Formação Continuada em Matemática

Matemática na Escola

NÚMEROS COMPLEXOS

***Tarefa 1*:** Plano de Trabalho - 3° ano do EM - 3° Bimestre/2012

Cursista: Sílvia Regina Guedes da Silva

Tutor: Susi Cristine Britto Ferreira

SUMÁRIO

<u>AVALIAÇÃO DO PLANO ANTERIOR</u>

- *<u>Pontos Positivos:</u>* Consegui que os alunos trabalhassem melhor com as operações com sinais negativos, aplicando a revisão, conforme já mencionada. Os alunos também foram bem participativos nas aulas ministradas no laboratório de informática. No geral, as aulas fluíram bem.

- <u>Pontos Negativos:</u> Precisaria de mais tempo para outras aplicações do conteúdo, que o cronograma impediu. Gostaria de ter trabalhado mais na sala de informática, pois a aproximação com os alunos torna-se única e agradável.

- *<u>Alterações:</u>* Inclusão do texto do Electro Man e do jogo ¨Dominó dos Complexos, ambos aplicados em aula.

- ***<u>Impressão dos alunos:</u>*** Alguns alunos não acharam muita aplicação no cotidiano deles, por isso queria ter me aprofundado em alguns assuntos, como a relação com a Física (com exercícios mais complexos), apesar de ter lido um texto sobre esse assunto, mas o cronograma não me permitiu. Entretanto, todos participaram das tarefas, dos desafios propostos e o relacionamento professor-aluno e aluno –aluno foi muito bom.

INTRODUÇÃO - PLANO REMODELADO

Os números complexos desempenham um papel extremamente importante nos mais diversos ramos da Matemática e têm aplicações em outras áreas de conhecimento.

Em geral, os alunos se deparam com eles, pela primeira vez, no ensino médio, e sua introdução é justificada pela necessidade de resolver equações de 2° grau com discriminante negativo, o que começa a criar uma certa ¨antipatia¨, pelos alunos. Analisaremos essas questões e alguns outros aspectos ligados ao desenvolvimento do assunto, tornando a matéria agradável para o aluno e, assim, alcançar resultados positivos.

É preciso que o aluno tenha domínio das operações com números negativos e o entendimento do plano cartesiano, se houver necessidade, será destinado um tempo de aula (50 minutos) para uma revisão sobre regras de sinais. É de extrema importância que o aluno seja amparado de forma que seja transmitida segurança, para prosseguirmos o assunto aliado ao seu cotidiano, quando possível.

DESENVOLVIMENTO

- Atividade da primeira semana:

a) *Habilidades relacionadas a aula:*

- Identificar a representação dos números complexos
- Identificar números complexos com pontos num plano
- Igualdade de números complexos;
- Adição e subtração de números complexos;
- Potências de i.

b) *Duração das atividades:* 4 aulas de 50 minutos cada (sendo 2 aulas ministradas na sala de informática)

c) *Pré-requisitos*: · Operações com o conjunto dos números reais.

d) *Organização da turma:* Ora individual, ora em dupla.

e) *Objetivos:* Apresentar todos os assuntos dentro do tema de maneira clara e conceitual, conciliando com o que já foi aprendido até o momento e, se possível relacionar com o cotidiano..

f) *Metodologia Adotada:*

- Trabalhar com os textos explicativos, incluindo o Electro Man;
- Utilização da sala de informática;
- Listas de exercícios, para fixação;
- Desafio de duplas, para estimular o trabalho coletivo, a solidariedade, o respeito pela opinião dos outros e o convívio social.

g) *Recursos educacionais utilizados:* Leitura de textos como parte da explicação aos alunos sobre o tema sugerido, para reflexão.

Utilização da sala de informática para utilização do aplicativo Geogebra.

Leitura do Texto do Electro Man (fonte retirada da introdução ao Números Complexos do Campo Conceitual 1 – Planejamento da Formação Continuada SEEDUC) para os alunos:

Raj Mohan, é um exemplo curioso para introduzir o assunto numa aula de apresentação dos números complexos, enquanto se responde sutilmente à pergunta que sempre surge: “mas para que servem os números complexos?”.

Dica: Professor, explique a aplicação desse texto aliado à eletricidade, trabalhada na Física.

