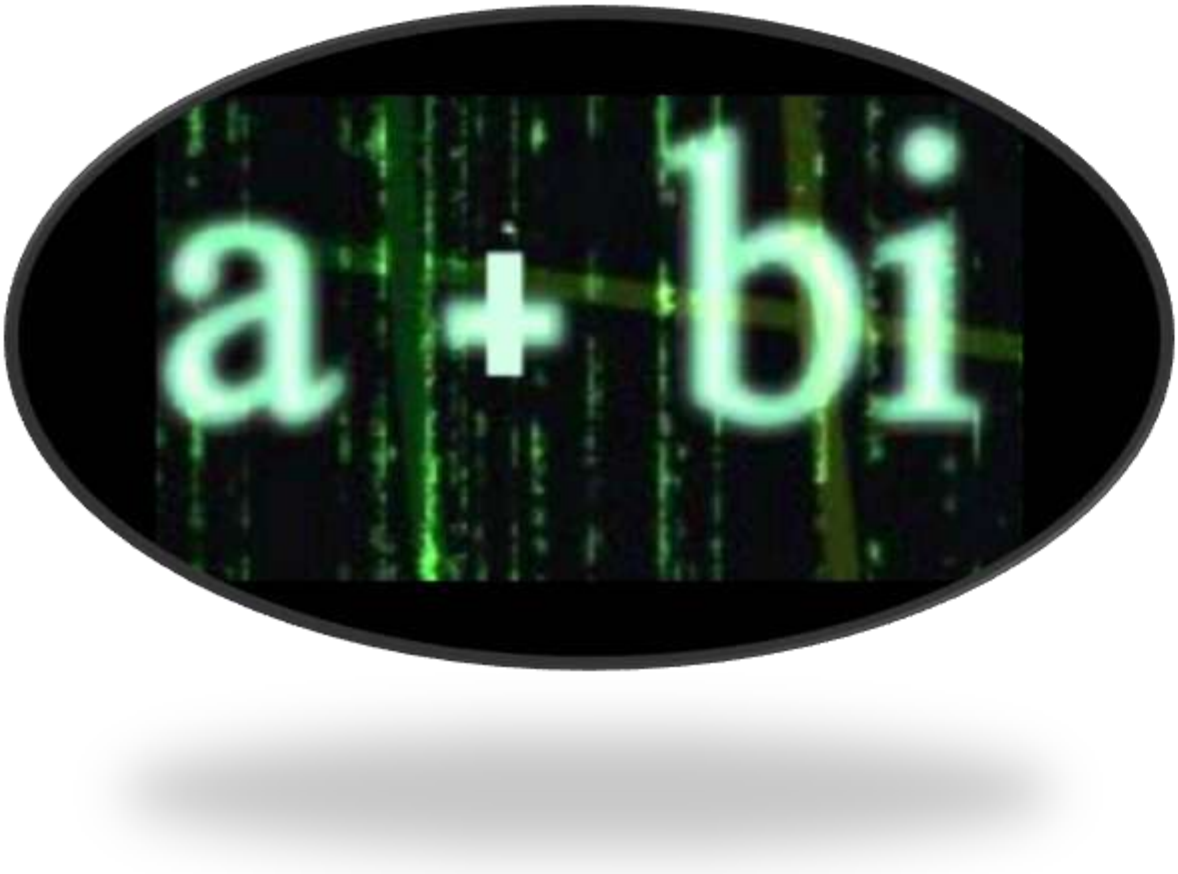
Formação Continuada em Matemática

Fundação Cecierj Consórcio Cederj
Matemática na Escola - 3º bimestre – 3º ano

Plano de Trabalho 1

Números Complexos



Tarefa 1
Cursista : Adriana Machado Perucci
Tutor: Danubia de Araujo Machado

S U M Á R I O

Introdução

“Não existem métodos fáceis para resolver problemas difíceis.
René Descartes"

Apresentamos a presente atividade como uma alternativa para viabilizar, em sala de aula, formas concretas de abordar conteúdos matemáticos a serem trabalhados no Ensino Médio de escolas de modo a incorporar ao processo de ensino-aprendizagem da matemática orientações teóricas advindas do campo da Educação e da Educação Matemática, com ênfase na utilização de recursos tecnológicos.

