TAREFA 3

AVALIAÇÃO DA EXECUÇÃO DO PLANO DE TRABALHO 1 – POLINÔMIOS e EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Cursista: Selma Figueiredo Pontes

Matemática - 3ª série – Ensino Médio

Grupo: 5

Tutora: Andréa Silva de Lima

Pontos positivos

Temos consciência de que nem tudo que é trabalhado em sala de aula tem necessariamente uma aplicação imediata, todavia não se pode pensar num ensino em que, a cada momento, se possa visualizar sua aplicabilidade, por isso é tão importante, ressaltar a formação do ser humano em sua integralidade e não apenas nos objetivos de aprendizagem para despertar o interesse dos alunos, assim sendo, lançamos mão de recursos e estratégias para facilitar a nossa prática e tornar a aprendizagem significativa. Diante desses fatos, fica cada vez mais clara a necessidade de se desenvolver trabalhos como esse enriquecendo a relação professor/aluno/ aprendizagem e cujos pontos positivos foram: interesse e entrega dos alunos durante as atividades, principalmente a dos monitores dos grupos; o vídeo que chamou a atenção principalmente por ter sido apresentado por dois adolescente; as atividades do roteiro de ação que muito enriqueceram as minhas aulas; a interação e a troca com os colegas do curso e a Tutora; a grande aceitação e o entendimento do software Geogebra e a satisfação dos alunos em ver suas fotos no Fórum.

Pontos negativos

Alguns alunos demonstram pouco interesse e a maioria deles não apresenta a construção de certos conceitos. Recordar e explicar esses conteúdos, num espaço curto de tempo - quatro horas/aula semanais- pois os mesmos não fazem reforço escolar é bastante difícil. Por isso, fiquei com o tempo muito limitado, e tive que usar aulas dos colegas.

Alguns exercícios planejados para sala de aula foram resolvidos em casa.

Problemas técnicos nos computadores.

Não ter tido tempo de aula suficiente para usar os Roteiros de Ação disponível na Plataforma do curso.

.

Alterações

Fiz as seguintes alterações no meu Plano de Trabalho:

- Inclui o **Roteiro de Ação 2 - Algoritmos por analogia**
- Aproveitei a atividade postada no fórum, usando o **software Maxima** da colega Sandra Cristina
- Alguns exercícios organizados para sala de aula foram resolvidos em casa.

Impressões dos alunos.

Mesmo considerando as dificuldades apresentadas e entendendo que a ausência de pré-requisitos é evidente, de forma geral o conteúdo foi bem aceito e desenvolvido. As questões abordadas nos exercícios foram desenvolvidas com facilidade pela maioria dos alunos e a participação foi ativa, embora, alguns disseram que o assunto era muito difícil. O que mais chamou a atenção foi o vídeo apresentado.

A seguir, algumas fotos da participação e os comentários de alguns alunos.

* Achei muito interessante este vídeo pois mostra que os polinômios tem muita importância no nosso dia a dia e muitas pessoas acham que os polinômios não estão presentes no nosso dia a dia.

Juliana Braz

D S T Q Q S S

Graciano

Eu achei o vídeo muito legal porque mostra a forma de estudar de outras maneiras inclusive ensinando a matemática que é uma das matérias que ~~[illegible]~~ eu me complico mais, deveria passar mais vídeos sobre esse assunto

Paloma

Percebo que nesse vídeo podemos ter a certeza que a matemática pode sim ser entendida por nós adolecentes com hormônios a flor da pele.

Com certeza a matemática faz 100% de parte de nossas vidas.

pude perceber também que a amizade pode ser um grande aliado à matemática se for bem utilizada como a comunicação de que um amigo pode muito bem ajudar um outro amigo com dificuldade.

O vídeo de uma forma bem tecnológica e moderna aborda e nos explica o assunto "matemática"!

Nome: Raiza Turma: 3001

O filme foi bastante legal, explicativo, e também bastante elaborado, algumas coisas eu não entendi, ~~[illegible]~~ mas também tinha bastante coisas que eu já conhecia, também ensinha entendendo a explicação dos meninos foram bastante elaborada. O filme também foi uma forma muito legal de se aprender matemática, e também mais facil de entender.

O filme foi bastante interessante havia muitas coisa que eu sabia e muitas coisas que eu não tinha visto. Em geral o vídeo foi bem explicativo, foi uma forma bem legal de se aprender matemática, principalmente polinômios que parece ser um assunto muito confuso para muita gente. Aprendi como esses polinômios podem ter diversas aplicabilidades inclusive na arte.
As funções que eu sabia eram $f(x)x^2$ que é de grau 2, $f(x)=x^3+2$ que era de grau 3 a decomposição dos polinômios entre outras.

Marianna 3001

Sobre o vídeo de Matemática

O filme foi bastante legal, explicativo e um bom vídeo, muito dinâmico no jeito de explicar, de um jeito que se consegue entender. Foi formado um explicativo elevado, gostei bastante principalmente das formas bem elaboradas, apesar de ser um assunto confuso para mim, eu gostei muito.
Houve várias coisas que eu já conhecia, já tinha visto.