Após a leitura do texto, iniciar a *apresentação dos números complexos ao seu aluno pelo seguinte problema:*

Em 1545, o matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576) publicou o livro “Ars Magna” (A grande arte), que tratava das regras da Álgebra. Nesta obra, um problema simples originou uma interminável discussão sobre um novo tipo de número: “Dividir o número 10 em duas partes, de modo que seu produto seja 40”.

Peça aos seus alunos que tentem resolver o problema. Em seguida os questione sobre a possibilidade de encontrar uma solução dentro do conjunto dos números reais? Então, solicite que eles utilizem o resultado encontrado e verifique se satisfaz o problema.

Na sala de informática, peça aos seus alunos que pesquisem sobre o assunto “números complexos”. Oriente-os para o enfoque em:

- Aspectos históricos;
- Necessidades para criação deste conjunto numérico;
- Tipos de aplicação para os números complexos.

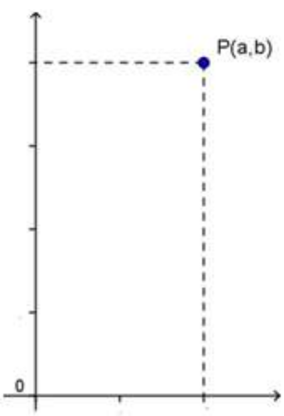
- Formas de representação, inicialmente a forma algébrica e a geométrica;
- Parte imaginária.

Como exemplo, citarei alguns sítios:

- ✓ http://www.brasilescola.com/matematica/numeros-complexos.htm
- ✓ http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/ncomplex/ncomplex.htm

Comente com seus alunos que a geometria fractal, além de produzir belas imagens, é também importante no estudo de sistemas dinâmicos, ou sistemas em movimento, que são imprevisíveis sob certas condições. O conhecimento de fractais é usado em várias soluções, como, por exemplo, na previsão do clima, no estudo do movimento das estrelas e galáxias do sistema solar, no estudo das bolsas de valores. Alguns dos fractais mais importantes são obtidos pela repetição de funções envolvendo números complexos. **Isso chamará a atenção dos alunos, pois são fatores ligados à fatos do cotidiano.**

Procure reforçar que da mesma forma que a cada número real pode-se associar um único ponto da reta real, assume-se que a cada elemento **z = a + bi** do conjunto dos números complexos corresponde um único ponto **P(a,b)** do plano cartesiano e vice-versa. A **parte real** de **z** é representada no **eixo das abscissas**, que é chamado de **eixo real**, e a **parte imaginária**, no **eixo das ordenadas**, que é o **eixo imaginário**.



Professor, mostre aos seus alunos que existem alguns recursos para trabalhar com os números complexos. O mais simples é a calculadora científica , que existem diversos modelos e marcas. Dentre os diversos modelos, utilizarem a Kenko 105B, mas qualquer calculadora científica pode ser utilizada, basta seguir as orientações do manual.

Por exemplo, para efetuar (2 + 1i) - (1 – 2i), faça:

Sequências de teclas						**Visor**	**Observações**
2ndf	→						Ativa o sistema de números complexos. (CPLX)
2	a	1	b	–		0	Informamos o número 2 para a parte real e 1 para a parte imaginária.
1	a	2	+/-	b	=	1	Valor da parte real
b						3	Valor da parte imaginária
2ndf	→						Desativa o sistema de números complexos.

O resultado da conta é 1 + 3i.

Outro recurso é o GeoGebra. Ele reúne **GEO**metria, ál**GEBRA** e cálculo. Esta disponível em http://www.geogebra.org/ em versão para download gratuito ou para ser executado via web (WebStart).

