FORMAÇÃO CONTINUADA

POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

ANA CRISTINA DA SILVA FERREIRA

FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO ESTADUAL PADRE MANUEL DA NÓBREGA
PROFESSORA ANA CRISTINA DA SILVA FERREIRA
MATRÍCULA: 827293.2
SÉRIE: 3º ANO DO ENSINO MÉDIO
TUTORA: DANÚBIA

SUMÁRIO

FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO ESTADUAL PADRE MANUEL DA NÓBREGA
PROFESSORA ANA CRISTINA DA SILVA FERREIRA
MATRÍCULA: 827293.2
SÉRIE: 3º ANO DO ENSINO MÉDIO
TUTORA: DANÚBIA

PLANO DE TRABALHO SOBRE POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

(Ana Cristina da Silva Ferreira)
(cristinabicho@hotmail.com)

I- Introdução

Iniciaremos o estudo de polinômios e equações algébricas revisando regra de sinais, redução de termos semelhantes, multiplicação e divisão de potências de mesma base, entre outros assuntos pertinentes ao conteúdo.

Utilizaremos o vídeo: **http://m3.ime.unicamp.br/** para introdução do conteúdo: polinômios e suas raízes.

Serão incluídos desafios que questionem e ampliem o conhecimento da turma.

Ao desenvolver ideias acerca dos conteúdos estudados, os alunos trabalharão com rascunhos, que lhes permite revisar suas produções, assim como desenvolver a oportunidade de aprimorar seus textos através de revisões individuais e coletivas.

Utilizaremos como suporte, além do livro didático, trabalhos em grupo, pesquisas, ferramentas tecnológicas e outros recursos de forma a tornar a aprendizagem mais significativa.

II- Desenvolvimento

<u>Roteiro de Ação 1</u>

Apresentação do vídeo: Arte e Matemática **http://m3.ime.unicamp.br/**

Mídia: Vídeo (cerca de 10 minutos)

Sinopse

Dois amigos conversam sobre uma exposição artística de fractais e conversam sobre funções polinomiais, suas raízes e de como os métodos numéricos para encontrar as raízes de determinados polinômios permitem a produção artística dos fractais.

Polinômios

Duração da Aula: 100 minutos

Área de Conhecimento: Propriedades das Potências

Objetivos: – Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1°grau.

Pré-requisitos: Redução de Termos Semelhantes
Propriedades das Potências

Material didático: • Notebook do professor acompanhado de projetor multimídia.
• Aplicação de dinâmicas de grupo

Organização da classe: Em grupos para troca de conhecimentos e ideias.

Descritores associados:

H63 – Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1º grau

Habilidades:

-Utilizar situações-problema para introduzir polinômios

Dando início ao nosso trabalho, abordaremos o conteúdo revisando regra de sinais, redução de termos semelhantes, multiplicação e divisão de potências de mesma base.
Revisão de propriedades de potenciação.

1) $\boldsymbol{a^m * a^n = a^{m+n}}$

Multiplicação de potências de mesma base: conserva a base e soma os expoentes.

2) $\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}}$

Divisão de potências de mesma base: conserva a base e subtrai os expoentes.

3) $\mathbf{(a^m)^n = a^{m*n}}$

Potência de potência, multiplicar os expoentes.

4) $\sqrt[n]{\boldsymbol{a^m}} = \boldsymbol{a^{\frac{m}{n}}}, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N} / \boldsymbol{n} > 1$

Potência com expoente racional: o expoente do radicando se transforma no numerador do expoente da base fora da raiz, e o índice da raiz passa a ser o denominador.

5) $\mathbf{a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0}$

Potência com expoente negativo: inverso da base elevado ao expoente positivo.

