Formação Continuada em Matemática
Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 2º Ano – 3º Bimestre/2012

Plano de Trabalho

Matriz e Determinante

Tarefa 1

Cursista: Márcio A. Guedes de Magalhães

Tutora: Karina Campos de Souza

S u m á r i o

INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem por objetivo permitir que os alunos percebam a aplicabilidade do conteúdo denominado “Matriz e Determinante” nas várias áreas da vida prática.

De acordo com minha prática docente e a ansiedade de meus alunos, percebi a necessidade de modificar a maneira como vinha trabalhando Matriz e Determinante em sala de aula. Geralmente os alunos querem saber a utilização dos assuntos na vida prática e com isso faz-se necessário a apresentação dessa utilização, seja no campo da informática ou na utilização de mensagens criptografadas.

Geralmente os alunos apresentam dificuldades concernentes a interpretação de enunciados e utilização de raciocínio lógico, além da falta de interesse. Por isso, e extremamente importante utilizar assuntos atraentes.

Como o assunto exige que o aluno saiba localizar os elementos da matriz, faz-se necessário reforçar a localização desses elementos na linha e coluna de uma matriz. Para isso, farei da sala de aula uma grande matriz onde eles possam se acostumar e fixar bem a localização e para que eles não confundam linha com coluna.

Para a totalização do plano, serão necessários doze tempos de cinquenta minutos para desenvolvimento dos conteúdos mais seis tempos para avaliação da aprendizagem.

DESENVOLVIMENTO

Matrizes

Introdução

Muitas vezes, para designar com clareza certas situações, é necessário formar um grupo ordenado de números que se apresentam dispostas em linhas e colunas numa tabela. Essas tabelas são chamadas em Matemática de Matrizes. Com o advento da computação e a crescente necessidade de se guardar muita informação, as matrizes adquiriram uma grande importância. Para termos uma ideia dessa importância, basta saber o que vemos na tela de um computador é uma enorme matriz, e que cada valor guardado nas linhas e colunas da matriz representa um ponto colorido mostrado na tela (pixel).
O crescente uso dos computadores tem feito com que a teoria das matrizes seja cada vez mais aplicada em áreas como Economia, Engenharia, Matemática, Física, dentre outras. Vejamos um exemplo.

A tabela a seguir representa as notas de três alunos em uma etapa:

	Química	Inglês	Literatura	Espanhol
A	8	7	9	8
B	6	6	7	6
C	4	8	5	9

Se quisermos saber a nota do aluno **B** em Literatura, basta procurar o número que fica na segunda linha e na terceira coluna da tabela.
Vamos agora considerar uma tabela de números dispostos em linhas e colunas, como no exemplo acima, mas colocados entre parênteses ou colchetes:

$$\text{linha} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{8 \quad 7 \quad 9 \quad 8} \\ 6 \quad 6 \quad 7 \quad 6 \\ 4 \quad 8 \quad 5 \quad 9 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 8 \\ 6 & 6 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 5 & 9 \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ \text{coluna} \end{array}$$

Em tabelas assim dispostas, os números são os elementos. As linhas são enumeradas *de cima para baixo* e as colunas, *da esquerda para direita:*

$$\begin{array}{r} \text{1ª linha} \rightarrow \\ \text{2ª linha} \rightarrow \\ \text{3ª linha} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & \sqrt{3} & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{1ª coluna} & \text{2ª coluna} & \text{3ª coluna} \end{array}$$

Tabelas com **m** linhas e **n** colunas (**m** e **n** números naturais diferentes de 0) são denominadas matrizes m x n. Na tabela anterior temos, portanto, uma matriz 3 x 3.

Veja mais alguns exemplos:

- $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 30 & -3 & 17 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 3
- $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 2

Notação geral

Costuma-se representar as matrizes por *letras maiúsculas* e seus elementos por *letras minúsculas*, acompanhadas por *dois índices* que indicam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa.

Assim, uma matriz **A** do tipo m x n é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou, abreviadamente, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, em que **i** e **j** representam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa. Por exemplo, na matriz anterior, $\mathbf{a_{23}}$ é o elemento da 2ª linha e da 3ª coluna.

