# Formação Continuada em Matemática

## Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

# Função Logarítmica

## Matemática -2º ano do Ensino Médio

## Plano de trabalho - 1º Bimestre/2014

**Tarefa 1**


*Cursista: Adriana Ramos da Cunha*

*Tutor: Susi Cristine Britto Ferreira*

*Grupo: 1*

# Sumário

# INTRODUÇÃO

As funções logarítmicas possuem uma diversidade de aplicações no cotidiano ou do Universo Cientifico que relacionam grandezas que crescem ou decrescem através de taxas constantes: juros com aplicações financeiras (Matemática financeira), crescimento populacional (Geografia), decaimento radioativo (Química), na Biologia (está ligada a desenvolvimento de bactéria em culturas), entre outras inúmeras aplicações.

Os logaritmos, como são chamados, possuem o principio básico de transformar uma multiplicação em adição ou uma divisão em subtração. A ideia de John Napier foi relativamente simples: representam-se os números positivos como potências de um mesmo número. Mas somente essa definição não contribui para o sucesso da aprendizagem, o professor precisa buscar mecanismos capazes de relacionar os assuntos com o cotidiano, isto pode ser feito através de exemplos interdisciplinares.

Para auxiliar os alunos vamos revisar o cálculo de potências para possibilitar uma melhor compreensão de funções logarítmicas por parte dos alunos. No geral serão utilizados oito (8) tempos de aula para explicação e desenvolvimento das aulas e dois (2) tempos para avaliação.

# DESENVOLVIMENTO

## *ATIVIDADE 1: Revisar o conceito de potenciação e suas propriedades*

· **HABILIDADE RELACIONADA**: Reconhecer uma potência e calcular através de suas propriedades.

· **PRÉ-REQUISITO**: Potências de mesma base.

· **TEMPO DE DURAÇÃO**: 200 minutos (4 tempos).

· **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Data Show e computador

· **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual.

· **OBJETIVOS:** Revisar com os alunos o conceito de potenciação e suas propriedades.

· **METODOLOGIA ADOTADA:**

**-** Apresentar uma vídeo-aula do telecurso 2000 sobre potências para iniciar a revisão do conteúdo com os alunos

**http://www.youtube.com/watch?v=SBK76VANRvM**

- Definir o conceito de Potências:

Potência = $2^3$ Potência = $3^5$

$2 \times 2 \times 2$ = ( 03 fatores) = 8 $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ = (05 fatores) = 243

<u>Notação:</u> $2^3 = 8$, onde

2 – BASE
3 - EXPOENTE
8 - POTÊNCIA

- Apresentar as potências particulares:

1) Expoente igual a um (1) – Todo número elevado a um é igual ao próprio número.

$(1/2)^1 = 1/2$
$5^1 = 5$

2) Expoente igual à zero (0) – Todo número elevado a 0 é igual a 1.

$5^0 = 1$
$6^0 = 1$
$7^0 = 1$

*OBS: Por convenção, resolveu-se que toda número elevado ao número zero, o resultado será igual a 1.*

**- Apresentar as Propriedades de Potências**

***Divisão de potência de mesma base***

Na operação de divisão de potências de mesma base, é conservada a base comum e subtraem-se os expoentes conforme a ordem o qual eles aparecem no problema.

<u>Exemplos</u>

1) $2^4 \div 2 = 2^{4-1} = 2^3$

2) $3^5 \div 3^2 = 3^{5-2} = 3^2$

3) $4^6 \div 4^3 = 4^{6-3} = 4^3$

Temos então: $I^m \div I^n = Im-n$ , I#0

**** Produto de potência de mesma base***

Na operação de multiplicação entre potências de mesma base, é conservada a base comum e somam-se os expoentes em qualquer ordem dada no problema.

Exemplos de fixação:

1) $2^4 \times 2 = 2^{4+1} = 2^5$

2) $3^5 \times 3^2 = 3^{5+2} = 3^7$

3) $4^6 \times 4^3 = 4^{6+3} = 4^9$

Temos então: $I^m \times I^n = I^{m+n}$

* ***Potência de Potência***

Podemos elevar uma potência a outra potência. Para se efetuar este cálculo conserva-se a base comum e multiplicam-se os expoentes respectivos.

Exemplos de fixação:

1) $(2^3)^4 = 2^{12}$ , pois $= 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$

2) $(3^2)^3 = 3^6$ , pois $= 3^2 \times 3^2 \times 3^2$

3) $(4^2)^5 = 4^{10}$ , pois $= 4^2 \times 4^2 \times 4^2 \times 4^2 \times 4^2$

Temos então: $(I^n)^m = I^{nxm}$

**** Potência de um produto***

Para se efetuar esta operação de potência de um produto, podemos elevar cada fator a esta potência.