6) $\mathbf{a^0 = 1}$

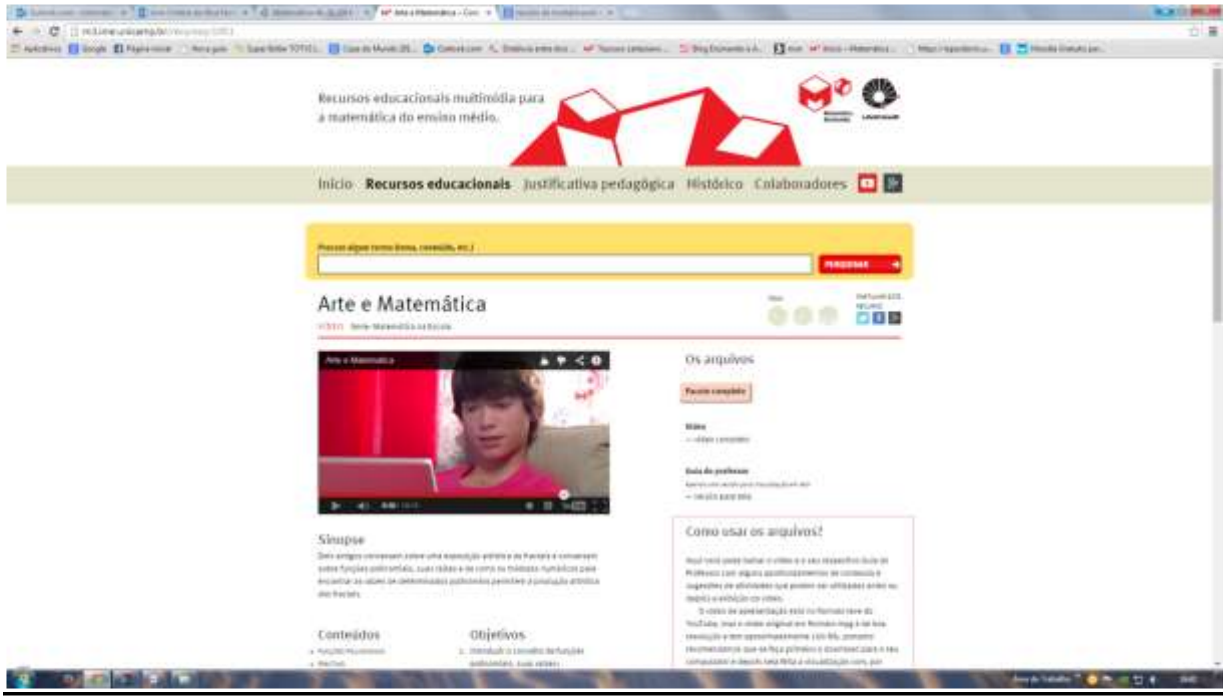
Toda base diferente de zero elevado ao expoente zero é igual a 1.

Em seguida inicio o conteúdo abordando sua utilização no cotidiano, onde pode ser aplicado, em que tipo de profissões (principalmente dentro da economia) ressaltando a importância do seu uso na Física quando descrevemos a trajetória de um projétil.

Para fixar melhor, utilizaremos o vídeo: “Arte e Matemática”, que se encontra acessível em:

http://m3.ime.unicamp.br/

Além de trabalhar polinômios, o vídeo também aborda as raízes dos polinômios.



Logo após o vídeo, faremos uma conversa informal sobre o mesmo, relembrando a forma algébrica e gráfica das funções e suas raízes.

Roteiro de Ação 2: História dos Polinômios

Duração: 150 minutos

Área de Conhecimento: Polinômios

Objetivo: Estudar a Linguagem Matemática e os Polinômios na vida cotidiana.
Utilizar o teorema do resto para resolver problemas.

Pré- requisitos: Operações de adição, subtração e multiplicação de números reais

Conteúdo: Polinômios

Material didático:

- Fórum de discussões;
- Resolução de problemas;
- Aplicação de dinâmicas de grupo

Recursos de apoio:
Laboratório de Informática

Organização da classe: Em duplas para troca de conhecimentos e ideias.

Descritores associados:
H36 - Efetuar cálculo envolvendo operações com polinômios na forma algébrica.

Habilidades:
-Utilizar situações-problema para introduzir os conceitos de polinômios

Origem e importância dos polinômios

O cálculo de equações polinomiais e algumas equações algébricas era um dos grandes desafios da chamada álgebra clássica. Os primeiros registros e conclusões sobre as relações existentes nas equações de primeiro e segundo graus foram apresentados por Al-Khowarizmi , foi ele quem apresentou em suas obras o significado da palavra álgebra, que é “trocar os membros” no termo de uma equação.

Quase meiomilênio depois foram aparecendo inúmeros matemáticos como Girolamo Cardano, Niccolo Tartaglia e Ludovico Ferrari que iniciaram estudos sobre equações de terceiro e quarto graus. Alguns matemáticos se destacaram por grandes demonstrações que ajudaram e são de extrema importância até hoje como Nuls Henrik Abel (Norueguês), Carl Friedrich Gauss (Alemão) e o Francês Evarist Galois. Cada passo realizado para o aperfeiçoamento de equações polinomiais de grau n, com n pertencendo ao conjunto dos números naturais, foi e é sempre de muita utilidade. Para encontrarmos o valor numérico de um **polinômio** p(x), sempre foram utilizados métodos de operações usuais (adição, subtração, multiplicação e divisão) conhecendo ou não uma das raízes da equação polinomial. Na soma e subtração dos polinômios basta adicionarmos ou subtrairmos os termos de mesmo grau. Na divisão de polinômios podemos observar vários métodos .

Seja p(x) e d(x), não nulos onde o grau de p(x) seja maior ou igual ao de d(x), encontraremos da divisão de p(x) por d(x) os polinômios q(x) e r(x) satisfazendo as seguintes condições:

- P(x) = d(x).q(x) + r(x)
- R(x) = 0 ou gr(r) menor que gr(d)

p(x) = dividendo

d(x) = divisor

q(x) = quociente

r(x) = resto

Para a divisão ser exata r(x) , deve ser nulo. Outros importantes métodos e teoremas ajudam a realização da operação com os polinômios como o método da chave, método de Descartes, o teorema do resto, o de D’Alembert e o Algorítimo de Briot-Ruffini que é o método mais rápido da divisão de um polinômio por um binômio.