Sabrina Azevedo
3001

O vídeo é um meio de ajudar o aluno a entender os polinômios, é muito interresante, entendi mais pra menos, mas valeu assistir

Edson Luiz dos Santos Souza

Isto nós demonstra que em grande parte das coisas do nosso diá a diá é usada a matemática até mesmo em obras de arte.

DAIANA DA SILVA

Plano de trabalho: Polinômios e Equações algébricas
Cursista: Selma Figueiredo Pontes
Matemática - 3ª série – Ensino Médio
Grupo: 5
Tutora: Andréa Silva de Lima

Introdução

De grande relevância na Álgebra e importante influência na Geometria, os polinômios compõem um plano conceitual, com aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento, como a Física, Engenharia, Medicina etc.

Um dos problemas mais interessantes entre os matemáticos antigos, ao longo da história da humanidade, era o de determinar as raízes de polinômios, ou resolver equações algébricas. Desde o século XVI são conhecidas fórmulas para a determinação de soluções de equações de até quarto grau. No século IX, Alkhowarizmi apresentou importantes conclusões sobre a resolução de equações do 1º e 2º graus e somente no século XII, Bhaskara apresentou a fórmula de resolução de uma equação do 2º grau (embora ela já fosse aplicada bem antes de sua época). No século XVI, Cardano, Tartaglia e Ferrari propuseram fórmulas para resolver equações de 3º e 4º graus. Em 1824, Abel demonstrou que uma equação do 5º grau não pode ser resolvida através de radicais e cerca de cinco anos após, Galois demonstrou que a impossibilidade apontada por Abel se estendia às equações polinomiais de grau maior que quatro. Em 1798 em sua tese de doutorado, Gauss demonstrou que toda equação polinomial de grau n admite pelo menos uma raiz complexa.

Este plano de trabalho visa, portanto, estimular o aluno para que raciocine, relacionando idéias e que tenha autonomia de pensamento, por isso, é trabalhado de forma significativa, para que ele perceba sua utilidade e vivencie algumas de suas aplicabilidades destacando sua história, observando como a Matemática estuda cada novo conceito. Os polinômios e as equações algébricas são apresentados, mostrando sua história e suas propriedades são investigadas, para compreender como eles se relacionam com as operações e com a resolução de problemas algébricos.

Na maioria das vezes que é introduzido um novo assunto, os alunos apresentam dificuldades por não terem construídos previamente certos conceitos, como também, se esbarram na interpretação dos enunciados. Em se tratando de polinômios e equações algébricas, é necessário que tenham adquiridos conhecimentos em: expressões algébricas, propriedades operatórias com polinômios, equações e funções polinomiais do 1º e 2º graus, e números complexos.

DESENVOLVIMENTO

Espera-se que os alunos desenvolvam conhecimentos algébricos, como: operações com polinômios, resolução de equações polinomiais, análise de gráficos de funções polinomiais; como também, possam utilizar uma função polinomial para completar o contorno de uma imagem e compreendam o contexto histórico que envolve a teoria elementar das equações algébricas.

Para a aplicação do Plano de Trabalho, está prevista uma duração de doze horas/aula, ou seja, seiscentos minutos, aproximadamente, três semanas. E, *o*s recursos utilizados serão Computador, Data Show, Internet Banda Larga, software Geogebra,

Primeira etapa (1 aula = 50 minutos)

O objetivo para este momento é reconhecer um polinômio e seus elementos, bem como conceituá-lo em um grau qualquer, sua aplicação e introduzir as raízes de funções polinomiais.

Os alunos trabalharão individualmente.

Inicialmente será exposta uma linha histórica de como eram resolvidas algumas equações algébricas. A seguir para introduzir o conceito de funções polinomiais e suas raízes, será exibido o vídeo http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1051 que aborda como os métodos numéricos para encontrar as raízes de determinados polinômios permitem a produção artística dos fractais. Durante o vídeo, o s alunos deverão anotar os nomes das funções apresentadas para fixar os conceitos ao final da transmissão. Depois da execução será feita uma breve discussão com os alunos sobre as artes associadas aos fractais e polinômios.

Segunda etapa (2 aula = 100 minutos)

Apresentar a possibilidade de utilizar uma função polinomial para completar o contorno de uma imagem.

A turma será organizada em pequenos grupos, no laboratório de informática.

Será aplicado o material do curso, Roteiro de Ação 1 – Reconstruindo o contorno de uma imagem com uma Função Polinomial.

Também será abordada a atividade da Colega **Sandra Cristina, usando o software Maxima, disponível no Fórum Temático 3, no dia 25 de novembro de 2012, para adição e subtração de polinômios.**

Terceira etapa (3 aulas = 150 minutos)

Os descritores do currículo mínimo relacionados são:

- Identificar e determinar o grau de um polinômio.
- Calcular o valor numérico de um polinômio.
- Representar graficamente uma função polinomial.
- Efetuar operações com polinômios.

- Utilizar o teorema do resto para resolver problemas.
- Utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de polinômios.

Nesta etapa foi utilizado o **Roteiro de Ação 2 - Algoritmos por analogia, e** aula expositiva.