Exemplos de fixação:

1) $(b^5ya^3)^4 = b^{20}y^4a^{12}$
2) $(c^2d^2e^5)^2 = c^4d^4e^{10}$
3) $(d^3a^4)^3 = d^9a^{12}$

Temos então: $(I.T)^m = I^m \times T^m$

*** Potência com expoente negativo***

Toda e qualquer potência que tenha expoente negativo é equivalente a uma fração o qual o numerador é a unidade positiva e o denominador é a mesma potência, porém apresentando o expoente positivo.

Exemplos de fixação:

1) $2^{-4} = 1/2^4 = 1/16$

2) $3^{-3} = 1/3^3 = 1/27$

3) $4^{-2} = 1/4^2 = 1/16$

Temos então: $(I)^{-m} = 1/I^m$ I#0

**** Potência de fração***

Para se efetuar o cálculo deste tipo de fração, eleva-se o numerador e denominador, respectivamente, a esta potência.

1) $(a/b)^4 = a^4/b^4$ = b#0

2) $(a^2 /b^4)^3 = a^6/b^{12}$ = b#0

3) $(a^3 /b^2)^3 = a^9/b^6$ = b#0

Temos então: $(a/b)^m = a^m/b^m$ b #0

**** Potência de 10***

Todas as potências de **10** têm a função de facilitar o cálculo de várias expressões. Para isto guarde bem estas técnicas :

1) Para se elevar $10^n$ (N>0), basta somente escrever a quantidade de zeros da potência a direito do número 1.

Exemplos de fixação:

a) $10^4 = 10000$

b) $10^6 = 1000000$

c) $10^7 = 10000000$

2) Para se elevar 10-n (N>0), basta somente escrever a quantidade de zeros da potência a esquerda do número 1, colocando a vírgula depois do primeiro zero que se escreveu.

Exemplos de fixação:

a) 10-4 = 0,0001

b) 10-6 = 0,000001

c) 10-7 = 0,0000001

3) Decompondo números em potências de 10

Exemplos de fixação (números maiores que 1):

a) $300 = 3.100 = 3.10^2$

b) $7000 = 7.1000 = 7.10^3$

c) $10.000 = 1.10000 = 1.10^4$

Exemplos de fixação (números menores que 1):

a) $0,004 = 4.0,001 = 4.10^{-3}$

b) $0,0008 = 8.0,0001 = 8.10^{-4}$

c) $0,00009 = 9.0,00001 = 9.10^{-}5$

* ***Potência de números relativos***

a) Caso o expoente seja par o resultado dará sempre positivo.

Veja: $(+2)^2 = 4$ / / $(-2)^4 = 16$

b) Caso o expoente seja impar, o resultado trará sempre o sinal da base da potência.

Veja: $(+3)^3 = 27$ / / $(-3)^3 = -27$

Observação importante: $-2^2$ # $(-2)^2$ , pois $-2^2 = -4$ e $(-2)^2 = 4$. A diferença está que na primeira potência apenas o número 2 está elevado ao quadrado, enquanto que na segunda o sinal e o número 2 estão elevados ao quadrado, tornando o resultado, então, positivo, conforme colocado.

- Exercícios:

1) Exercícios do livro "Matemática – Paiva" adotado na escola.

2) Exercícios em Anexos.

## *ATIVIDADE 2: Identificar uma Função Logarítmica*

· **HABILIDADE RELACIONADA – H34 -** Efetuar operações utilizando as propriedades operatórias do logaritmo; **H59 -** Resolver problemas envolvendo a função logarítmica.

· **PRÉ-REQUISITO**: Cálculo de potências.

· **TEMPO DE DURAÇÃO**: 200 minutos (4 tempos).

· **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Data Show, Livro e Caderno.

· **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual.

· **OBJETIVOS:** Reconhecer uma função logarítmica e construir seu gráfico para identificação de seu crescimento e decrescimento.