Uma das maiores dificuldades de nosso trabalho diário com professores é despertar nos estudantes interesse e motivação em relação aos conteúdos matemáticos a que são apresentados no dia-a-dia das aulas de matemática. A despeito de todo o esforço e dedicação com que vimos desenvolvendo nosso fazer docente, podemos constatar que, muitas vezes, os estudantes participam das aulas de matemática de forma desinteressada e alienada. Na tentativa de cumprir as exigências impostas pelas práticas pedagógicas homogeneizantes, grande parte dos estudantes, limita-se a decorar regras, fórmulas e “macetes” e a desenvolver algoritmos de forma mecanizada e rotinizada.

“É consensual a idéia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática.” PCN e o recurso da resolução de problemas têm demonstrado que o aluno aprende com mais motivação.

Este Plano de Trabalho veio trazer uma metodologia diferente daquela que esta acostumado, apenas utilizando regras, ou indo por este ou aquele caminho. A intenção é construir conceitos em conjunto, para que o aprendizado aconteça.

Objetivos

Competências e habilidades

- Identificar e conceituar a unidade imaginária.
- Identificar o conjunto dos números complexos e representar um número complexo na forma algébrica.
- Calcular expressões envolvendo as operações com números complexos na forma algébrica.
- Calcular potências de expoente inteiro da unidade imaginária.

Atividades

Habilidade relacionada:

- Identificar e conceituar a unidade imaginária.
- Identificar o conjunto dos números complexos e representar um número complexo na forma algébrica.
- Calcular expressões envolvendo as operações com números complexos na forma algébrica.
- Calcular potências de expoente inteiro da unidade imaginária.

Descritores

H36 - Efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica:

C1 - Efetuar a adição de dois ou mais números complexos na forma algébrica;
C2 - Efetuar a subtração de dois ou mais números complexos na forma algébrica;
C3 - Efetuar a multiplicação de dois ou mais números complexos na forma algébrica;
C4 - Efetuar a divisão de dois ou mais números complexos na forma algébrica.

H46 - Reconhecer números reais em diferentes contextos:

C1 - Localizar números racionais na reta numérica.
C2 - Identificar números irracionais em intervalos na reta.
C3 - Comparar e/ou ordenar números reais.

Tempo de duração:

As atividades serão realizadas em 6 tempos de aula e as atividades serão subdivididas em três etapas.

Organização da turma:

As atividades serão realizadas em grupos de 4 alunos.

Objetivos:

Apresentar os números complexos como mais uma ferramenta matemática.

Pré-requisitos:

Operações elementares com números reais; identificação de raízes de uma função a partir da sua representação gráfica; determinação das raízes de uma função a partir da sua representação algébrica; produtos notáveis.

Material necessário:

Folha de atividades, computador com Geogebra instalado e um Data show.

Desenvolvimento da 1ª etapa

Nessa atividade, você observará as imagens projetadas por seu professor. Essas imagens foram geradas num programa chamado Geogebra, que facilita o nosso trabalho, pois dando alguns comandos ele traça os gráficos. Para começar, vamos relembrar o que você já estudou há algum tempo: a determinação das raízes de uma função a partir da sua representação gráfica.

Vamos lá?

Gráfico1 no Geogebra

Observe o gráfico projetado.

1. Você lembra o nome desse gráfico? A qual função ele está associado? O que vocês poderiam dizer a respeito?.

____

____

Obs.: Espera-se que os alunos percebam que a função representada é $f(x) = x^2 - 4$.

2. O gráfico projetado é a representação gráfica de uma função do tipo $f(x) = x^2 + a$. Repare que na tela temos um controle o qual permite variar o valor de a. Indique a lei de formação da função nesse caso.

____

____

3. Esse gráfico tem interseção com o eixo X?

____

____

4. Você é capaz de indicar as raízes dessa função? Indique-as.

____

____

Para a realização do item 5, você deve posicionar o parâmetro *a* no valor -1.