Na matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{cases} a_{11} = 2, a_{12} = -1 \text{ e } a_{13} = \\ a_{21} = 4, a_{22} = \frac{1}{2} \text{ e } a_{23} = \sqrt{2} \\ a_{31} = 0, a_{32} = 1 \text{ e } a_{33} = -2 \end{cases}$$

Ou na matriz B = [-1 0 2 5], temos: $a_{11} = -1$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 2$ e $a_{14} = 5$.

Exercício Prático

Faremos da turma pequenas matrizes. Matriz A, matriz B e assim por diante, e cada aluna será um elemento dessas matrizes.
Pedirei que os alunos nomeiem esses alunos utilizando a notação de matriz até que eles possam fixar e não façam confusão entre linhas e colunas. É um exercício de fácil execução e que tem um ótimo resultado.
Após esse momento poderemos trocar mensagens entre os elementos das matrizes. Um elemento da matriz A manda uma mensagem para o elemento da matriz B, por exemplo para o elemento b_{23}.
Com esse exercício espero fazer com que a notação de matriz seja bem fixada pelos alunos.

Denominações especiais

Algumas matrizes, por suas características, recebem denominações especiais.

- **Matriz linha**: matriz do tipo 1 x n, ou seja, com uma única linha. Por exemplo, a matriz A =[4 7 -3 1], do tipo 1 x 4.

- **Matriz coluna**: matriz do tipo m x 1, ou seja, com uma única coluna. Por exemplo, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, do tipo 3 x 1

- **Matriz quadrada:** matriz do tipo n x n, ou seja, com o mesmo número de linhas e colunas; dizemos que a matriz é de ordem **n**. Por exemplo, a matriz $C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ é do tipo 2 x 2, isto é, quadrada de ordem 2.

Numa matriz quadrada definimos a diagonal principal e a diagonal secundária. A principal é formada pelos elementos $\mathbf{a_{ij}}$ tais que i = j. Na secundária, temos i + j = n + 1.
Veja:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonal principal i = j

diagonal secundária i + j = n + 1

Observe a matriz a seguir:

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

ordem da matriz

diagonal principal

diagonal secundária

a_{11} = -1 é elemento da diagonal principal, pis i = j = 1
a_{31}= 5 é elemento da diagonal secundária, pois i + j = n + 1 (3 + 1 = 3 + 1)

- **Matriz nula**: matriz em que todos os elementos são nulos; é representada por $0_{m \times n}$.

Por exemplo, $0_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- **Matriz diagonal**: matriz quadrada em que todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos. Por exemplo:

$a)\ A_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $b)\ B_{3x3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

- **Matriz identidade**: matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são nulos; é representada por **I_n**, sendo **n** a ordem da matriz. Por exemplo:

$a)\ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $b)\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Assim, para uma matriz identidade $I_n = [a_{ij}],\ a_{ij} = \begin{cases} 1, se\ i = j \\ 0, se\ i \neq j \end{cases}$.

- **Matriz transposta**: matriz A^t obtida a partir da matriz A trocando-se ordenadamente as linhas por colunas ou as colunas por linhas. Por exemplo:

$$Se\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, então\ A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desse modo, se a matriz **A** é do tipo m x n, $\mathbf{A^t}$ é do tipo n x m.
Note que a 1ª linha de **A** corresponde à 1ª coluna de $\mathbf{A^t}$ e a 2ª linha de A corresponde à 2ª coluna de $\mathbf{A^t}$.

- **Matriz simétrica**: matriz quadrada de ordem n tal que $\mathbf{A = A^t}$ **.** Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

é simétrica, pois $a_{12} = a_{21} = 5$, $a_{13} = a_{31} = 6$, $a_{23} = a_{32} = 4$, ou seja, temos sempre $a_{ij} = a_{ij}$.