A Divisão de polinômio é uma das mais importantes ferramentas de calculo já desenvolvidas. Usado muito para o calculo de limites, diminuição de grau da equação ,etc.

A origem e as aplicações das equações polinomiais quanto as suas técnicas de desenvolvimento surgiram sempre pela necessidade de se ter resultados mais precisos em cálculos.

O Teorema fundamental da Álgebra diz que toda equação de grau n, com n maior que 1 ou n igual a 1, possui pelo menos uma raiz complexa, foi concebido através dos estudos referentes a equações polinomiais.

Após a pesquisa da história dos polinômios e suas aplicações, conversaremos sobre a importância dos mesmos e o conteúdo propriamente dito:

DEFINIÇÃO:

Uma **função polinomial** ou simplesmente **polinômio**, é toda função definida pela relação $P(x)=a_nx^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Onde:

$\mathbf{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0}$ são números reais chamados coeficientes.

$\mathbf{n} \in IN$

$\mathbf{x} \in C$ (n^{os} complexos) é a variável.

GRAU DE UM POLINÔMIO:

Grau de um polinômio é o expoente máximo que ele possui. Se o coeficiente $a_n \neq 0$, então o expoente máximon é dito grau do polinômio e indicamos *gr(P)=n*.

Exemplos:

a) $P(x)=5$ ou $P(x)=5.x^0$ é um polinômio constante, ou seja, *gr(P)=0*.

b) $P(x)=3x+5$ é um polinômio do 1º grau, isto é, *gr(P)=1*.

c) $P(x)=4x^5+7x^4$ é um polinômio do 5º grau, ou seja, *gr(P)=5*.

Obs: Se $P(x)=0$, não se define o grau do polinômio.

VALOR NUMÉRICO

O valor numérico de um polinômio P(x) para x=a, é o número que se obtém substituindo x por a e efetuando todas as operações indicadas pela relação que define o polinômio. Exemplo:

Se $P(x)=x^3+2x^2+x-4$, o valor numérico de P(x), para x=2, é:

$P(x)= x^3+2x^2+x-4$

$P(2)= 2^3+2.2^2+2-4$

$P(2)= 14$

Observação: Se P(a)=0, o número a chamado raiz ou zero de P(x).

Por exemplo, no polinômio $P(x)=x^2-3x+2$ temos P(1)=0; logo, 1 é raiz ou zero desse polinômio.

<u>Alguns exercícios resolvidos</u>:

1º) Sabendo-se que –3 é raiz de $P(x)=x^3+4x^2-ax+1$, calcular o valor de a.

Resolução: Se –3 é raiz de P(x), então P(-3)=0.

$P(-3)=0 \Rightarrow (-3)^3+4(-3)^2-a.(-3)+1 = 0$

$3a = -10 \Rightarrow a=-10/3$

Resposta: **a = -10/3**

2º) Calcular m $\in$ IR para que o polinômio

$P(x)=(m^2-1)x^3+(m+1)x^2-x+4$ seja:

a) do 3ºgrau b) do 2º grau c) do 1º grau

Resposta:

a) para o polinômio ser do 3º grau, os coeficientes de x^2 e x^3 devem ser diferentes de zero. Então:

$m^2-1\neq0 \Rightarrow m^2\neq1 \Rightarrow m\neq1$

$m+1\neq0 \Rightarrow m\neq-1$

Portanto, o polinômio é do 3º grau se **m≠1** e **m≠-1**.

b) para o polinômio ser do 2º grau, o coeficiente de x^3 deve ser igual a zero e o coeficiente de x^2 diferente de zero. Então:

$m^2-1=0 \Rightarrow m^2=1 \Rightarrow m=\pm1$

$m+1\neq0 \Rightarrow m\neq-1$

Portanto, o polinômio é do 2º grau se **m=1**.

c) para o polinômio ser do 1º grau, os coeficientes de x^2 e x^3 devem ser iguais a zero. Então:

$m^2-1=0$ => $m^2=1$ => $m=\pm1$

$m+1=0$ => $m=-1$

Portanto, o polinômio é do 1º grau se **m=-1**.

3º) Num polinômio P(x), do 3º grau, o coeficiente de x^3 é 1. Se P(1)=P(2)=0 e P(3)=30, calcule o valor de P(-1).

Resolução:

Temos o polinômio: $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$.

Precisamos encontrar os valores de a,b e c (coeficientes).