Estudando Polinômios

- ✓ **Introdução**

Uma empresa de telefonia possui 20 000 usuários, que pagam uma taxa básica de R$ 20,00 por mês. A empresa resolveu fazer uma promoção durante alguns meses, diminuindo R$ 0,25 do valor da taxa, a cada mês. Observou-se que, a cada desconto de R$ 0,25 na taxa, 500 novos usuários passavam a utilizar os serviços da empresa.

Exprimindo o valor mensal arrecadado pela companhia telefônica após x meses de promoção.
Após x meses, o número de usuários é: 20 000 + 500x.
O valor da taxa básica, após x meses, é de: 20 -0,25x.
O total arrecadado, em função de x, é:
$P(x) = (20\,000 + 500x) . (20 – 0,25x)$
$P(x) = 400\,000 + 10\,000 – 5\,000x – 125x^2$
$P(x) = 400\,000 + 5\,000x – 125x^2$
A expressão obtida para a arrecadação total, ao final de cada mês da promoção, é chamada de **polinômio.**

As expressões 400 000, 5 000x e 125 x^2 são chamadas de monômino.

- **Polinômios com uma variável**

Polinômio na variável x é toda expressão P(x) que pode ser apresentada sob a forma: $a_nx^n + a_{n–1}x^{n–1} + ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$

em que:

- $a_n, a_{n-1}, ... a_2, a_1, a_0$ são números complexos chamados coeficientes do polinômio.
- n é um número natural.
- o grau do polinômio é o número natural correspondente ao maior expoente de x, com coeficientes não nulo.

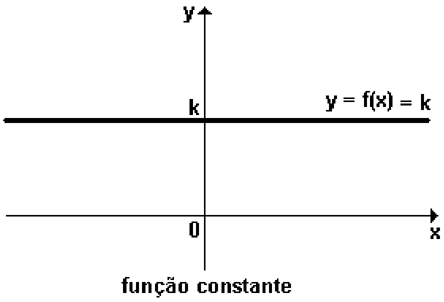
Exemplos.

- $– x^5 + x^2 + 1$, é um polinômio de grau 5.
- $X^3 - ⅔ x^2 – 8x + 1$ é um polinômio de grau 3.

- **Função polinomial**

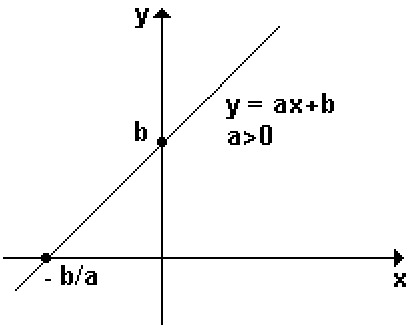
Considerando uma função F: $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que a cada $x \in \mathbb{C}$ associa o polinômio $a_nx^n + a_{n–1}x^{n–1} + ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$, isto é, $f(x) = a_nx^n + a_{n–1}x^{n–1} + ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$. A função recebe o nome de **função polinomial**.
São exemplos de funções polinomiais já conhecidas:

- F(x) = K é função constante;



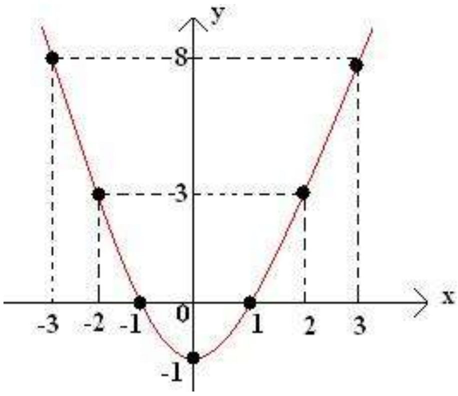
http://www.algosobre.com.br/images/stories/matematica/funcoes_12.gif

- F(x) = $a_1x + a_0$, $a_1 \neq 0$, é função do 1º grau ou afim;



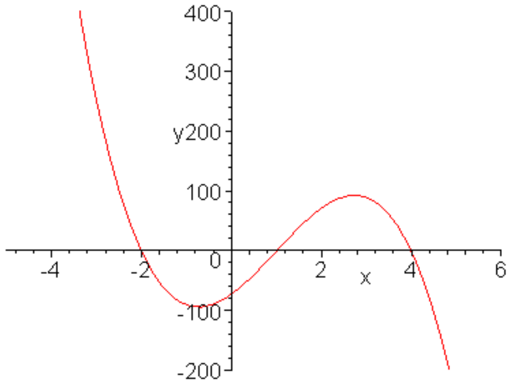
http://www.paulomarques.com.br/fig463.gif

- F(x) = $a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_2 \neq 0$, é função do 2º grau ou quadrática.