- **Matriz oposta**: matriz **-A** obtida a partir de **A** trocando-se o sinal de todos os elementos de **A**. Por exemplo, $Se\ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, então\ -A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Igualdade de matrizes

Duas matrizes, A e B, do mesmo tipo m x n, são iguais se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são iguais:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}\ para\ \text{todo } 1 \le i \le m \text{ e todo } 1 \le j \le n$$

$$Se\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & b \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & c \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } A = B, \text{ então } c = 0 \text{ e } b = 3$$

Operações envolvendo matrizes H - 33

Adição

Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, chamamos de soma dessas matrizes a matriz $C = [C_{ij}]_{m\times n}$, tal que $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $1 \le i \le m$ e todo $1 \le j \le n$:

$$\boxed{A + B = C}$$

Exemplos:

- $$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 4+(-1) \\ 0+0 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$
- $$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+1 & 0+1 \\ 0+1 & 1+(-1) & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observação: A + B existe se, e somente se, **A** e **B** forem do mesmo tipo.

Propriedades

Sendo **A**, **B** e **C** matrizes do mesmo tipo (m x n), temos as seguintes propriedades para a adição:
a) comutativa: A + B = B + A
b) associativa: (A + B) + C = A + (B + C)
c) elemento neutro: A + 0 = 0 + A = A, sendo 0 a matriz nula m x n
d) elemento oposto: A + (- A) = (-A) + A = 0

Subtração

Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, chamamos de diferença entre essas matrizes a soma de **A** com a matriz oposta de **B**:

$$\boxed{A - B = A + (-B)}$$

Observe:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 3+(-1) & 0+(-2) \\ 4+0 & -7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Dados um número real **x** e uma matriz **A** do tipo m x n, o produto de **x** por **A** é uma matriz **B** do tipo m x n obtida pela multiplicação de cada elemento de **A** por **x**, ou seja, $b_{ij} = xa_{ij}$:

$$\boxed{B = x.A}$$

Observe o seguinte exemplo:

$$3.\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 & 3.7 \\ 3.(-1) & 3.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades

Sendo **A** e **B** matrizes do mesmo tipo (m x n) e **x** e **y** números reais quaisquer, valem as seguintes propriedades:
a) associativa: x . (yA) = (xy) . A
b) distributiva de um número real em relação à adição de matrizes: x . (A + B) = xA + xB
c) distributiva de uma matriz em relação à adição de dois números reais: (x + y) . A = xA + yA
d) elemento neutro : xA = A, para x=1, ou seja, A=A

Multiplicação de matrizes

O produto de uma matriz por outra não é determinado por meio do produto dos sus respectivos elementos.

Assim, o produto das matrizes $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ em que cada elemento $\mathbf{c_{ij}}$ é obtido por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima coluna **B**.

Vamos multiplicar a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ para entender como se obtém cada $\mathbf{C_{ij}}$:

- 1ª linha e 1ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{c_{11}}{\boxed{1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4}} & \\ & \end{bmatrix}$$

- 1ª linha e 2ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 & \overset{c_{12}}{\boxed{1 \cdot 3 + 2 \cdot 2}} \\ & \end{bmatrix}$$

- 2ª linha e 1ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 \quad 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \\ \underset{c_{21}}{\boxed{3 \cdot (-1) + 4 \cdot 4}} & \end{bmatrix}$$

- 2ª linha e 2ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 \quad 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 & \underset{c_{22}}{\boxed{3 \cdot 3 + 4 \cdot 2}} \end{bmatrix}$$

Assim, $A \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}$.

Observe que:

$$A.B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1).1+3.3 & (-1).2+3.4\\ 4.1+2.3 & 4.2+2.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 10\\ 10 & 16\end{bmatrix}$$

Portanto, $A.B \neq B.A$, ou seja, para a multiplicação de matrizes não vale a propriedade comutativa.