Vamos utilizar os dados fornecidos pelo enunciado do problema:

$P(1)=0$ => $(1)^3+a.(1)^2+b(1)+c = 0$ => $1+a+b+c=0$ => $\mathbf{a+b+c=-1}$

$P(2)=0$ => $(2)^3+a.(2)^2+b(2)+c = 0$ => $8+4a+2b+c=0$ => $\mathbf{4a+2b+c=-8}$

$P(3)=30$ => $(3)^3+a.(3)^2+b(3)+c = 30$ => $27+9a+3b+c=30$ => $\mathbf{9a+3b+c=3}$

Temos um sistema de três variáveis:

$$\begin{cases} a+b+c=-1 \\ 4a+2b+c=-8 \\ 9a+3b+c=3 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema encontramos as soluções:

a=9, b=-34, c=24

Portanto o polinômio em questão é $P(x)= x^3+9x^2-34x+24$.

O problema pede P(-1):

$P(-1)= (-1)^3+9(-1)^2-34(-1)+24$ => $P(-1)=-1+9+34+24$

P(-1)= 66

Resposta: P(-1)= 66

DIVISÃO DE POLINÔMIOS

Sejam dois polinômios P(x) e D(x), com D(x) não nulo.

Efetuar a divisão de P por D é determinar dois polinômios Q(x) e R(x), que satisfaçam as duas condições abaixo:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & D(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

1ª) Q(x).D(x) + R(x) = P(x)

2ª) gr(R) < gr(D) ou R(x)=0

Nessa divisão:
P(x) é o dividendo.
D(x) é o divisor.
Q(x) é o quociente.
R(x) é o resto da divisão.
Obs: Quando temos R(x)=0 dizemos que a divisão é exata, ou seja, P(x) é divisível por D(x) ou D(x) é divisor de P(x).

Se D(x) é divisor de P(x) $\Leftrightarrow$ R(x)=0

Exemplo:
Determinar o quociente de P(x)=$x^4+x^3-7x^2+9x-1$ por D(x)=x^2+3x-2.
Resolução: Aplicando o método da chave, temos:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+x^3-7x^2+9x-1 & x^2+3x-2 \\
\hline
\underline{-x^4-3x^3+2x^2} & x^2-2x+1 \;\rightarrow\; Q(x) \\
\quad -2x^3-5x^2+9x-1 & \\
\quad \underline{+2x^3+6x^2-4x} & \\
\qquad\quad x^2+5x-1 & \\
\qquad\quad \underline{-x^2-3x+2} & \\
\qquad\qquad 2x+1 \;\rightarrow\; R(x) &
\end{array}
$$

Verificamos que:

$$\underbrace{x^4+x^3-7x^2+9x-1}_{P(x)} \equiv \underbrace{(x^2+3x-2)}_{D(x)}\underbrace{(x^2-2x+1)}_{Q(x)}+\underbrace{(2x+1)}_{R(x)}$$

Divisão de um polinômio por um binômio da forma ax+b

Vamos calcular o resto da divisão de P(x)=$4x^2-2x+3$ por D(x)=2x-1.

$$
\begin{array}{l|l}
4x^2-2x+3 & 2x-1 \\
\hline
\underline{-4x^2+2x} & 2x \\
\qquad\quad 3 &
\end{array}
$$

Utilizando o método da chave temos:
Logo: R(x)=3
A raiz do divisor é 2x-1=0 => x=1/2.
Agora calculamos P(x) para x=1/2.

$P(1/2) = 4(1/4) – 2(1/2) + 3$
$P(1/2) = 3$

Observe que $R(x) = 3 = P(1/2)$
Portanto, mostramos que o resto da divisão de P(x) por D(x) é igual ao valor numérico de P(x) para x=1/2, isto é, a raiz do divisor.

TEOREMA DO RESTO

O resto da divisão de um polinômio P(x) pelo binômio *ax+b* é igual a **P(-b/a)**.

Note que **–b/a** é a raiz do divisor.

Exemplo: Calcule o resto da divisão de x^2+5x-1 por x+1.

Resolução: Achamos a raiz do divisor:

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

Pelo teorema do resto sabemos que o resto é igual a P(-1):

$P(-1)=(-1)^2+5.(-1)-1 \Rightarrow P(-1) = -5 = R(x)$

Resposta: **R(x) = -5**.

TEOREMA D'ALEMBERT

Um polinômio P(x) é divisível pelo binômio *ax+b* se **P(-b/a)=0**

Exemplo: Determinar o valor de p, para que o polinômio $P(x)=2x^3+5x^2-px+2$ seja divisível por x-2. *Resolução:* Se P(x) é divisível por x-2, então P(2)=0.

$P(2)=0 \Rightarrow 2.8+5.4-2p+2=0 \Rightarrow 16+20-2p+2=0 \Rightarrow p=19$

Resposta: **p=19**.

Divisão de um polinômio pelo produto (x-a)(x-b)

Vamos resolver o seguinte problema: calcular o resto da divisão do polinômio P(x) pelo produto *(x-a)(x-b)*, sabendo-se que os restos da divisão de P(x) por *(x-a)* e por *(x-b)* são, respectivamente, r_1 e r_2.