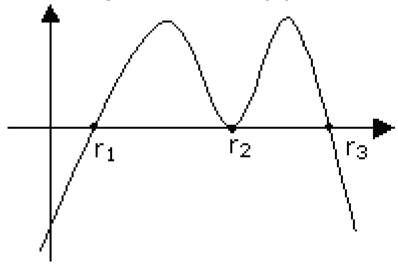
http://www.brasilescola.com/upload/e/funcao%202%20grau.JPG

O estudo de polinômio nos permite aprofundar o conceito de funções para aquelas de grau maior que 2.Observe, por exemplo, os esboço de um gráfico cartesiano da função F(x) = $-9x^3 + 27x^2 + 54x - 73$



http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/images/polex5.gif

Na análise gráfica de f(x), o zero ou raiz de f(x) equivale à abscissa r do ponto onde o gráfico de f(x) corta ou tangencia o eixo horizontal.



No gráfico ao lado r_1, r_2 e r_3 são raízes ou zeros de f(x).

- **Valor numérico**

Dado um polinômio: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ e o número complexo α, dizemos que o **valor numérico** de *P* para $x = \alpha$ é o número que obtemos quando substituímos a variável x do polinômio pelo número α; indicamos por $P(\alpha)$ (lemos: P de α)

$$P(\alpha)= a_n(\alpha)^n + a_{n-1}(\alpha)^{n-1} + \ldots + a_2(\alpha)^2 + a_1(\alpha) + a_0$$

Quando $P(x)=0$ dizemos que α é uma **raiz** ou **zero** do polinômio.

http://interna.coceducacao.com.br/ebook/content/equations/2002-61-111-48-e006.gif

Exemplos
1) Obter o valor numérico do polinômio:
$P(x) = 3x^3 + 2x^2 + x - 3$ para $x = -2$
Resolução
$P(-2) = 3(-2)^3 + 2(-2)^2 + (-2) - 3 = -24 + 8 - 2 - 3$
Assim, $P(-2) = -21$
2) Verificar se -2, é raiz de $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
Resolução
$P(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 5(-2) + 6$
$P(-2) = -8 - 8 + 10 + 6$
$P(-2) = 0 \Rightarrow -2$ é raiz de P(x)

Polinômios Idênticos

A(x) e B(x) são **idênticos** quando os valores numéricos de A(x) e de B(x) são iguais para todo $x \in C$. Indicamos: $A(x) \equiv B(x)$ (identidade)
Temos então que:

$$\boxed{A(x) \equiv B(x) \Leftrightarrow A(x) = B(x), \forall x \in C}$$

http://interna.coceducacao.com.br/ebook/content/equations/2002-71-111-49-e001.gif

- **Adição, Subtração e multiplicação de polinômios**

Exemplo
Dados os polinômios $A(x) = x^2 - 3x + 2$ e $B(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$, obter o polinômio S(x), tal que $S(x) = A(x) + B(x)$.
Resoluçã**o**
Observemos que:
$A(x) = 0x^3 + x^2 - 3x + 2$ e
$B(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$
$S(x) = (0 + 1)x^3 + (1 - 3)x^2 + (-3 + 4)x + (2 + 1)$
Assim: $S(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$
Usando o algoritmo da soma de números naturais.
$X^2 - 3x + 2$
$+ X^3 - 3x^2 + 4x + 1$
$X^3 - 2x^2 + x + 3$
Propriedades
Sendo A, B e C três polinômios quaisquer, são válidas as seguintes propriedades:
1ª) $A + B \equiv B + A$ (comutativa)
2ª) $A + (B + C) \equiv (A + B) + C$ (associativa)
3ª) $A + 0 \equiv A$ (elemento neutro)   0 indica o polinômio nulo.
4ª) $A + (-A) \equiv 0$ (elemento oposto)

Observação – A partir da quarta propriedade, podemos definir a **diferença** entre dois polinômios A – B como sendo a adição de A com o oposto de B.
$A(x) - B(x) \equiv A(x) + [-B(x)]$
Exemplo
Dados os polinômios $P_1(x) = 3x^3 - 2x - 1$ e $P_2(x) = x^4 + x^2 + 3x + 5$, obter $P_1(x) - P_2(x)$
Resolução
$P_1(x) - P_2(x) = (3x^3 - 2x - 1) - (x^4 + x^2 + 3x + 5)$
Assim:

$P_1(x) - P_2(x) = -x^4 + 3x^3 - x^2 - 5x - 6$

Multiplicação
O produto de A e B o único polinômio P, tal que $P(x) \equiv A(x) \cdot B(x)$.
Exemplo
Dados os polinômios
$A(x) = x^2 - 3x + 2$ e $B(x) = x^3 - 3x^2 + 3$, obter o polinômio P(x), tal que $P(x) \equiv A(x) \cdot B(x)$.
Resolução
$P(x) = x^2(x^3 - 3x^2 + 3) - 3x(x^3 - 3x^2 + 3) + 2(x^3 - 3x^2 + 3)$

$P(x) = x^5 – 3x^4 + 3x^2 – 3x^4 + 9x^3 – 9x + 2x^3 – 6x^2 + 6$
$P(x) = x^5 – 6x^4 + 11x^3 – 3x^2 – 9x + 6$
Propriedades
Sendo A, B e C três polinômios quaisquer, são válidas as seguintes propriedades:
1^a) $A \cdot B \equiv B \cdot A$ (comutativa)
2^a) $A \cdot (B \cdot C) \equiv (A \cdot B) \cdot C$ (associativa)
3^a) $A \cdot (B + C) \equiv A \cdot B + A \cdot C$ (distributiva)

- **Divisão de polinômio**

Dados dois polinômios, A(x) e B(x), B não-nulo, existe um único par de polinômios Q (x) e R(x) em que se verificam as condições:
1^a) $A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x)+ R(x)$
2^a) $G_R < G_B$ ou $R(x) \equiv 0$

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

http://interna.coceducacao.com.br/ebook/content/pictures/2002-71-111-49-i001.jpg

Os polinômios A e B, são chamados de **dividendo** e **divisor** e os polinômios Q e R são o **quociente** e o **resto**.

