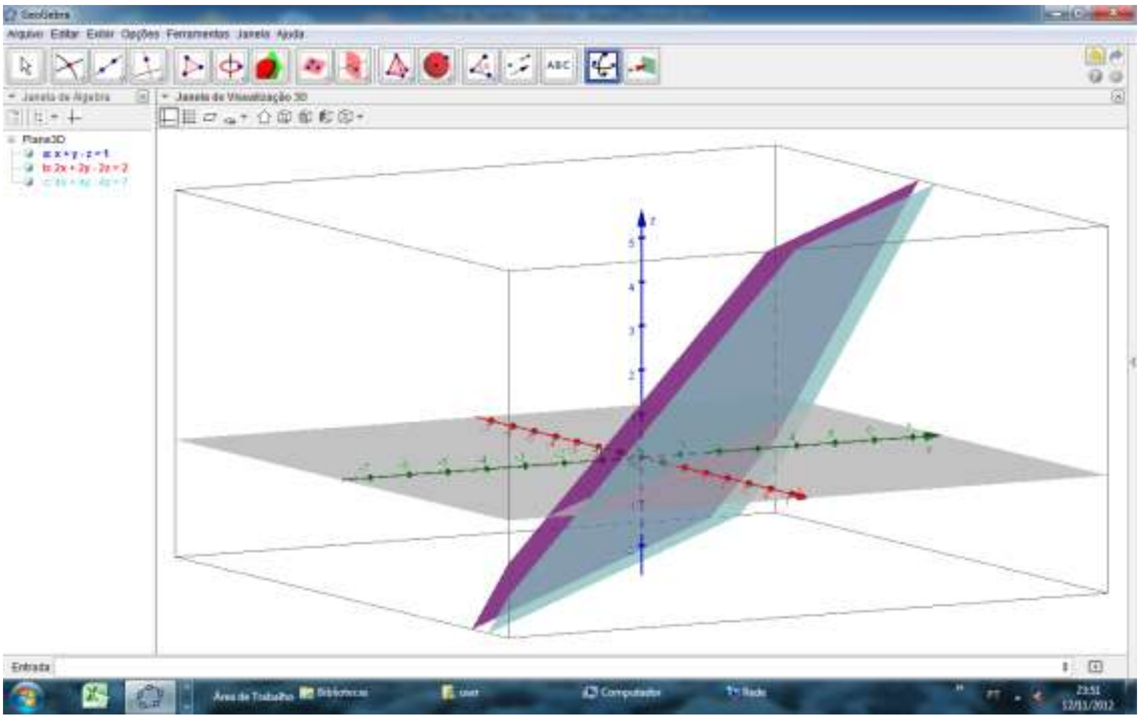
<u>*2.ª possibilidade : dois planos coincidem e o terceiro é paralelo a eles.*</u>

Neste caso, o sistema é impossível.

Vamos fazer um exemplo no Geogebra 3D:

a)

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \\ 4x + 4y - 4z = 7 \end{cases}$$



Neste exemplo, podemos mostrar a rotação do plano para que o aluno perceba os planos em posições diferentes.

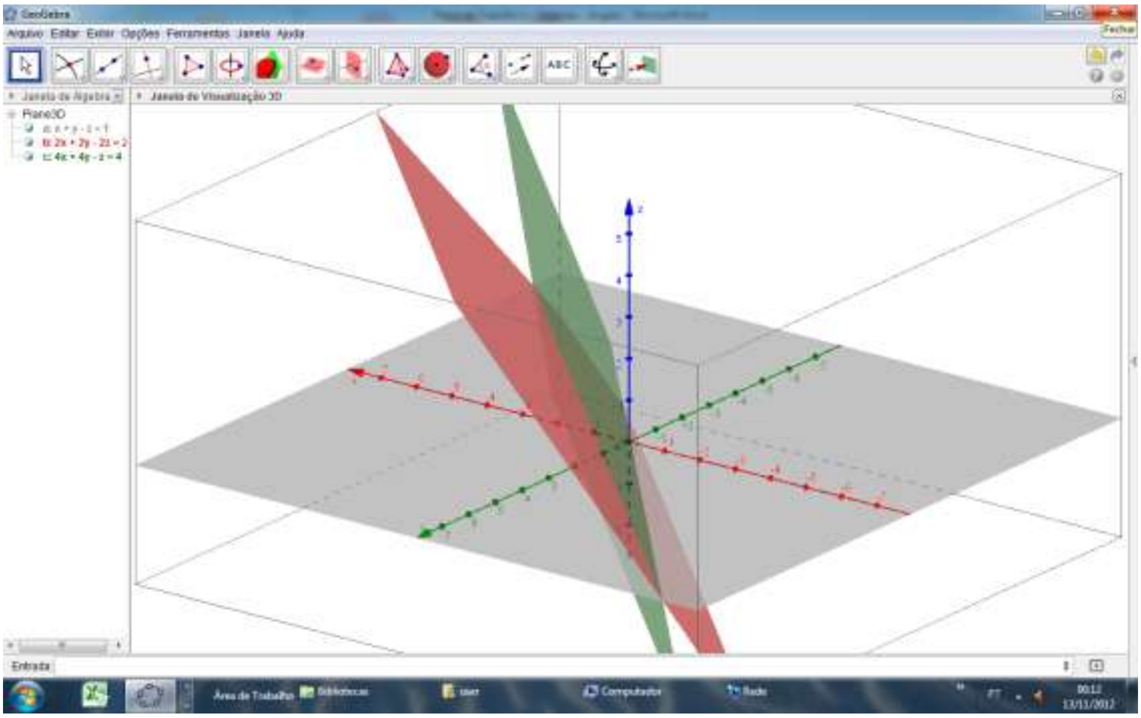
3.ª possibilidade : dois planos coincidem e o terceiro os intersecta segundo uma reta.