Temos:

a é a raiz do divisor *x-a*, portanto $\mathbf{P(a)=r_1}$ (eq. 1)

b é a raiz do divisor *x-b*, portanto $\mathbf{P(b)=r_2}$ (eq. 2)

E para o divisor *(x-a)(x-b)* temos **P(x)=(*x-a*)(*x-b*) Q(x) + R(x)** (eq. 3)

O resto da divisão de P(x) por *(x-a)(x-b)* é no máximo do 1º grau, pois o divisor é do 2º grau; logo:

R(x)=cx+d

Da eq.3 vem:

P(x)=(*x*-*a*)(*x*-*b*) Q(x) + cx + d

Fazendo:

x=*a* => P(*a*) = c(*a*)+d (eq. 4)

x=*b* => P(*b*) = c(*b*)+d (eq. 5)

Das equações 1, 2, 4 e 5 temos:

$$\begin{cases} ca + d = r_1 \\ cb + d = r_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$c = \frac{r_1 - r_2}{a - b} \quad \text{e} \quad d = \frac{ar_2 - ar_1}{a - b} \text{ , com } a \neq b$$

$$\text{Logo : } R(x) = \frac{r_1 - r_2}{a - b}x + \frac{ar_2 - ar_1}{a - b} \text{ , com } a \neq b$$

Observações:

1ª) Se P(x) for divisível por *(x-a)* e por *(x-b)*, temos:

P(*a*)= r_1 =0

P(*b*)= r_2 =0

Portanto, P(x) é divisível pelo produto *(x-a)(x-b)*, pois:

$$R(x) = \frac{r_1 - r_2}{a - b}x + \frac{ar_2 - ar_1}{a - b} = 0 + 0 = 0$$

2ª) Generalizando, temos:

Se P(x) é divisível por n fatores distintos $(x-a_1)$, $(x-a_2)$,..., $(x-a_n)$ então P(x) é divisível pelo produto $(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$.

Exemplo:

Um polinômio P(x) dividido por *x* dá resto 6 e dividido por *(x-1)* dá resto 8. Qual o resto da divisão de P(x) por*x(x-1)*?

Resolução:

0 é a raiz do divisor *x*, portanto **P(0)=6** (eq. 1)

1 é a raiz do divisor *x-1*, portanto **P(1)=8** (eq. 2)

E para o divisor *x(x-1)* temos **P(x)=*x*(*x-1*) Q(x) + R(x)** (eq. 3)

O resto da divisão de P(x) por *x(x-1)* é no máximo do 1º grau, pois o divisor é do 2º grau; logo:

R(x)=ax+b

Da eq.3 vem:

P(x)=*x*(*x*-*1*) Q(x) + ax + b

Fazendo:

x=0 => P(0) = a(0)+b => P(0) = b (eq. 4)

x=1 => P(1) = a(1)+b => P(1) = a+b (eq. 5)

Das equações 1, 2, 4 e 5 temos:

$$\begin{cases} b = 6 \\ a + b = 8 \end{cases}$$

Logo: **b=6** e **a=2**.

Agora achamos o resto: R(x) = ax+b = 2x+6

Resposta: **R(x) = 2x+6**.

Após a explicação do conteúdo, faremos um exercício de fixação:

Colégio Estadual Padre Manuel da Nóbrega

Aluno(a): ________________________________ Turma: 3002

Exercícios

1- Qual o polinômio que expressa a soma entre $x^2 - 9x + 5$ e $3x^2 + 7x - 1$?

2- Valdir comprou pra sua loja 2 tambores e 5 violinos, enquanto Roberto comprou 3 tambores e 2 violinos. Cada tambor custou x reais e cada violino custou y reais, nessas condições, responda:

a) Qual o polinômio que representa a quantia que Valdir gastou?
b) Qual o polinômio que representa a quantia que Roberto gastou?
c) Qual o polinômio que representa a quantia que os dois gastaram juntos?
d) Supondo que x vale 60 reais e que y vale 300 reais, quanto os dois gastaram juntos?

3- Quando adicionamos os polinômios $13x^2 - 11x - 15$ e $-7x^2 - 2x + 16$, obtemos como soma o polinômio $Ax^2 + Bx + C$. Qual é o valor numérico da expressão $A + B + C$?

4- Determine o polinômio que representa a área de um retângulo de lados $3x^3$ e $(4x^2 + 5x + 8)$.

5- Dados $P = x^2 + a^2 - 2ax$ e $Q = 2x^2 + 5ax + 3a^2$, determine:

a) P + Q e seu valor numérico para a = 10 e x = -4.

b) P – Q e seu valor numérico para a = - 0,5 e x 1,2.