Quando $R(x) \equiv 0$, dizemos que a divisão é exata, ou que A(x) é divisível por B(x).

Método da chave
Exemplos:
Calcule o quociente Q(x) e o resto R(x) da divisão de:
a)$E(x) = 10x^2 – 43x + 40$ por $D(x) = 2x - 5$

$$\begin{array}{r|l} 10x^2-43x+40 & 2x-5 \\ \cline{2-2} -10x^2+25x & 5x-9 \\ \cline{1-1} 0x-18x+40 & \\ 18x-45 & \\ \cline{1-1} -5 & \end{array}$$

http://www.brasilescola.com/upload/e/Untitled-3(123).jpg

b)$E(x) = 12x^3 – 19x^2 + 15x – 3$ por $D(x) = 3x^2 – x + 2$

$$\begin{array}{r|l} 12x^3-19x^2+15x-3 & 3x^2-x+2 \\ \cline{2-2} -12x^3+4x^2-8x & 4x-5 \\ \cline{1-1} 0x^3-15x^2+7x-3 & \\ +15x^2-5x+10 & \\ \cline{1-1} 2x+7 & \end{array}$$

http://www.brasilescola.com/upload/e/Untitled-5(95).jpg

- **Teorema do resto**

Sendo **a** uma constante complexa qualquer, o resto da divisão de um polinômio P(x) por x – a é igual a P(a).

Demonstração
Sejam, respectivamente, Q(x) e R(x) o quociente e o resto da divisão de P(x) por x – a, ou seja:
$P(x) \equiv Q(x) \,.\, (x - a) + R(x) \quad (I)$
com gr(R) = 0 ou $R(x) \equiv 0$, podemos indicar R(x) por uma constante R.
Assim, a sentença (I) pode ser representada sob a forma:
$P(x) \equiv Q(x) \,.\, (x - a) + R$
Calculando P(a), obtemos:
$P(a) = Q(a) \,.\, (x - a) + R \Rightarrow P(a) = R$
Logo, o resto R da divisão é igual a P(a).
Exemplo

Calcular o resto da divisão de $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ por $x - 2$.
Resolução
$r = P(2) = 16 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 - 1$
Assim, r = 7

- Teorema de D´Alembert

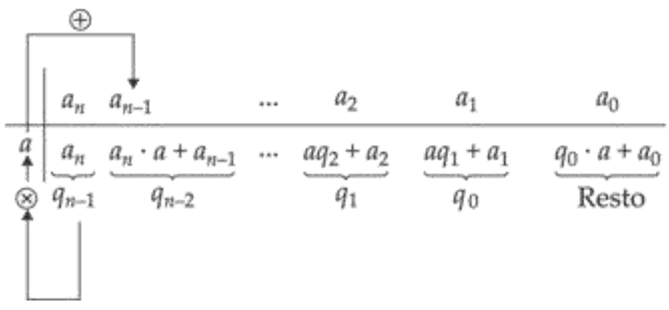
Sendo a uma constante complexa qualquer, um polinômio P(x) é divisível por x – a se, e somente se, P(a) =0.
Exemplo

Determine k para que o polinômio $P(x) = kx^3 + 2x^2 + 4x - 2$ seja divisível por (x + 3).
Resolução
Devemos ter: $P(-3) = 0$
Assim:
$k(-3)^3 + 2(-3)^2 + 4(-3) - 2 = 0$

Então k = 4/27

- **Dispositivo prático de Briot-Ruffini**

Dividindo um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...+ a_2x^2 + a_1x + a_0$ pelo binômio
(x – a), o quociente será um polinômio $Q(x)= q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} +...+ q_2x^2 + q_1x + q$; tal que: $P(x) \equiv (x - a) \cdot Q(x) + r$



http://interna.coceducacao.com.br/ebook/content/pictures/2002-71-111-50-i001.gif

Exemplo: Determinar o quociente e o resto da divisão do polinômio $P(x)=3x^3-5x^2+x-2$ por (x-2).
Resolução:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
\overbrace{2}^{\text{RAIZ DO DIVISOR}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{3 \quad -5 \quad 1 \quad\quad -2}^{\text{COEFICIENTES DE } P(x)}} \\
\hline
 & \downarrow & 3.(2)-5 & 1.(2)+1 & 3.(2)-2 \\
 & \multicolumn{3}{c|}{\underbrace{3 \qquad 1 \qquad 3}_{\text{COEFICIENTES DO QUOCIENTE } Q(x)}} & \underbrace{4}_{\text{RESTO}}
\end{array}$$

Observe que o grau de Q(x) é uma unidade inferior ao de P(x), pois o divisor é de grau 1.