5. Observe o gráfico formado quando o parâmetro *a* vale -1. E agora:
   a. O gráfico tem interseção com o eixo X? ________________________________
   b. A interseção é do mesmo tipo do gráfico anterior? _______________________
   c. Você consegue indicar as raízes dessa função? Quais são?________________

Obs.: Os alunos devem perceber que a parábola intersecta o eixo das abscissas em dois pontos, cujas abscissas (($x_1 = 2$ e $x_2 = 2$, quando $a=-4$ e $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$, quando $a=-1$) correspondem às raízes da função. Caso a turma apresente dificuldade em relação à indicação das raízes, é conveniente fazer uma revisão sobre a representação gráfica de uma função.

6. Acompanhe o movimento do gráfico quando o parâmetro é direcionado para o valor zero. O que aconte?

a. O gráfico permanece intersectando o eixo x? ___________________________

b. Como é essa interseção? ____

c. Quantas raízes essa função possuí? __________________________________

7. Observando o gráfico formado quando a = 0 :

a. Quantas são as raízes dessa função? _________________________________

b. Como é a interseção entre esse gráfico e o eixo X? ______________________

8. Agora observe o que acontece quando o parâmetro é direcionado para um valor positivo.

a. Há interseção com o eixo X? ____

b. E agora? A função possui raiz?_______________________________________

9. Observe o gráfico projetado, ele é do tipo dos gráficos estudados até agora?___

10. Esse gráfico é a representação de funções do tipo $f(x) = x^3 - ax - b$. Observe a tela e indique a função projetada. Para isso, observe os valores dos parâmetros indicados.

11. Quantas raízes reais a função associada a esse gráfico possuí? Quais são elas?____

12. Observe o que acontece quando mudamos o parâmetro a para 8.

a. Quantas interseções esse gráfico tem com o eixo X? _____________________

b. Qual é a quantidade de raízes reais da função?__________________________

13. Observe agora o gráfico formado quando $a = 3$ e $b = 2$. Nesse caso, a função possui raízes reais? Quantas?

____

____

14. Observe o que acontece quando alteramos os parâmetros a e b. Você é capaz de indicar a quantidade mínima de raízes das funções assim formadas? Troque ideias com seus colegas e registre-as a seguir.

15. Vamos agora estudar um caso específico dessas funções. Observe a representação gráfica da função $f(x) = x^3 - 15x - 4$.

a. Quantas raízes reais ela possui? ____________________________________

b. Ela tem alguma raiz positiva? _______________________________________

c. Verifique sua resposta, substituindo o valor de x na função. Você deve encontrar como resultado 0, você sabe por quê?________________________

16. Você lembra como fazemos para obter uma raiz de uma função a partir da sua fórmula? Converse com seus colegas e responda a questão.

17. Escreva uma equação que determine as raízes da função f(x) = x^3 - 15x – 4.

____

Cardano e Tartaglia, no século XVI, desenvolveram uma fórmula para resolver equações polinomiais cúbicas.

Dada a equação $x^3 = ax + b$

Uma solução podia ser obtida pela fórmula:

$$x^3 = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

18. Escreva a equação obtida no item anterior na forma das equações de Cardano e Tartaglia e indique os valores de a e b.

____

____

19. Utilizando a fórmula de Cardano-Tartaglia, indique a solução da equação obtida a partir da função f(x) = x^3 - 15x – 4.

____

____

Obs.: Espera-se que os alunos cheguem à solução: X = $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$.

Oriente-os para escreverem a solução mesmo com a presença de uma raiz quadrada negativa. Afinal, em geral, os alunos evitam os números negativos. Esteja atento para que todos alunos cheguem à solução esperada.

20. Observe que a solução encontrada possui raiz quadrada de número negativo. Isso à primeira vista pode parecer estranho, mas nesse caso essa raiz negativa não influenciará o resultado final! Para verificar isso, utilize o fato de $(\sqrt{-1})^2 = -1$ e calcule o valor de $(2+\sqrt{-1})^3$ e $(2-\sqrt{-1})^3$.

21. Agora é a sua vez. Você pode determinar o valor de $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$, utilizando o cálculo feito no item anterior. Então vamos lá?

22. Determine também o valor de $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$.

23. Utilizando os valores determinados nos itens anteriores, você saberia determinar o valor da solução obtida a partir da fórmula de Cardano-Tartaglia?

