Formação Continuada em Matemática

Fundação CECIERJ / Consórcio CEDERJ

MATEMÁTICA - 3º ANO – 2º Bimestre /2013

Plano de trabalho

PROBABILIDADE

Tarefa 01

Cursista: Fabiano Battemarco da Silva Martins

fb.sm@bol.com.br

Tutor (a): SUSI CRISTINE BRITTO FERREIRA

O Currículo Mínimo inicia o conteúdo do primeiro bimestre do terceiro ano do Ensino Médio com o conteúdo Probabilidade que está dentro do campo numérico aritmético. Tal conteúdo segmenta-se da seguinte forma: probabilidade da união de eventos, probabilidade de eventos complementares e probabilidade condicional.

Resolver problemas utilizando a probabilidade da união de eventos, probabilidade de eventos complementares e probabilidade condicional não é algo simples, visto que os alunos são habituados à memorização e repetição metódica dos cálculos aritméticos. Para elaborar esse plano de trabalho, buscamos livros e recursos que usassem a linguagem o mais simplista possível e de maneira que possam ser adaptadas de acordo com o aprendizado da turma durante o bimestre, algumas questões foram retiradas de apostilas e do site http://www.saerjinho.caedufjf.net/diagnostica/ que é um banco de dados que fornece questões a partir das habilidades selecionadas. Sabemos que o plano de trabalho dificilmente entra em ação em sua totalidade, pois durante o percurso algumas coisas podem ser adicionadas, retiradas ou adaptadas. O livro didático adotado na escola é o do autor Manoel Paiva, que na apresentação do livro traz sintetizado a forma como esse plano foi traçado.

> As transformações do Ensino Médio brasileiro nos últimos anos visam, entre outros objetivos, a um aprendizado voltado para a continuação dos estudos e ao mundo do trabalho. Por isso, uma das orientações do Ministério da Educação para o Ensino Médio é recorrer a situações práticas, que possibilitem o trânsito entre as disciplinas escolares e suas aplicações na indústria, no comércio, em serviços etc. Além dessas orientações, comuns a todas as disciplinas, os documentos oficiais enfatizam: "A Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo e instrumental, mas deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas". Essa ênfase tem a finalidade de alertar sobre os exageros da visão pragmática da ciência, que podem pôr em risco a aquisição do pensamento matemático. Neste livro, seguimos essas orientações, recorrendo frequentemente a aplicações práticas, destacando, porém, a Matemática como conhecimento científico e, como tal, evolutivo e sistêmico. Enfim, buscamos um ponto de equilíbrio entre ciência e prática. (PAIVA, 2010)

2. Estratégias adotadas no Plano de Trabalho:

O plano de trabalho está divido em aulas, cada dia com dois tempos de cinquenta minutos cada aula. São lecionados na turma de 3° ano do Ensino Médio quatro tempos de aula por semana e nosso cronograma prevê durante o quarto bimestre trinta e seis tempos de aula por bimestre (sendo desprezadas aqui as avaliações externas, culminância de projetos da escola) que são destinadas para a aplicação de dois Planos de Trabalho, então faço uma previsão de dezoito tempos para cada Plano de Trabalho, mas acredito que a aplicação do Plano de Trabalho de Estatística (medidas de centralidade e dispersão) dure um tempo maior do que o Plano de Trabalho de Probabilidade. As aulas são divididas em conceitos e resolução de exercícios de acordo com o aprendizado da turma.

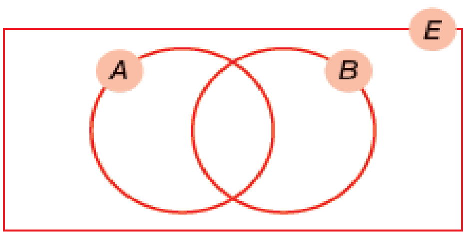
Atividade 1: Desenvolvimento - 1ª e 2ª aula

Habilidade relacionada: Resolver problemas utilizando a probabilidade da união de eventos.