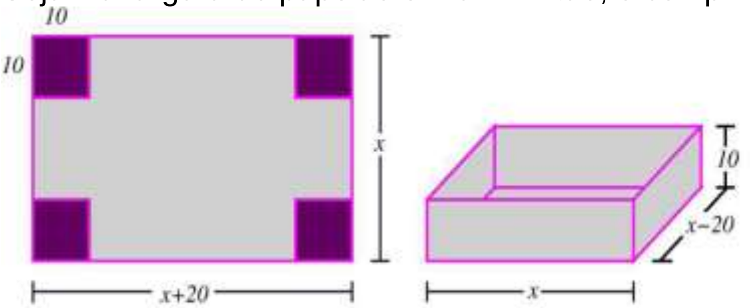
Resposta: **$Q(x)=3x^2+x+3$** e **$R(x)=4$**.

Quarta etapa (3 aulas = 150 minutos)
Os descritores do currículo mínimo relacionados são:

- Resolver equações polinomiais utilizando o Teorema Fundamental da Álgebra e o Teorema da Decomposição.
- Utilizar as Relações de Girard para resolver equações polinomiais.

Estudando equações algébricas ou polinomiais
Vejamos uma situação-problema para iniciar a abordagem de equações algébricas.
Um pedaço de papelão retangular tem o comprimento 20 cm maior do que a largura. Será construída uma caixa sem tampa, cortando 4 quadrados iguais dos vértices do papelão. Quais as dimensões do papelão para que o volume da caixa seja de 11, 25 dm3; sabendo que o lado do quadrado é de 10 cm.

Seja x a largura do papelão em cm. Então, o comprimento do papelão é x + 20.



http://www.professores.uff.br/kowada/ga/ead/ga1V1aula17.pdf

As dimensões da caixa, em centímetros, são x - 20, x e 10. Portanto, o volume da caixa, em centímetros cúbicos, é $11\ 250 = 10x(x - 20) = 10(x^2 - 20x)$.

Dividindo ambos os membros desta igualdade por 10, obtemos $1.125 = x^2 - 20x$; que é equivalente a $x^2 - 20x - 1\ 125 = 0$.
A solução deste problema é a determinação das raízes do polinômio $f(x) = x^2 - 20x - 1125$.

- **Teorema Fundamental da Álgebra**

O teorema seguinte, enunciado e provado por Carl Gauss (1777-1855), constitui um elemento central para o estudo das equações algébricas.

Todo polinômio de grau n, n≥1, admite ao menos uma raiz complexa.

- **Teorema da decomposição**

Qualquer função polinomial de grau restritamente positivo $F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, sendo $a_0 \neq 0$, poderá ser decomposta e fatorada na forma: **$F(x) = a_0 . (x - r_1) . (x - r_2) . \ldots . (x - r_n)$, onde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ são as raízes de F**.

Exemplos

Dada a equação $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$:

a) verificar que 3 é uma de suas raízes;

b) escrever esta equação na forma fatorada.

Resolução

a) Sendo $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$

$P(3) = 2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3 + 6$

$P(3) = 54 - 27 - 33 + 6 = 0$

Logo, 3 é raiz de $P(x) = 0$

Como 3 é raiz, podemos dividir P(x) por (x – 3), encontrando resto nulo.

	2	–3	–11	6
3	2	3	–2	0

Assim:

$P(x) = (x - 3)(2x^2 + 3x - 2)$

As demais raízes de $P(x) = 0$ são as raízes de $2x^2 + 3x - 2 = 0$, que são:

Então, as demais raízes da equação são $-2 \text{ e } \frac{1}{2}$.

b) A forma fatorada de P(x) é:

$$P(x) = 2(x-3)(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

- **Relações de Girard**

As relações de Girard (Albert Girard – Matemático Francês (1595-1632) são relações entre os coeficientes de uma equação algébrica e as raízes da mesma.

Analisemos essas relações para equações de 2o,e 3o graus. De modo análogo, pode ser usado para equações de grau n.

o **Para equações de 2o Grau**

Consideremos a equação: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) Supondo que x_1 e x_2 são raízes, temos: $ax^2 + bx + c \equiv a(x - x_1)(x - x_2)$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \equiv x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$$

Assim:

$$\boxed{\begin{array}{c} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ \text{e} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{array}}$$

Exemplo

Sendo x_1 e x_2 raízes de $x^2 - 7x + 8 = 0$

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{7}{1} = 7$

e

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{8}{1} = 8$

Para Equações de 3º Grau

Consideremos a equação:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ (a \neq 0)$

Supondo que x_1, x_2 e x_3 são raízes, temos:

$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv a (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \equiv x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

Assim:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a}$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$
$$x_1x_2x_3 = \frac{-d}{a}$$

Exemplos.

1)Determine o valor de ***m*** na equação *$4x^2 - 7x + 3m = 0$,* para que o produto das raízes seja igual a -2.