Obs.: Os alunos devem chegar a:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = \\ &= \sqrt[3]{(2+\sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{-1})^3} = \\ &= 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = \\ &= 2+2=4 \end{aligned}$$

Desenvolvimento da 2ª etapa

Operações com números complexos

Duração prevista: 100 minutos

Objetivos: Compreender e efetuar operações com números complexos em sua forma algébrica.

Pré-requisitos: Operações elementares com números reais; compreensão sobre as representações dos números complexos.

Material necessário: Computador com data-show.

Organização da classe: Pequenos grupos de dois ou três alunos cada.

Atividade 01

Soma e Subtração de Números Complexos

Nesta atividade, você terá contato com as operações de soma e subtração envolvendo números complexos. Na verdade, você descobrirá que elas muito se assemelham a outros conceitos já estudados anteriormente. Preparado?

Por exemplo, como faríamos a soma dos números complexos z = 2 e w = 4?

Uma vez que todo número real é um número complexo, tanto faz somarmos complexos que possuam apenas a parte real, apenas a parte imaginária, ou ambas.

Um cuidado deve ser tomado: a unidade imaginária i distingue a parte real da parte imaginária e, sendo cada parte de natureza distinta, não podemos simplesmente uní-las. Assim, o procedimento de soma de dois números complexos se assemelha ao de soma de expressões algébricas da forma ax + b.

Sob esta ótica, temos, por exemplo:

z = 2 + 3i; w = 5 + 2i

z + w = 2 + 3i + 5 + 2i = (2 + 5) + (3 + 2)i = 7 + 5i

1. Agora efetue as somas z + w abaixo:

a. z = 3; w = 5

b. z = 2i; w = 4

c. z = 5; w = 3i

d. z = 2 + 3i; w = 3

e. z = 3 + 5i; w = 3 + 2i

Como você pôde perceber, somar números complexos pode ser tratado de modo semelhante à soma de expressões algébricas. Na verdade, descobriremos mais à frente que a relação entre estes dois assuntos é ainda mais estreita.

Para o caso da subtração de números complexos, mantendo a relação citada acima, basta a troca de sinal da parte real e da parte imaginária, seguindo com o agrupamento e soma dos termos semelhantes como anteriormente.

Por exemplo:

$z = 5 + 2i$; $w = 2 + i$

$z - w = (5 + 2i) - (2 + i) = 5 + 2i - 2 - i = (5 - 2) + (2 - 1)i = 3 + i$

2. Agora, efetue $z - w$ nos casos abaixo:

a. $z = 6 + 3i$; $w = 2 - 4i$

b. $z = -2 + 4i$; $w = 3 - 5i$

c. $z = 3 - 5i$; $w = -2 + 4i$

Como vimos, o procedimento para soma e subtração de números complexos pode ser resumido a operar com a parte real e com a parte imaginária separadamente e, em seguida, juntar as partes para formar um novo número complexo.

As atividades que você acabou de realizar levaram em conta apenas valores inteiros para as partes real e imaginária dos números complexos. Mas os números complexos são muito mais que isso!

Na realidade, os valores podem ser quaisquer números reais e, para realizar a soma/subtração em cada caso, basta seguir o mesmo procedimento que você realizou anteriormente, só que agora com quaisquer complexos.

3. Tente agora efetuar as seguintes operações:

a. $z = 1,5 + 5,4i$; $w = -3,1 - 1,2i$. Sendo assim, determine $z + w$.

b. $z = -\pi + 5,17i$; $w = 8,9 + 3,6i$. Sendo assim, determine $w - z$.

Dica: Tente fazer usando $\pi = 3,14$. Depois, calcule usando a representação π, sem aproximações.

c. $z = 44,3 - 1,8i$; $w = 4,2 + 2,7i$; $v = -i$. Sendo assim, determine $z - w + v$.

Pronto! Agora você já é capaz de realizar somas e subtrações entre números complexos quaisquer!

Vamos adiante?

Atividade 02

Multiplicação e Divisão

Assim como fizemos na soma/subtração, podemos considerar a multiplicação e a divisão como uma operação envolvendo a forma algébrica, da mesma forma que fazemos com as expressões algébricas.