· **METODOLOGIA ADOTADA:**

Iniciar a aula com a vídeo-aula apresentada nas orientações pedagógicas do Currículo Mínimo para introduzir o conceito de logaritmo (http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/10438/Logaritmo.zip?sequence=1). Comentar com os alunos e a partir daí definir logaritmo:

*** Definição de logaritmo**

$\boxed{a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b}$ sendo b>0 ,a>0 e a≠1

Na igualdade $x = \log_a b$ obtemos:

**a= base do logaritmo**

**b= logaritmando**

**x= logaritmo**

Exemplos :

1) $\log_2 32 = 5$ pois $2^5 = 32$

2) $\log_4 16 = 2$ pois $4^2 = 16$

3) $\log_5 1 = 0$ pois $5^0 = 1$

**- *Consequências da definição***

Sendo b>0 ,a>0 e a≠1 e **m** um número real qualquer, temos a seguir algumas consequências da definição de logaritmo:

$\boxed{\log_a a = 1}$ $\boxed{\log_a a^m = m}$ $\boxed{a^{\log_a b} = b}$

$\boxed{\log_a 1 = 0}$ $\boxed{\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c}$

*** Propriedades operatórias dos logaritmos**

Apresentar aos alunos a tele-aula (http://www.telecurso.org.br/matematica/) para iniciar o assunto de propriedades operatórias dos logaritmos.

**P1 - Logaritmo de um produto**

O logaritmo de um produto é igual a soma dos logaritmos dos fatores, ou seja: $\mathbf{\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c}$

**Exemplo:** log20 =log(2.10) = log2 + log10 = 0,3010 + 1 = 1,3010. Observe que como a base não foi especificada, sabemos que ela é igual a 10.

**P2 - Logaritmo de um quociente**

O logaritmo de uma fração ordinária é igual a diferença entre os logaritmos do numerador da fração e do denominador, ou seja: $\mathbf{\log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c}$.

**Exemplo:** log0,02 = log(2/100) = log2 - log100 = 0,3010 - 2,0000 = -1,6990. Do exposto anteriormente, podemos concluir que, sendo log0,02 = -1,6990 então $10^{-1,6990}$ =

0,02. Da mesma forma podemos exemplificar: $\log 5 = \log(10/2) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,3010 = 0,6990$.

**P3 - Logaritmo de uma potência**

Temos a seguinte fórmula, facilmente demonstrável: $\mathbf{\log_a b^k = k.\log_a b}$.
Exemplo: $\log_5 25^6 = 6.\log_5 25 = 6.2 = 12$.

**P3.1 -** Temos a seguinte fórmula: $\mathbf{\log_a k\ b} = \mathbf{1/k.\log_a b}$

Exemplo: $\log_{16} 4 = \log_{4^2} 4 = (½).\log_4 4 = ½$.

**P4 - Mudança de base:**

Às vezes, para a solução de problemas, temos necessidade de mudar a base de um sistema de logaritmos, ou seja, conhecemos o logaritmo de N na base b e desejamos obter o logaritmo de N numa base a . Esta mudança de base, muito importante na solução de exercícios, poderá ser feita de acordo com a fórmula a seguir, cuja demonstração não apresenta dificuldades, aplicando-se os conhecimentos aqui expostos.

$\mathbf{Log_a\ b = \log_c b/\log_c a}$

**Exemplos:**

a) $\log_4 16 = \log_2 16 / \log_2 4$ (2 = 4:2)

b) $\log_8 64 = \log_2 64 / \log_2 8$ (2 = 6:3)

c) $\log_{25} 125 = \log_5 125 / \log_5 25 = 3 / 2 = 1,5$. Temos então que $25^{1,5} = 125$.

**- Função Logarítmica**

- Definir Função Logarítmica como sendo toda função definida pela lei de formação $f(x) = \log_a x$, com $a \neq 1$ e $a > 0$. Nesse tipo de função o domínio é representado pelo conjunto dos números reais maiores que zero e o contradomínio, o conjunto dos reais.

Exemplos de funções logarítmicas:

***$f(x) = log_2x$***

***$f(x) = log_3x$***

***$f(x) = log_{1/2}x$***

***$f(x) = log_{10}x$***

***$f(x) = log_{1/3}x$***

***$f(x) = log_4x$***

***$f(x) = log_2(x – 1)$***

***$f(x) = log_{0,5}x$***

***- Determinando o domínio da função logarítmica***

Dada a função f(x) = $_{(x – 2)}(4 – x)$, temos as seguintes restrições:

1) $4 – x > 0 \rightarrow – x > – 4 \rightarrow x < 4$

2) $x – 2 > 0 \rightarrow x > 2$

3) $x – 2 \neq 1 \rightarrow x \neq 1+2 \rightarrow x \neq 3$

Realizando a intersecção das restrições 1, 2 e 3, temos o seguinte resultado: ***2 < x < 3 e 3 < x < 4***.