Neste caso, o sistema é possível e indeterminado.

Vamos fazer um exemplo no Geogebra 3D:

a)

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \\ 4x + 4y - z = 4 \end{cases}$$



Agora é com vocês, siga os passos da ficha 3 e descubra as outras possibilidades existentes.

FICHA 3 – SISTEMAS LINEARES 3x3 E POSIÇÕES DOS PLANOS NO ESPAÇO

TRABALHO DE MATEMÁTICA – 4. BIMESTRE – PROF.ª ÂNGELA – DATA : ______

NOME : _________________________________ N.: ____ TURMA : _____

1 - Represente graficamente os sistemas abaixo, usando o software Geogebra e verificando se os sistemas são possíveis ou não e quais as posições em relação aos planos no espaço :

a)

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 3 \\ 4x + 4y - 4z = 7 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 3 \\ 4x + 4y - z = 4 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \\ 4x + y + 3z = 7 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 5x + 2y + z = 2 \\ 9x + 3y + 5z = 5 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \\ 4x + 7y - z = 13 \end{cases}$$

AVALIAÇÃO

Um dos objetivos de toda avaliação é a verificação dos conhecimentos adquiridos pelo aluno, bem como a análise por parte do professor se há a necessidade de se rever alguns itens que não ficaram muito claros, não atingindo o resultado pretendido de acordo com os descritores que foram trabalhados.
O professor tem que estar sempre atento e pronto a rever sua metodologia a partir da resposta dos alunos de sua turma.
Avaliei os conhecimentos adquiridos através dos TRABALHOS EM GRUPO com consulta (com duração de 50 minutos – 1 tempo de aula além dos 50 minutos utilizados para explicações com exercícios).
Depois de uma revisão, apliquei uma avaliação escrita individual (com duração de 50 minutos – 1 tempo de aula) com a matéria abordada até o momento para investigação da capacidade de utilização dos conceitos e exercícios práticos envolvendo sistemas lineares.

As atividades que eles mais se envolveram foram as propostas nas FICHAS 2 e 3, que envolviam o uso do computador, porém, tive que dividir a turma para que todos tivessem a possibilidade de fazer as atividades no computador, pois nem todos os computadores estão em condições de uso. Em outra turma, só consegui fazer as atividades no Datashow, pois a turma é maior e não havia tempo hábil para levar vários grupos separadamente e deixar os outros sozinhos em sala.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DANTE, Luiz Roberto. MATEMATICA CONTEXTO & APLICAÇÕES, 1.ª Edição – Volume 2 – São Paulo: Editora Ática, 2011.

ROTEIROS DE AÇÃO 4 – Gráficos e sistemas – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 4.° bimestre/2012 – http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/.

SILVA, Claudio Xavier da. MATEMÁTICA AULA POR AULA, 2.ª Edição renovada – Volume 2 - São Paulo: FTD, 2005.

TEXTO BASE (SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES)
Curso Formação Continuada
Matemática - 2 Série - 4 bimestre - 1 campo conceitual
Autor(es): Flávia dos Santos Soares
Desenvolvimento Instrucional: Juliana Bezerra