Solução

Nesta equação, temos: a=4, b=-7 e c=3*m.*

$P = x_1 . x_2 = -2$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{3m}{4} = -2 \Rightarrow 3m = -8 \Rightarrow -\frac{8}{3}$$

Logo, o valor de *m* é $-\frac{8}{3}$

2)Componha a equação do 2º grau cujas raízes são -2 e 7.

Solução

A soma das raízes corresponde a: $S = x_1 + x_2 = -2 + 7 = 5$

O produto das raízes corresponde a: $P = x_1 . x_2 = (-2) . 7 = -14$

A equação do 2º grau é dada por $x^2 - Sx + P = 0$, onde S=5 e P= -14.

Logo, $x^2 - 5x - 14 = 0$ é a equação procurada.

Questões propostas para aula(3 aulas = 150 minutos)

As questões vão ser resolvidas na medida em que os assuntos vão sendo abordados.

Para resolução das questões a turma será organizada em grupos de 4 alunos, com um monitor para cada grupo.

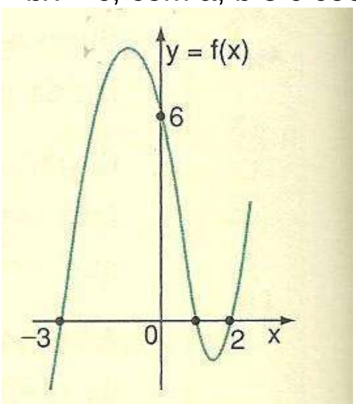
1)Determine m Є R para que o polinômio $p(x) = (m - 4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x + 4$ seja de grau 2.

2)Sendo $A(x) = 7x^5 - 2x^4 - 7x$, $B(x) = 8x^3 - 3x^2 + x - 6$ e $C(x) = x^4 - x^2 - 1$, calcular:

a)A(x) + B(x) + C(x)

b)A(x) - C(x)
c)B(x) - C(x)
d)A(x) . B(x)
3)Estudar as condições para que o polinômio $P(x) = (a – 3)\ x^2 + (b – 1)x + (c–2)$ tenha grau igual a zero.
4)Dado o polinômio $P(x) = 2x^5 - 6x^3 + x^2 – 3$, calcule P(-3).

5) Dados os polinômios $P(x) = 2x^5 – 32x^3 + 43x^2 – 40x + 20$ e $D(x)= x^2 + 4x –3$, efetuar a operação $P(x) \div D(x)$.
6) Efetuar, utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, a divisão do polinômio $P(x) = 2x^4 + 4x^3– 7x^2+12$ por $D(x) = (x – 1)$.
7)Sabendo-se que –3 é raiz de $P(x)=x^3+4x^2-ax+1$, calcular o valor de a.
8)Dê exemplos de dois polinômios de grau 4 cuja soma seja um polinômio de grau 3.
9)O gráfico abaixo representa a função polinomial f, definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = ax^3 + bx + c$, com a, b e c coeficientes reais.



a)Qual é o número de raízes não reais de f?
b)Obtenha os valores de a, b e c.
10)(Descritor 63- Saerj)As raízes -1, 2 e 5 são soluções do polinômio.

A) $p(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 5)$
B) $p(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 5)$
C) $p(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 5)$
D) $p(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 5)$
E) $p(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 5)$

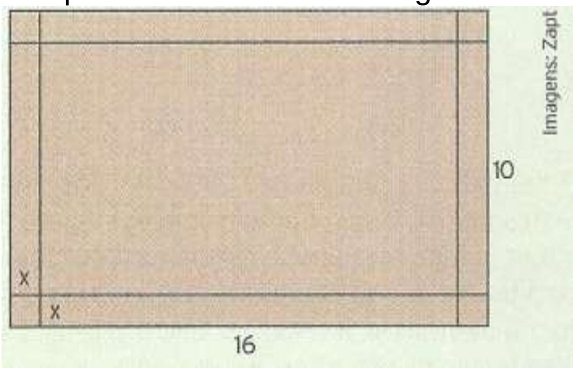
11)(Descritor 63- Saerj)O polinômio $3x^2 – 5x – 2$ pode ser decomposto em

A) $(3x + 1)\ (x – 2)$
B) $(3x – 1)\ (x + 2)$
C) $3(x + 1)\ (x – 2)$
D) $3(x – 1)\ (x + 2)$
E) $\left(x + \frac{1}{2}\right)(x – 2)$

12)Um campo retangular tem comprimento 2x – 1 e largura x + 5, em metros.
a)Indique uma expressão para o perímetro e uma para a área.
b)Calcule os zeros das funções.
c)Interprete o que significam os zeros dessas funções em relação ao campo.

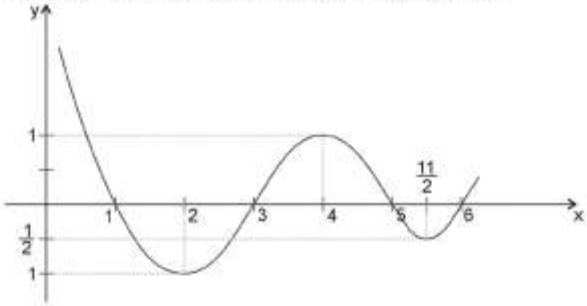
Questões propostas para casa

1)A partir da figura, invente um problema que trate de embalagens. Seu problema deve envolver gráfico e noção de volume.