E mais: você lembra da “racionalização do denominador de uma fração”? Esse é um procedimento bastante efetuado no estudo de frações envolvendo expressões algébricas e números irracionais. Será utilizado aqui também!

1. Inicialmente, tente efetuar a operação $z * w$, com $z = 3 + 2i$ e $w = 4$.
2. Agora vamos complicar um pouco. Efetue a operação $z * w$, com $z = 2 + 4i$ e $w = 3i$. Não se esqueça que, como $i = \sqrt{-1}$, podemos considerar que $i^2 = -1$.
3. Efetue $z * w$, com $z = 2 – 3i$ e $w = 5 – i$.

A partir deste ponto, você já esta em condições de efetuar o produto entre dois complexos na forma algébrica. Mas, e a divisão?

4. Bom tente efetuar a seguinte divisão: $z : w$, com $z = 6 – 4i$ e $w = 2$.

Na divisão onde o divisor é um número real puro, basta dividir cada termo do dividendo pelo divisor. Agora efetue:

5. $z : w$, com $z = -9i$ e $w = 3i$.
6. $z : w$, com $z = 6 – 4i$ e $w = 2i$.

Para efetuar uma divisão onde o divisor possui parte imaginária, faremos uso de um artifício que você conheceu durante o estudo de números irracionais: a racionalização do denominador.

A divisão de números complexos na forma $a + bi$ pode ser vista do mesmo modo que uma divisão de números irracionais na forma de radicais. Neste caso, quem executa a tarefa de eliminar a parte imaginária é o conjugado do número complexo.

Procure efetuar a seguinte divisão, utilizando esta idéia:

7. $z : w$, com $z = 4 – 3i$ e $w = 2 + i$

Com isto você já tem condições de trabalhar com as 4 operações básicas dentro do conjunto dos números complexos.

Uma nota final ainda cabe. Quando você aprendeu sobre a potenciação, provavelmente ouviu falar nela como “multiplicar repetidas vezes”. Na verdade, você pode notar que elevar um número complexo qualquer a uma dada potência pode ser entendido como resolver um caso de Binômio de Newton.

Mas antes, você deve saber como trabalhar com as potências da unidade imaginária.

Responda a sequência abaixo:

8. Qual o valor de i^2?
9. Você pode, a partir do valor de i^2, obter o valor de i^3? Como?
10. Agora que você tem o valor de i^3, é capaz de calcular i^4? Como?
11. O que aconteceu no momento em que calculou o valor de i^4? Você consegue explicar o motivo?
12. Obtenha os valores de i^5, i^6, i^7 e i^8.

Notou algo “estranho”? Acontece que as potências de i formam uma sequência que percorre um ciclo de valores: i, -1, -i, 1. Com isto, para saber o valor de qualquer potência de i, basta verificar em que ponto da sequência a potência desejada se encontra.

Vamos verificar?

13. Calcule i^{10}.

Você já viu que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, etc. Se continuarmos com a sequencia, logo notamos que i10 deve ser igual a -1. Mas e se quiséssemos o valor de i^{135}? É necessário encontrar um modo de não precisar escrever a sequencia completa todas as vezes... E há um modo!!

Verificando os resultados das potências de i, podemos notar uma relação entre os expoentes e os valores dos resultados.

14. Você consegue visualizar qual é esta relação? Explique a seguir.

Uma dica: esta relação refere-se ao "tempo" que leva até que um valor seja repetido.

15. Encontre o valor das seguintes potências de i:

a) i^{21}

b) i^{87}

c) i^{221}

d) i^{1024}

Agora você já pode calcular potências de números complexos em geral.

16. Efetue $(2 + 3i)^2$

No caso do item 16, você pode ter optado por utilizar o produto notável "quadrado da soma".

17. Efetue:

a. $(2 + 3i)^3$

b. $(1 – i)^3$

Em a), perceba que basta multiplicar o resultado do item 16 por (2 + 3i) para obter o cubo. Já em b) você começa a ter um pouco mais de trabalho...