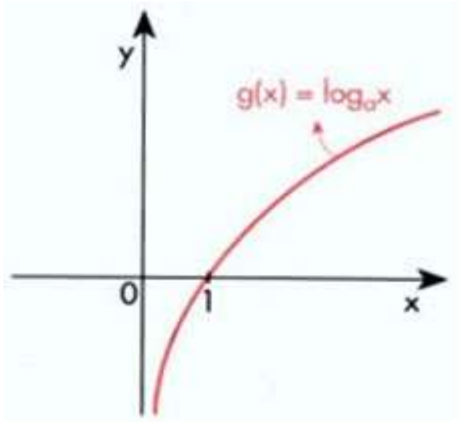
Dessa forma, ***D = {x ? R / 2 < x < 3 e 3 < x < 4}***

***- Gráfico de uma função logarítmica***

Para a construção do gráfico da função logarítmica devemos estar atentos a duas situações:

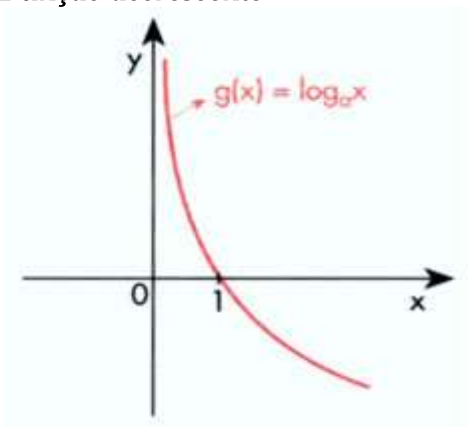
Para $\boxed{a > 1}$, temos o gráfico da seguinte forma:

***Função crescente***




Para $\boxed{0 < a < 1}$, temos o gráfico da seguinte forma:

***Função decrescente***



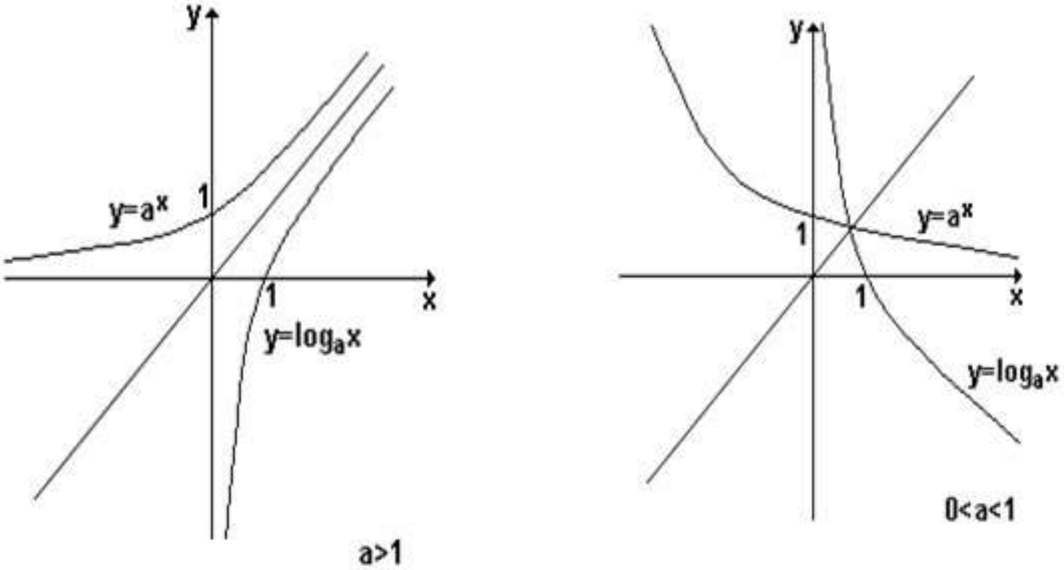

***- Características do gráfico da função logarítmica y = log$_a$x***

- O gráfico está totalmente à direita do eixo y, pois ela é definida para x > 0.

- Intersecta o eixo das abscissas no ponto (1,0), então a raiz da função é x = 1.

- Note que y assume todos as soluções reais, por isso dizemos que a Im(imagem) = R.

Através dos estudos das funções logarítmicas, chegamos à conclusão de que ela é uma função inversa da exponencial. Observe o gráfico comparativo a seguir:




Podemos notar que (x,y) está no gráfico da função logarítmica se o seu inverso (y,x) está na função exponencial de mesma base.

# AVALIAÇÃO

A avaliação é um procedimento necessário para definir prioridades e garantir a qualidade do ensino. Desenvolver metodologias a partir da participação dos alunos, da análise das anotações de aula, será feita com a entrega dos exercícios, onde será possível avaliar aspectos como: habilidades para identificar, calcular e interpretar as funções e logarítmicas.