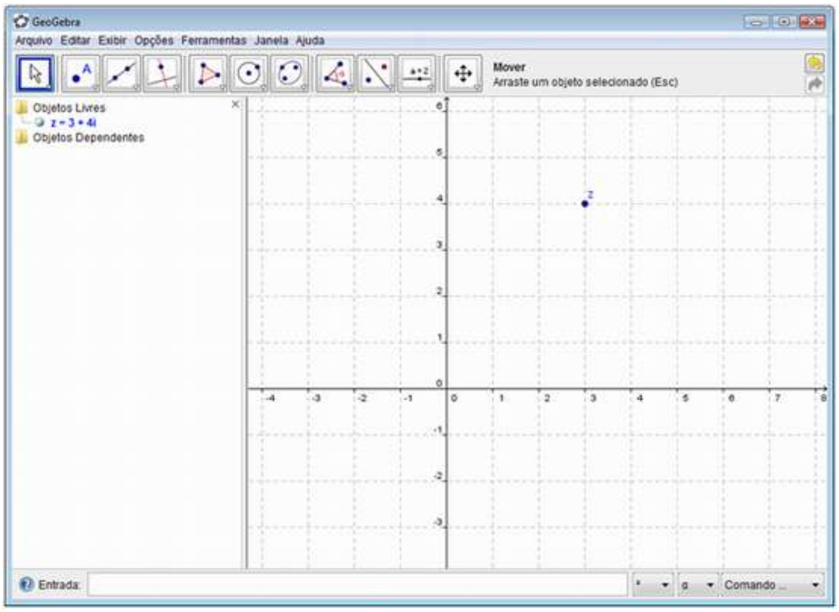
No caso desta atividade, tenha instalado previamente o GeoGebra em todos os computadores do laboratório de informática. Como documentação do software, temos:

- ✓ Manual disponível em: http://www.geogebra.org/help/docupt_BR.pdf
- ✓ Guia rápido de comandos, disponível em: http://cattai.mat.br/site/files/geogebra/guia_rapido_geogebra.pdf.

O GeoGebra não suporta números complexos diretamente, mas pode usar pontos para simular operações com números complexos

Exemplo associado ao descritor H36 (efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica)**:**

Se inserirmos *3+4i* na ***Entrada de Comandos***, obtém-se o ponto *(3, 4)* na ***Zona Gráfica***. As coordenadas deste ponto são mostradas na ***Zona Algébrica*** como *3+4i*.



Utilizando uma definição mais formal:

Chama-se conjunto dos números complexos, e representa-se por ***C***, o conjunto de pares ordenados, ou seja: **z = (x,y),** onde x pertence a **R** e y pertence a **R**.

Então, por definição, se z = (x,y) = (x,0) + (y,0)(0,1) onde i=(0,1), podemos escrever que:

$$Z = (x,y) = x + yi$$

Exemplos:

(5,3) = 5 + 3i
(2,1) = 2 + i
(-1,3)= -1 + 3i ...

Dessa forma, todo o números complexo **z = (x,y)** pode ser escrito na forma **z = x + yi**, conhecido como forma algébrica, onde temos:

x = Re(z), parte real de z
y = Im(z), parte imaginária de z

<u>Igualdade entre números complexos:</u>

Dois números complexos são iguais se, e somente se, apresentam simultaneamente iguais a parte real e a parte imaginária. Assim, se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos que:

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

<u>Adição de números complexos:</u>

Para somarmos dois números complexos basta somarmos, separadamente, as partes reais e imaginárias desses números. Assim, se $z = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos que:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)$$

<u>Subtração de números complexos:</u>

Para subtrairmos dois números complexos basta subtrairmos, separadamente, as partes reais e imaginárias desses números. Assim, se $z = a+ bi$ e $z_2 = c + di$, temos que:

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)$$

Potências de i

Se, por definição, temos que i = - $(-1)^{1/2}$, então:
$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i^2.i = -1.i = -i$
$i^4 = i^2.i^2=-1.-1=1$
$i^5 = i^4.\ 1=1.i= i$
$i^6 = i^5.\ i =i.i=i^2=-1$
$i^7 = i^6.\ i =(-1).i=-i$ ......

Observamos que no desenvolvimento de i^n (**n** pertencente a ***N***, com **n** variando, os valores repetem-se de **4** em **4** unidades. Desta forma, para calcularmos i^n basta calcularmos $\mathbf{i^r}$ onde **r** é o resto da divisão de **n** por **4**.

Exemplo:
i^{63} => 63 / 4 dá resto 3, logo $i^{63} = i^3 = -i$

Obs.: Exercícios para fixação serão aplicados após a segunda semana de atividade, pois na primeira semana a avaliação foi feita na sala de informática, de forma mais dinâmica.