Vejamos outro exemplo com as matrizes $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 4\end{bmatrix}$:

$$A.B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.1+3(-2) & 2.2+3.0 & 2.3+3.4\\ 0.1+1(-2) & 0.2+1.0 & 0.3+1.4\\ -1.1+4(-2) & -1.2+4.0 & -1.3+4.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 4 & 18\\ -2 & 0 & 4\\ -9 & -2 & 13\end{bmatrix}$$

$$B.A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.2+2.0+3(-1) & 1.3+2.1+3.4\\ -2.2+0.0+4(-1) & -2.3+0.1+4.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 17\\ -8 & 10\end{bmatrix}$$

Da definição, temos que a matriz produto A . B só existe se o número de colunas de **A** for igual ao número de linhas de **B**:

$$A_{m\times p}\cdot B_{p\times n}=(A.B)_{m\times n}$$

A matriz produto terá o número de linhas de **A (m)** e o número de colunas de **B(n)**:

- Se $A_{3\times 2}$ e $B_{2\times 5}$, então $(A.B)_{3\times 5}$
- Se $A_{4\times 1}$ e $B_{2\times 3}$, então não existe o produto
- Se $A_{4\times 2}$ e $B_{2\times 1}$, então $(A.B)_{4\times 1}$

Propriedades

Verificadas as condições de existência para a multiplicação de matrizes, valem as seguintes propriedades:

a) associativa: (A . B) . C = A . (B . C)

b) distributiva em relação à adição: A . (B + C) = A . B + A . C ou (A + B) . C = A . C + B . C

c) elemento neutro: $A . I_n = I_n . A = A$, sendo $\mathbf{I_n}$ a matriz identidade de ordem **n**

Vimos que a propriedade comutativa, geralmente, não vale para a multiplicação de matrizes. Não vale também o anulamento do produto, ou seja: sendo $0_{m\times n}$ uma matriz nula, $A.B=0_{m\times n}$ não implica, necessariamente, que $A=0_{m\times n}$ ou $B=0_{m\times n}$.

Matriz inversa

Dada uma matriz **A**, quadrada, de ordem **n**, se existir uma matriz **A'**, de mesma ordem, tal que $A . A' = A' . A = I_n$, então **A'** é matriz inversa de **A** . representamos a matriz inversa por $\mathbf{A^{-1}}$.

Determinantes

Antes de iniciar o assunto, se faz necessário uma rápida revisão de equação do 1º grau, bem como resolução de sistemas de equações do 1º grau, assuntos que são pré requisitos para aprendizagem de determinante.

Regra de Sarrus H - 32

O cálculo do determinante de 3ª ordem pode ser feito por meio de um dispositivo prático, denominado*regra de Sarrus.*

Acompanhe como aplicamos essa regra para $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

1º passo: Repetimos as duas primeiras colunas ao lado da terceira:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

2º passo: Encontramos a soma do produto dos elementos da *diagonal principal* com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal positivo):

$$\begin{matrix} \oplus & \oplus & \oplus & & \\ \end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} + (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$

paralelas

diagonal principal

3º passo: Encontramos a soma do produto dos elementos da *diagonal secundária* com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal negativo):

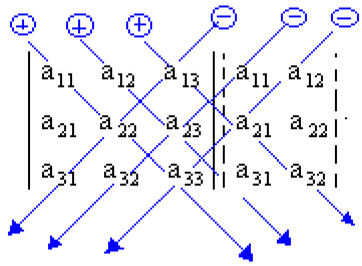
$$\begin{matrix} \ominus & \ominus & \ominus \end{matrix}$$

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

paralelas

diagonal secundária

Assim:



$$= -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) + (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$

Observação: Se desenvolvermos esse determinante de 3ª ordem aplicando o Teorema de Laplace, encontraremos o mesmo número real.

Determinante de ordem n > 3

Vimos que a regra de Sarrus é válida para o cálculo do determinante de uma matriz de ordem 3. Quando a matriz é de ordem superior a 3, devemos empregar o Teorema de Laplace para chegar a determinantes de ordem 3 e depois aplicar a regra de Sarrus.

Propriedades dos determinantes

Os demais associados a matrizes quadradas de ordem **n** apresentam as seguintes propriedades:

P_1) Quando todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) são nulos, o determinante dessa matriz é nulo.

Exemplo:

$$a)\begin{vmatrix} 4 & 9 & -8 & \sqrt{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$b)\begin{vmatrix} 3 & 0 & 15 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

P_2) Se duas filas de uma matriz são iguais, então seu determinante é nulo.