18. Agora, efetue $(2 – 3i)^4$.

Bem mais complicado, certo? Para este caso, você pode:

- multiplicar (2 – 3i) quatro vezes;
- fazer $(2 – 3i)^2$ e depois multiplicar por ele mesmo;
- resolver direto $(2 – 3i)^4$, via expansão do Binômio de Newton.

19. Agora que você já sabe como efetuar multiplicações, divisões e potenciações, efetue as operações solicitadas:

a) z * w, sendo que z = -1 + i; w = 3 + 5i

b) z : w, sendo que z = 5 + 4i; w = -i

c) w : z, sendo que z = 2 - 2i; w = 5 + 2i

d) z * w, sendo que z = 2 + 2i; w = 2 - 2i

e) w : z, sendo que z = 4; w = 4 + 3i

f) z^3, sendo que z = 3 – i

g) z^2, sendo que z = 4 + 2i

Desenvolvimento da 3ª etapa

Jogo dos Cartões Complexos

Duração prevista: 100 minutos

Objetivos: Que os alunos consigam realizar com autonomia as operações com números complexos.

Pré-requisitos: Operações elementares com números reais; compreensão sobre as representações dos números complexos.

Material necessário: Folha A4; papel cartão, cartolina ou papelão de caixa de supermercado; canetinha, cronômetro.

Organização da classe: Pequenos grupos de quatro alunos.

Atividade.

Cada grupo de quatro alunos faz outro subgrupo com dois a dois fazendo um contra o outro. Cada grupo dos quatro recebe 15 cartões com expressões complexas e uma folha A4 com as possíveis respostas certas e erradas. Os cartões ficam virados para baixo e cada subgrupo retira um cartão com um tempo cronometrado de 1minuto e 30 segundos para resolver a expressão e respondê-la, marcando na folha A4 a resposta encontrada. Caso o subgrupo não termine dentro do tempo ou responder a expressão errada, passa a vez para o outro subgrupo até que terminem todos os cartões da mesa. A fiscalização da resposta certa era feita pelo outro subgrupo, mas nada impedindo que o professor realize a aferição das respostas.

Avaliação

Evidente que as duas primeiras atividades auxiliarão os alunos a desenvolver a terceira etapa do plano,contudo é apenas nela que a avaliação acontecerá.

A avaliação girará em torno basicamente da última atividade onde os alunos deverão realizar com autonomia e sem a intervenção do professor as operações e expressões complexas que irão aparecer no jogo.

Referências

CURRICULO MINIMO 2012 - Curso de Aperfeiçoamento oferecido pelo CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 3º bimestre/2014 – Disponível em: < file:///C:/Users/PC/Downloads/Curriculo_Minimo.pdf >. Acesso em 17 de agosto de 2014.

MATRIZ DO SAERJINHO 2012 - Curso de Aperfeiçoamento oferecido pelo CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 3º bimestre/2014 – Disponível em:< file:///C:/Users/PC/Downloads/Matriz_do_Saerjinho.pdf >. Acesso em 17 de agosto de 2014.

ROTEIRO DE AÇÃO 1 2014 - Curso de Aperfeiçoamento oferecido pelo CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 3º bimestre/2014 – 1º Campo Conceitual – Disponível em:< http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/pluginfile.php/37874/mod_resource/content/3/MAT_3B_3SER_1C_Complexos_Roteiro1.pdf?forcedownload=1 >. Acesso em 16 de agosto de 2014.

ROTEIRO DE AÇÃO 3 2014 - Curso de Aperfeiçoamento oferecido pelo CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 3º bimestre/2014 – 1º Campo Conceitual – Disponível em: < http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/pluginfile.php/37880/mod_resource/content/3/MAT_3B_3SER_1C_Complexos_Roteiro3.pdf?forcedownload=1 >. Acesso em 16 de agosto de 2014.

MORAIS, A. D. SOUZA, C. F. - **Utilizando jogos no ensino-aprendizagem da Matemática: Os cartões Complexos.** III Encontro Regional em Educação Matemática. Disponível em: < http://www.sbemrn.com.br/site/III%20erem/relatos/doc/RE_Morais_e_Fernandes_Souza.pdf > Acesso em: 09 de agosto de 2014.