- Atividade da segunda semana:

a) *Habilidades relacionadas a aula:*

- Multiplicação de números complexos;
- Conjugado de um número complexo;
- Divisão de complexos;
- Módulo de um número complexo.

b) *Pré-requisitos:* Saber trabalhar com as operações algébricas.

c) *Tempo de duração:* 4 aulas de 50 minutos cada

d) *Recursos educacionais utilizados:* Cadernos, livro didático e exercícios (aplicados de diversas formas) e cartelas para jogo.

e) *Organização da turma:* Ora individual, ora em dupla.

f) *Objetivos:* Apresentar todos os assuntos dentro do tema de maneira clara e conceitual, conciliando com o que já foi aprendido até o momento e, se possível relacionar com o cotidiano.

g) *Metodologia Adotada:*

- Listas de exercícios, para fixação;
- Desafio de duplas, para estimular o trabalho coletivo, a solidariedade, o respeito pela opinião dos outros e o convívio social.

Multiplicação de números complexos

Para multiplicarmos dois números complexos basta efetuarmos a multiplicacão dos dois binômios, observando os valores das potência de **i**. Assim, se $z_1=a+bi$ e $z_2=c+di$, temos que:

$$z_1.z_2 = a.c + adi + bci + bdi^2$$
$$z_1.z_2= a.c + bdi^2 = adi + bci$$
$$z_1.z_2= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Observar que : $i^2= -1$

Conjugado de um número complexo

Dado z=a+bi, define-se como conjugado de z (representa-se por z^-)
==> $z^-= a-bi$

Exemplo:
$z=3 - 5i \implies \bar{z} = 3 + 5i$
$z = 7i \implies \bar{z} = -7i$
$z = 3 \implies \bar{z} = 3$

Divisão de números complexos

Para dividirmos dois números complexos basta multiplicarmos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador.
Assim, se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos que:
$z_1 / z_2 = [z_1.\bar{z_2}] / [z_2\bar{z_2}] = [(a+bi)(c-di)] / [(c+di)(c-di)]$

Módulo de um número complexo

Dado $z = a+bi$, chama-se módulo de z ==> $| z | = (a^2+b^2)^{1/2}$.

ATIVIDADES PARA EXERCITAR:

Exercícios Resolvidos: (associados ao descritor H36 - efetuar cálculo envolvendo operações com números complexos na forma algébrica)

1 - Sejam os complexos $\mathbf{z_1 = (2x + 1) + yi}$ **e** $\mathbf{z_2 = -y + 2i}$. Determine **x** e **y** de modo que $z_1 + z_2 = 0$
Temos que:
$z_1 + z_2 = (2x + 1 - y) + (y + 2) = 0$
logo, é preciso que:
$2x + 1 - y = 0$ e $y + 2 = 0$
Resolvendo, temos que $\mathbf{y = -2}$ **e** $\mathbf{x = -3/2}$

2 - Determine **x**, de modo que **$z = (x + 2i)(1 + i)$** seja imaginário puro.

Efetuando a multiplicação, temos que:

$z = x + (x + 2)i + 2i^2$

$z= (x - 2) + (x + 2)i$

Para z ser imaginário puro é necessário que $(x - 2)=0$, logo **$x = 2$**

3 - Qual é o conjugado de **$z = (2 + i) / (7 - 3i)$**?

Efetuando a divisão, temos que:

$z = (2+ i) / (7 - 3i) . (7 + 3i) / (7 + 3i) = (11 + 3i) / 58$

O conjugado de Z seria, então **$z^{-} = 11/58 - 13i/58$**

4 - Os módulos de **$z_1 = x + 20^{1/2}i$** e **$z_2= (x - 2) + 6i$** são iguais, qual o valor de **x**?

Então, $|z_1| = (x^2 + 20)^{1/2} = |z_2| = [(x - 2)^2 + 36\}^{1/2}$

Em decorrência,

$x^2 + 20 = x^2 - 4x + 4 + 36$

$20 = -4x + 40$

$4x = 20$, logo **$x = 5$**

Obs.: Proponha aos alunos que façam os exercícios de fixação do livro didático, para ampliar o seu conhecimento e superar suas dificuldades.

Atividade Desafio: Jogo “Dominó dos Complexos”

- **Disposição dos Jogadores:**

Em duplas ou em grupos, mas as jogadas são individuais.