Exemplo:

$$\begin{array}{c} L_1 \\ \\ L_3 \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

P_3) Se duas filas paralelas de uma matriz são proporcionais, então seu determinante é nulo.
Exemplo:

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}} & \begin{matrix}4\\1\\2\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}2\\4\\6\end{matrix}} \end{vmatrix} = 0$$

$$C_3 = 2C_1$$

P_4) Se os elementos de uma fila de uma matriz são combinações lineares dos elementos correspondentes de filas paralelas, então seu determinante é nulo.
Exemplos:

$$a)\ \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}3\\4\\2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}4\\6\\5\end{matrix}} \end{vmatrix} = 0$$

$$C_1 + C_2 = C_3$$

$$b)\ \begin{vmatrix} \boxed{3 \quad 4 \quad 1} \\ \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ \boxed{7 \quad 10 \quad 5} \end{vmatrix} = 0$$

$$2L_1 + L_2 = L_3$$

P_5) **Teorema de Jacobi**: o determinante de uma matriz não se altera quando somamos aos elementos de uma fila uma combinação linear dos elementos correspondentes de filas paralelas.
Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

Substituindo a 1ª coluna pela soma dessa mesma coluna com o dobro da 2ª, temos:

$$\begin{vmatrix} 1+2.2 & 2 & 3 \\ 2+1.2 & 1 & 2 \\ 2+4.2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 10 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

P_6) O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.
Exemplo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 \qquad \det A^t = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

P_7) Multiplicando por um número real todos os elementos de uma fila em uma matriz, o determinante dessa matriz fica multiplicado por esse número.
Exemplos:

$2C_1$

$$a)\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&-1\\3&2&1\end{vmatrix}=-4 \quad \text{multiplicando} \quad C_1 \text{ por } 2: \begin{vmatrix}2&2&3\\4&1&-1\\6&2&1\end{vmatrix}=2(-4)=-8$$

$\frac{1}{5}L_1$

$$b)\begin{vmatrix}5&-10&0\\3&7&4\\2&0&-1\end{vmatrix}=-145 \quad \text{Multiplicando} \quad L_1 \text{por } \frac{1}{5}: \begin{vmatrix}1&-2&0\\3&7&4\\2&0&-1\end{vmatrix}=\frac{1}{5}(-145)=-29$$

P_8) Quando trocamos as posições de duas filas paralelas, o determinante de uma matriz muda de sinal.
Exemplo:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&-1\\3&2&1\end{vmatrix}=-4 \ \text{Trocando as posições de } L_1 \text{ e } L_2: \begin{vmatrix}2&1&-1\\1&2&3\\3&2&1\end{vmatrix}==+4$$

P_9) Quando, em uma matriz, os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são todos nulos, o determinante é igual ao produto dos elementos dessa diagonal.
Exemplos:

$$a)\begin{vmatrix}a&0&0\\d&b&0\\e&f&c\end{vmatrix}=a.b.c \qquad b)\begin{vmatrix}x&g&h\\0&y&i\\0&0&z\end{vmatrix}=x.y.z$$

P_{10}) Quando, em uma matriz, os elementos acima ou abaixo da diagonal secundária são todos nulos, o determinante é igual ao produto dos elementos dessa diagonal multiplicado por $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Exemplos:

$$a)\begin{vmatrix} 0 & a \\ b & x \end{vmatrix} = -a.b \qquad b)\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & x \\ c & y & z \end{vmatrix} = -a.b.c$$

P_{11}) Para **A** e **B** matrizes quadradas de mesma ordem **n**, $\boxed{\det(AB) = \det A \,.\, \det B}$.

$$A \,.\, A^{-1} = I, \boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$$

Como:
Exemplo:

$$Se\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} e\ A\,.\,B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 11 & 8 \end{bmatrix}, então:$$

$$\underbrace{\det(AB)}_{10} = \underbrace{\det A}_{5} \,.\, \underbrace{\det B}_{2}$$

P_{12}) $Se\ K \in \mathbb{R}$, então $\det(K\,.\,A) = K^{n}.\det A.$

Exemplo:

$$Sendo\ K = 3, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\ e\ K\,.\,A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}, temos:$$

$$\underbrace{\det(K.A)}_{54} = \underbrace{K^{n}}_{3^2} \,.\, \underbrace{\det A}_{6}$$

Exercício prático:

Decodificação de mensagem.