6- Considere os polinômios $p(x) = 2x + 1$, $t(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, $u(x) = x^4 - 5x + 2$ e $v(x) =- x^3 - x-1$. Calcule as operações indicadas abaixo. se a operação não for possível, justifique.

a)p(x) – u(x)

b) v(x) . u(x)

c) p(x) + u(x) – v(x)

d) p(x) : v(x)

e) u(x) : v(x)

f) v(x) . p(x) – v(x) . u(x)

g) v(x) . u(x) + p(x)

h) u(x) + p(x)

i) $[\, p(x)]^2 - [\, u(x)\,]^2$

j) $[\, v(x)\,]^2$

Roteiro de Ação 3

Duração: 150 minutos

Área de Conhecimento: Briot-Ruffini e Relação de Girard

Objetivo: Utilizar Briot-Ruffini na divisão de Polinômios e a Relação de Girard

Pré- requisitos: Divisão de números inteiros

.Material didático:

- Livro didático;
- Fórum de discussões;
- Resolução de problemas
- Aplicação de dinâmicas de grupo

Recursos de apoio:

Xerox dos exercícios

Organização da classe: Em duplas para troca de conhecimentos e idéias.

Descritores associados:

H36 - Efetuar cálculo envolvendo operações com polinômios na forma algébrica.

Habilidades:

– Efetuar operações com polinômios.

– Utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de polinômios .

Desenvolvimento

O DISPOSITIVO DE BRIOT RUFFINI

Serve para efetuar a divisão de um polinômio P(x) por um binômio da forma (ax+b).

<u>Exemplo</u>: Determinar o quociente e o resto da divisão do polinômio $\boldsymbol{P(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2}$ por $(\boldsymbol{x-2})$.

Resolução:

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
\text{RAIZ DO DIVISOR} & & \text{COEFICIENTES DE P(x)} & & \\
2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline
 & \downarrow & 3.(2)-5 & 1.(2)+1 & 3.(2)-2 \\
 & 3 & 1 & 3 & 4 \\
 & & \text{COEFICIENTES DO QUOCIENTE Q(x)} & & \text{RESTO}
\end{array}
$$

Observe que o grau de Q(x) é uma unidade inferior ao de P(x), pois o divisor é de grau 1.

<u>Resposta</u>: $\boldsymbol{Q(x) = 3x^2 + x + 3}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{R(x) = 4}$.

<u>Para a resolução desse problema seguimos os seguintes passos:</u>

1º) Colocamos a raiz do divisor e os coeficientes do dividendo ordenadamente na parte de cima da “cerquinha”.

2º) O primeiro coeficiente do dividendo é repetido abaixo.

3º) Multiplicamos a raiz do divisor por esse coeficiente repetido abaixo e somamos o produto com o 2º coeficiente do dividendo, colocando o resultado abaixo deste.

4º) Multiplicamos a raiz do divisor pelo número colocado abaixo do 2º coeficiente e somamos o produto com o 3º coeficiente, colocando o resultado abaixo deste, e assim sucessivamente.

5º) Separamos o último número formado, que é igual ao resto da divisão, e os números que ficam à esquerda deste serão os coeficientes do quociente.

EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Tomando-se o seguinte polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ onde $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ são constantes *n* e é definido como o grau do polinômio.
Por exemplo: $P(x) = x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 7x + 8 = 0$
Define-se como raiz α se e somente se $P(\alpha) = 0$.
Obs.: Note que ao se igualar um polinômio a zero $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ ele se transforma em uma equação polinomial.
Também se pode decompor o polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ em *n* fatores de primeiro grau:
$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdots (x - \alpha_n)$ onde $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ são raízes da equação polinomial.

a. Raízes Múltiplas
Pode ocorrer que uma ou mais raízes sejam iguais, nesse caso essas raízes são definidas como múltiplas, por exemplo:

$$P(x) = 4(x-1)(x-1)(x-2)(x-2)(x-2)(x-8)$$

Note a multiplicidade da raiz 1 (2 vezes) e da raiz 2 (3 vezes). Denomina-se que a equação polinomial $P(x)$ possui a raiz 1 com multiplicidade 2, a raiz 2 de *multiplicidade* 3 e a raiz 8 de *multiplicidade* 1.

b. Raízes Complexas e Reais
"Toda equação polinomial, de grau *n*, com *n* ≥ 1 possui pelo menos 1 raiz complexa (real ou imaginário)".
Obs.: Lembrar que os números complexos englobam os números reais, ou seja, um número real é também um número complexo.

"Toda equação polinomial que possua uma raiz imaginária possuirá também o conjugado dessa raiz como raiz".

Ou seja, se $z = a + bi$ é raiz de uma equação polinomial $z = a - bi$ também será raiz. Sendo $a, b \in \mathcal{R}$ e $i^2 = -1$.

Exemplo: Sabendo-se que a equação polinomial $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ possui uma raiz imaginária igual a *i*, com $i^2 = -1$ encontrar as outras raízes.

Se *i* é uma raiz então -*i*, seu conjugado, é outra e consegue-se encontrar a terceira raiz que é 2.

c. Raízes Racionais

"Se um número racional $\frac{p}{q}$, com *p* e *q* primos entre si, é raiz de uma equação polinomial de *coeficientes inteiros* do tipo $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ então *p* é divisor de a_0 e *q* é divisor de a_n".