- **Material Necessário:**

Um jogo de peças para cada grupo (essas peças poderão ser confeccionadas pelo professor, ou pelos próprios alunos, seguindo o modelo abaixo).

$z = 3 + 2i$	$-z = 2 - i$	$-z = 4 - 7i$	$\bar{z} = 3 - 2i$
$z = 2 + i$	$z = 4 + 7i$	$\bar{z} = 4 - 7i$	$z = \dfrac{8 + 5i}{2}$
$z = -10 - 4i$	$z = -4 + 7i$	$-z = -4 + \dfrac{-5i}{2}$	$\bar{z} = \dfrac{-20 + 8i}{2}$

- **Desenvolvimento:**

Nessa adaptação do jogo “dominó” os alunos deverão juntar as peças, de forma que se una cada número ao seu oposto ou conjugado. Por exemplo:

$z = 2 + i$	$z = 4 + 7i$	$\bar{z} = 4 - 7i$	$z = \dfrac{8 + 5i}{2}$

Assim como no dominó tradicional vence aquele que conseguir colocar todas suas peças em jogo.

AVALIAÇÃO

A avaliação é um instrumento fundamental para se fornecer informações sobre como se está realizando o processo ensino-aprendizagem como um todo tanto para o professor e a equipe escolar conhecerem e analisarem os resultados do seu trabalho como para o aluno verificar o seu desempenho. E não simplesmente focalizar o aluno, seu desempenho cognitivo e o acúmulo de conteúdos para classificá-lo em ¨aprovado¨ ou ¨reprovado¨.

Trabalhando em dupla, com exercícios desafio (1 tempo de aula de 50 minutos), em que a dupla que erra determinada questão, sai do jogo, mas no final do mesmo tem a agradável surpresa de ter a explicação da questão que a eliminou, pela dupla que a propôs. Esta troca, faz com que um aluno ajude ao outro a tirar as suas dúvidas, mas sempre com a observação do professor. Este tipo de avaliação é muito importante, pois atinge objetivos surpreendentes. Foi trabalhado também o Jogo ¨Dominó dos Complexos¨, dentro das aulas, para minha observação. As aulas na sala de informática também são bem proveitosas, pois os alunos participam muito das atividades. Depois disso feito, pode-se incluir um trabalho-teste individual e com consulta (1 tempo de aula de 50 minutos), para aprofundamento do conteúdo com questões do Saerjinho, para verificar todo o conteúdo desse assunto.

Considerações Finais

O plano de tarefa foi preparado da melhor forma possível atendendo à algumas dificuldades das turmas de 3° ano. Porém a maioria traz problemas de interpretação e cálculos das séries anteriores, dificultando um pouco o trabalho, fazendo com que haja a necessidade de que se faça uma revisão de certos conteúdos, para atingirmos nossos objetivos.

As turmas gostam muito de exercícios desafios com jogos ou não. Então consegui chegar a um resultado de regular a bom, quando foram propostos esses tipos de atividades. As aulas na sala de informática também são muito boas. Seria bom trabalhar mais com isso, pois consigo prender a atenção deles, porém nem sempre é possível.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Roteiros de Ação – Números Complexos – Curso de Aperfeiçoamento – CECIERJ - 3° ano do Ensino Médio – 3° bimestre/2012 –http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 3/9/2012.

- MATEMATICA PAIVA, 3° Ano/Manoel PAIVA – 1a Edição – São Paulo: Moderna, 2009.

- Texto do Electro Man (fonte retirada da introdução ao Números Complexos do Campo conceitual 1 – Planejamento da Formação continuada SEEDUC).

- Endereços eletrônicos acessados de 2/9/2012 à 3/9/2012, citados/utilizados ao longo do trabalho:
  - ✓ http://www.brasilescola.com/matematica/numeros-complexos.htm
  - ✓ http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/ncomplex/ncomplex.htm
  - ✓ http://www.somatematica.com.br/emedio/funcao1/funcao1_2.php
  - ✓ http://www.geogebra.org/
  - ✓ http://www.mundovestibular.com.br/articles/4619/1/NUMEROS-COMPLEXOS/Paacutegina1.html
  - ✓ http://portaldoprofessor.mec.gov.br/