Depois que aplicamos o roteiro que constrói o conceito de determinante de uma matriz, você pode retornar a este e estimular o aluno a analisar várias matrizes não invertíveis e, consequentemente, levá-lo a concluir que as matrizes não invertíveis são exatamente aquelas que possuem determinante zero. Ou seja, concluir que:

Dada uma matriz quadrada A (com determinante não nulo) existe uma única matriz A^{-1} tal que:

$A.A^{-1} = A^{-1}.A = In$

Outra atividade interessante que poderemos construir é ampliar o conceito de matrizes inversas para o uso com matrizes 3x3.

Por fim, propomos uma atividade de decodificação que será uma ferramenta importante tanto para habilidade de operações com matrizes quanto para o trabalho, em um ambiente contextualizado.

Para nossa incursão nas mensagens criptografadas usando matrizes, precisamos inicialmente fazer uma associação entre números e as letras do alfabeto da seguinte forma:

–	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Quadro do valor numérico de cada letra

Os espaços entre as palavras serão representados por um traço e para esse símbolo será atribuído o número zero.

Dois amigos, Carlos e João, combinaram de enviar mensagens codificadas entre si, utilizando a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ como chave.

a) Carlos quer enviar a mensagem “ESTUDAR LIBERTA” para João. Preencha a tabela abaixo com os números que estão associados a cada uma das letras.

E	S	T	U	D	A	R		L	I	B	E	R	T	A
5	19	20	21	4	1	18		12	9	2	5	18	20	1

b) Organize esses dados em uma matriz M_{2X7}, da seguinte forma:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 19 & 20 & 21 & 4 & 1 & 18 \\ 12 & 9 & 2 & 5 & 18 & 20 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Encontre a matriz A^{-1} inversa de A.

$$A.A_{in} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ encontraremos, } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

d) Obtenha a matriz codificada que Carlos deverá enviar para João, ou seja, obtenha a matriz *C=A.M*

Chegaremos a Matriz $C = \begin{pmatrix} 29 & 37 & 24 & 31 & 40 & 41 & 20 \\ 36 & 27 & 6 & 15 & 54 & 60 & 3 \end{pmatrix}$

e) Faça como João e finalmente decodifique a mensagem, fazendo $A^{-1}.C$

Fazendo $A^{-1}.C = \begin{pmatrix} 5 & 19 & 20 & 21 & 4 & 1 & 18 \\ 12 & 9 & 2 & 5 & 18 & 20 & 1 \end{pmatrix}$

"ESTUDAR LIBERTA"

AVALIAÇÃO

A avaliação se fará ao longo do bimestre fazendo com que a aprendizagem ocorra e que para que se possa corrigir eventuais erros dessa aprendizagem. A avaliação envolve aluno e professor e deve ser realizada de maneira que ambos possam avaliar o quanto se desenvolveu cada uma das competências relacionadas aos temas estudados.

Ao longo do bimestre faremos exercícios práticos de localização de elementos de uma matriz, de mensagens criptografadas, resolução de exercícios, bem como a avaliação escrita propriamente dita.

As avaliações escritas poderão ser feitas em dois momentos durante o curso da matéria. Após a primeira avaliação teremos uma resposta se houve ou não conhecimento e poderemos assim corrigir possíveis falhas no processo de aprendizagem.

No decorrer do assunto estaremos atentos e elaborando exercícios práticos que poderão servir de avaliação da aprendizagem e serão pontuados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Dante, Luis Roberto
Matemática, volume único : livro do professor / Luis Roberto Dante. -- 1. Ed. -- São Paulo: Ática, 2005.

Paiva, Manoel
Matemática , volume único / Manoel Paiva. – 1. Ed. – São Paulo: Moderna, 2005.

Endereços eletrônicos acessados:

http://www.somatematica.com.br/cgi- local/busca/search.pl?lang=en&q=matriz+e+determinante&x=8&y=2

acessado em 29, 30, 31/08 e 01, 02, 03/09 de2012.