Exemplo:

$P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$, pesquisar as possíveis raízes racionais.

$$a_n = a_3 = 2$$
$$a_0 = -1$$

As possíveis raízes serão:

$$\left\{1, \frac{1}{2}, -1, -2\right\}$$

Testando para o polinômio $P(x)$ verifica-se que somente $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, sendo essa e a raiz racional do polinômio.

Note que os coeficientes da equação polinomial obrigatoriamente devem ser números inteiros.

RELAÇÃO DE GIRARD

Temos que uma equação do 2º grau possui a seguinte forma: *ax² + bx + x = 0*. Nessa expressão, temos que os coeficientes *a, b* e *c* são números reais, com *a ≠ 0*. As raízes de uma equação do 2º grau, de acordo com a expressão resolutiva são:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Soma entre as raízes

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{-b - b + \sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{-2b}{2a} \Rightarrow -\frac{b}{a}$$

Produto entre as raízes

$$\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) * \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \Rightarrow \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} \Rightarrow \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} \Rightarrow \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2}$$

$$\frac{b^2 - b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow \frac{-4ac}{4a^2} \Rightarrow -\frac{c}{a}$$

<u>Exemplo</u>: Vamos determinar a soma das raízes da seguinte equação do 2º grau: $x^2 - 8x + 15 = 0$.

Soma

$$-\frac{b}{a} = -\frac{(-8)}{1} = 8$$

Produto

$$-\frac{c}{a} = -\frac{15}{1} = -15$$

As relações de Girard não servem somente para determinarmos a soma e o produto de raízes. Elas são ferramentas utilizadas para compor equações do 2º grau. As equações são representadas por: $x^2 - Sx + P = 0$, onde S (soma) e P (produto).

Fixaremos o conteúdo com um exercício:

Colégio Estadual Padre Manuel da Nóbrega
Aluno(a):_______________________________________
Professora: Ana Cristina Turma:_________ Nº: ______

Exercícios de Matemática

1 - Eu tinha um terreno quadrado medindo **y** metros de lado. Comprei mais 3m de frente e 2m de fundos.

a) Faça a representação geométrica correspondente ao novo terreno.

b) Quantos metros a frente do terreno passará a ter?

c) Quantos metros o fundo do terreno passará a ter?

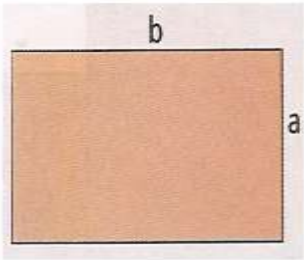
d) Qual a expressão da área do novo terreno na forma mais simplificada possível?

e) Qual a expressão do perímetro desse novo terreno na forma mais simplificada possível?

2 - Se um sanduíche custa **s** reais e um refrigerante **r** reais, indique o custo, em reais, de:

a) dois sanduíches;
b) sete refrigerantes;
c) um sanduíche e três refrigerantes;
d) cinco sanduíches e um refrigerante.

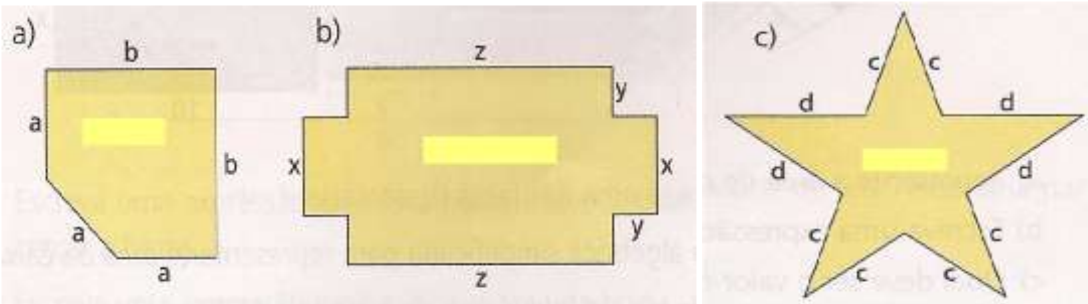
3 - Observe como é feito o cálculo algébrico para representar o perímetro de uma figura cujas medidas envolvem mais de uma letra:



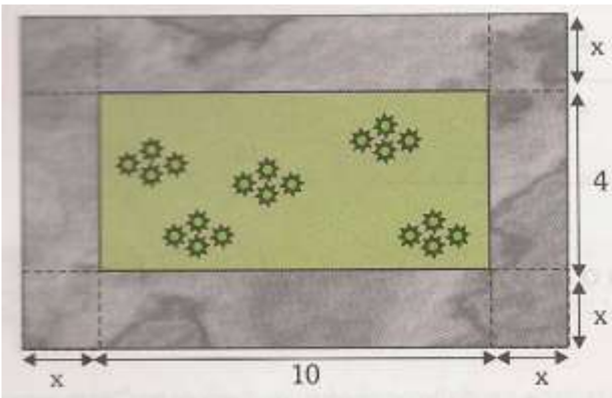
Perímetro = $a + b + a + b$

Perímetro = $2a + 2b$

- Represente algebricamente os perímetros destas figuras:



4 - Ao redor do jardim da casa de Carlos, vai ser construída uma calçada revestida de pedra. As medidas estão em metros.



a) Qual a área ocupada pelo jardim?