2)(H50-Saerjinho)

(PAMA11244MS) Observe o gráfico de uma função y=f(x) representado abaixo.



A função acima tem um zero em

A) $x = \frac{3}{2}$

B) $x = 2$

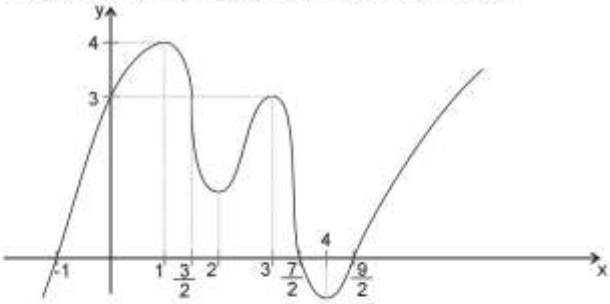
C) $x = 4$

D) $x = 5$

E) $x = \frac{11}{2}$

3)(H50-Saerjinho)

(PAMA11245MS) Observe o gráfico de uma função y=f(x) representado abaixo.



O conjunto onde essa função é crescente é

A) $\{x \in R \mid 1 < x < \frac{3}{2}\}$

B) $\{x \in R \mid \frac{3}{2} < x < 2\}$

C) $\{x \in R \mid 3 < x < \frac{7}{2}\}$

D) $\{x \in R \mid \frac{7}{2} < x < 4\}$

E) $\{x \in R \mid 4 < x < \frac{9}{2}\}$

AVALIAÇÃO

A avaliação se dará através de:

o Resolução de problemas envolvendo os conhecimentos de polinômios e equações algébricas, tais como: grau de um polinômio, valor numérico, operações, resoluções de equações, e análise de gráficos.

Descritores envolvidos do currículo mínimo e do SAERJ:

- Identificar e determinar o grau de um polinômio.
- Calcular o valor numérico de um polinômio.
- Representar graficamente uma função polinomial.
- Efetuar operações com polinômios.
- Utilizar o teorema do resto para resolver problemas.
- Resolver equações polinomiais utilizando o Teorema Fundamental da Álgebra e o Teorema da Decomposição.
- Utilizar as Relações de Girard para resolver equações polinomiais.
- (D63) Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1º grau.

o Observação do interesse, participação, assiduidade e a integração do aluno no decorrer das aulas. Durante as atividades em grupo, será escolhido um monitor, para melhor desenvolvimento dos exercícios. Também será aplicada uma atividade individual e escrita.

o Análise do domínio de conceitos e informações, bem como a participação individual e coletiva dos alunos nas discussões.

o Observação do interesse, participação, assiduidade e a integração do aluno no decorrer das aulas.

o Durante as atividades em grupo, será escolhido um monitor, para melhor desenvolvimento dos exercícios.

o Prova individual e escrita.

o Produção de textos matemáticos relativos aos conceitos abordados; e justificativa da resolução de problemas usando argumentação consistente.

o Será feito um relatório sobre as aulas, indicando pontos positivos e/ou negativos relacionados ao uso das tecnologias.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais). Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

DANTE, LUIZ ROBERTO. (2008) Matemática: Contexto e Aplicações. 3a ed. 4 vols. São Paulo: Ática.

IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. DEGENSZAJN, David. PÉRIGO, Roberto. ALMEIDA, Nilze de. Matemática: ciência e aplicações, 3: Saraiva, 6°ed. São Paulo, 2010.

LIMA, Elon Lages et al. A matemática do ensino médio. 3 ed. Rio de Janeiro:SBM, 1999.

Material de apoio pedagógico de auxílio ao currículo mínimo. Rio de Janeiro.SEEDUC/RJ.2012.Disponívelem:<http://www.conexaoprofessor.rj.gov.br/saerj.asp>Acesso em:nov.2012.

PAIVA, Manoel. (2009) Matemática - Paiva. 1a ed. 3 vols. São Paulo: Moderna.

Polinômios.Disponívelem:<http://www.matematicadidatica.com.br/Polinomios.aspx>Acesso em:nov.2012.

Polinômios.Disponívelem:<http://www.infoescola.com/matematica/>Acesso em:nov.2012.

Polinômios.Disponívelem:<http://www.mundovestibular.com.br>Acesso em:nov.2012.

Polinômios.Disponívelem:<www.brasilescola.com/matematica>Acesso em:nov.2012.

Polinômios.Disponívelem:<http://www.professores.uff.br/kowada/ga/ead/ga1V1aula17.pdf> Acesso em:nov.2012.

Polinômios.Disponívelem:<http://interna.coceducacao.com.br/ebook/pages/7682.htm> Acesso em:nov.2012.

ROTEIROS DE AÇÃO – Polinômios e equações algébricas – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CEDERJ/CECIERJ.SEEDUC/RJ.2012.

SMOLE, Kátia C. S. Matemática – 6ª Ed. São Paulo: Saraiva.2010.