Outra forma de avaliação é a  escrita, que será individual e terá a duração de 100 minutos, apenas ao final do bimestre, onde os alunos mostrarão a capacidade de aplicar, em situações problemas, os conceitos vistos durante as atividades em sala de aula.

Também serão avaliadas as questões referentes ao assunto que constarem nos Saerjinhos passados que é uma das avaliações bimestrais dos alunos adotada pela escola.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ROTEIROS DE AÇÃO – Funções Logarítmicas – curso de aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 1º Bimestre/2013.

PAIVA, MANOEL – Matemática - 1º ano – 2ª edição – São Paulo: Moderna plus – 2010.

BUCCHI, PAULO – Matemática, volume único – 1ª edição - São Paulo: Editora Moderna – 1996.

DANTE, LUIZ ROBERTO – Matemática contextos e aplicações – 1ª edição – São Paulo: Editora Ática – 2011.

NOVO TELECURSO - Matemática - Potênciação ou Operação com Potência

http://www.youtube.com/watch?v=SBK76VANRvM

MATEMÁTICA - Função Logaritmicas

http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/10438/Logaritmo.zip?sequence=1

NOVO TELECURSO - Matemática - Operações com Logaritmos:

http://www.telecurso.org.br/matematica/

**Anexo 1**

## Exercícios de aprofundamento – Potências

1 -Escreve sobre a forma de potência:

a. $5 \times 5 \times 5 =$

b. $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 =$

c. $10 \times 10 =$

d. $0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 =$

e. $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{\quad}{\quad}\right)$

2 - Escreve na forma de um produto:

a. $4^3 =$

a. $4^3 =$

b. $(0{,}5)^3 =$

3 – Calcule

a. $2^4 =$

b. $1^5 =$

c. $0^4 =$

d. $(1/6)^2 =$

e. $10^5 =$

4 - Completa com um dos símbolos > , < ou =, de modo a obteres afirmações verdadeiras:

a. $14^3 \quad 14^2$

b. $2^7 \quad 3^7$

c. $4^2 \quad 2^4$

d. $5^2 \quad 2^5$

e. $7^2 \quad 14$

f. $1^{20} \quad 1^3$

g. $0 \quad 0^6$

h. $(0{,}3)^2 \quad 0{,}9$

5 - Escreve sob a forma de uma

potência:

a. $10^5 \times 10^3 =$

b. $16^4 \times 16 =$

c. $0{,}4^5 \times 0{,}4^3 =$

d. $7^n \times 7^p =$ , sendo ***n*** e ***p*** números naturais.

e. $2^4 \times 8 =$

6 - Escreve sob a forma de uma

potência:

a. $2^7 \times 3^7 =$

b. $0{,}1^3 \times 5^3 =$

c. $10^4 \times 0{,}2^4 =$

**Anexo 2**

## Exercícios de aprofundamento - Função Logarítmica

**01.** (U. E. LONDRINA) Supondo que exista, o logaritmo de a na base b é:

a) o número ao qual se eleva a para se obter b.
b) o número ao qual se eleva b para se obter a.
c) a potência de base b e expoente a.
d) a potência de base a e expoente b.
e) a potência de base 10 e expoente a.

**02.** (PUC) Assinale a propriedade válida sempre:

a) log (a . b) = log a . log b
b) log (a + b) = log a + log b
c) log m . a = m . log a
d) log $a^m$ = log m . a
e) log $a^m$ = m . log a
(Supor válidas as condições de existências dos logaritmos)

**03.** (CESGRANRIO) Se log10123 = 2,09, o valor de log101,23 é:

a) 0,0209
b) 0,09
c) 0,209
d) 1,09
e) 1,209

**04.** Os valores de x que satisfazem log x + log (x - 5) = log 36 são:

a) 9 e -4
b) 9 e 4
c) -4
d) 9
e) 5 e -4

**05.** (UERJ) Em uma calculadora científica de 12 dígitos quando se aperta a tecla log, aparece no visor o logaritmo decimal do número que estava no visor. Se a operação não for possível, aparece no visor a palavra ERRO.

Depois de digitar 42 bilhões, o número de vezes que se deve apertar a tecla log para que, no visor, apareça ERRO pela primeira vez é:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

**06.** Se S é a soma das raízes da equação $\log^2 x$ - logx - 2 = 0, então calcule o valor de 1073 - 10S.

**07.** UFBA - Considere a equação $10^{x + 0,4658}$ = 368. Sabendo-se que log 3,68 = 0,5658 , calcule 10x.

**08.** Calcule o valor de y = $6^x$ onde x = $\log_3 6 . \log_6 5$