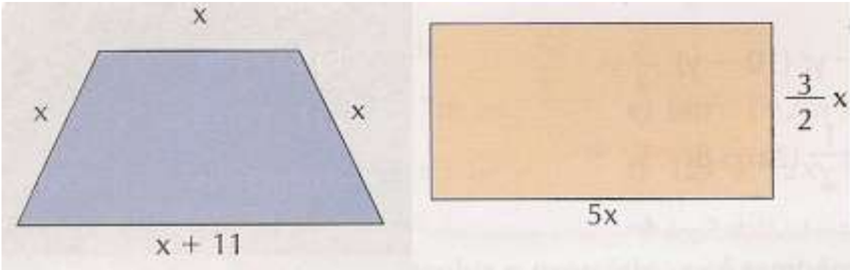
b) Escreva, na forma reduzida, um polinômio que expresse a área ocupada pela calçada.

5 - Uma indústria produz apenas dois tipos de camisas. O primeiro com preço de R$ 45,00 por unidade e o segundo com preço de R$ 67,00 por unidade. Se chamarmos de x a quantidade vendida do primeiro tipo e de y a quantidade vendida do segundo tipo, responda:

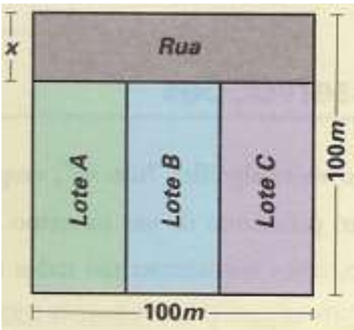
a) Qual a expressão algébrica que representa a venda desses dois artigos?

b) Qual o valor se forem vendidos 200 e 300 unidades, respectivamente?

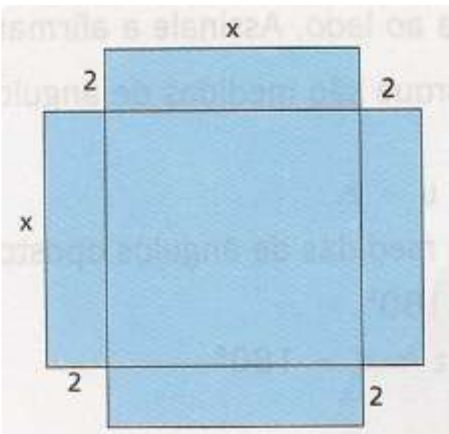
6 - Escreva uma expressão simplificada que represente o perímetro de cada figura:



7 - Na figura abaixo, os lotes A, B e C têm áreas iguais. Dê um polinômio que expresse a área de cada um deles.



8 - A área da figura ao lado é representada por:



a) ( ) $x^2 + 8x$

b) ( ) $x^2 + 16$

c) ( ) $x + 8x^2$

d) ( ) $(x + 2)(x + 2)$

e) ( ) $2x(x + 2)$

9 - Ordene os polinômios a seguir em potências decrescentes, dê o seu grau e, a seguir, classifique-os em completos ou incompletos:

POLINÔMIOS	**ORDEM DECRESCENTE**	**GRAU**	**COMPLETO OU INCOMPLETO?**
$2x^2 – 5x^3 + 6$			
$5b – 7b^2 + 4b^3 - 5$			
$m^3 + m - 1$			
$5y – 3y^2 + y^3$			

10 - Dadas as expressões algébricas **A, B** e **C**:

$A = y^2 -3y$

$B = 2y^2 – y$

$C = y^2 – 2y$

Efetue essas operações algébricas e escreva o resultado na forma reduzida:

a) A + B

b) A + B + C

c) A . B

d) A . B . C

III- Avaliação

O aluno deverá saber relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1º grau, saber identificar o grau de um polinômio e usar o dispositivo de Briot-Ruffini para facilitar as operações com polinômios.

As atividades serão realizadas em sala de aula e no laboratório de Informática.

.

Os alunos serão avaliados diariamente, mediante suas anotações, as observações produzidas a partir das discussões em aula, os conceitos formados, os exercícios resolvidos em aula e em casa, os resumos, as atividades em grupo e a prova escrita.

IV - Referências Bibliográficas

Fontes:

Vídeo : Números Complexos. Disponível em:
<http://m3.ime.unicamp.br/>
(acessado em 20/10/2014)

História dos Polinômios e suas utilidades:
<http://www.infoescola.com/matematica/origem-e-importancia-dos-polinomios/f> (acessado em 20/10/2014)

Conteúdo propriamente dito:Polinômios
< http://www.coladaweb.com/matematica/polinomios-parte-1>
(acessado em 20/10/2014)

Exercícios de Fixação
<http://www.educacional.com.br/upload/.../Lista%20I1822010214117.doc>
(acessado em 20/10/2014)