- **Pré-requisitos:** Calcular a probabilidade de um evento.
- **Tempo de Duração:** 100 minutos.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Nenhum.
- **Organização da turma:** Individual.
- **Objetivos:** Compreender a probabilidade da união de eventos e a probabilidade de eventos complementares utilizando a resolução de problemas.
- **Metodologia adotada:** No momento inicial, analisaremos o seguinte problema:

Entre os 800 candidatos que participam de um concurso, precisamente: 380 falam inglês, 260 falam francês e 140 falam inglês e francês. Escolhendo ao acaso um dos candidatos que participam desse concurso, qual é a probabilidade de ele falar inglês ou francês?

Para calcular a probabilidade pedida, vamos indicar por *E* o conjunto dos candidatos que prestam o concurso, por *A* o conjunto dos candidatos que falam inglês e por *B* o conjunto dos candidatos que falam francês.



Note que o conjunto dos candidatos que falam inglês **ou** francês é $A \cup B$ e que o conjunto dos candidatos que falam inglês **e** francês é $A \cap B$.

Da teoria dos conjuntos, temos: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Portanto: $n(A \cup B) = 380 + 260 - 140 \Rightarrow n(A \cup B) = 500$.

Assim, concluímos que a probabilidade de que o candidato escolhido fale inglês **ou** francês é:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{N(E)} = \frac{500}{800} = \frac{5}{8}.$$

Teorema da adição de probabilidades

Resolvendo genericamente o problema anterior, obtemos um importante resultado da teoria das probabilidades. Acompanhe. Sendo *A* e *B* dois eventos de um espaço amostral equiprovável *E*, finito e não vazio, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

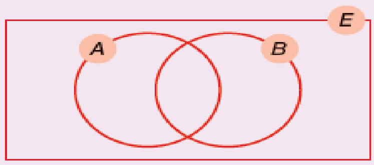
Dividindo por $n(E)$ essa identidade, obtemos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(E)} = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(B)}{n(E)} - \frac{n(A \cap B)}{n(E)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Podemos agora enunciar o resultado a seguir, conhecido como **teorema da adição de probabilidades**.

Sendo *A* e *B* eventos de um espaço amostral equiprovável *E*, finito e não vazio, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Esse teorema é aplicado quando queremos calcular a probabilidade de ocorrer um evento *A* ou um evento *B*, pois o conectivo “ou” indica a união dos dois eventos.

EXEMPLOS:

1) Com o objetivo de avaliar a deficiência de vitaminas na alimentação das crianças de determinada região, foram examinadas 800 crianças, constatando-se que entre elas: 385 apresentavam deficiência de vitamina A, 428 apresentavam deficiência de vitamina C e 47 não apresentavam deficiência dessas vitaminas. Selecionando, ao acaso, uma dessas crianças, qual é a probabilidade de ela ter deficiência das duas vitaminas, A e C?

Resolução

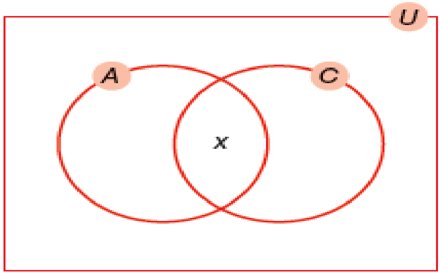
Sejam:

• *U* o conjunto universo das crianças examinadas;

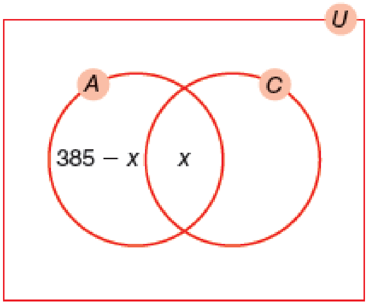
• *A* o conjunto das crianças com deficiência de vitamina A;

• *C* o conjunto das crianças com deficiência de vitamina C.

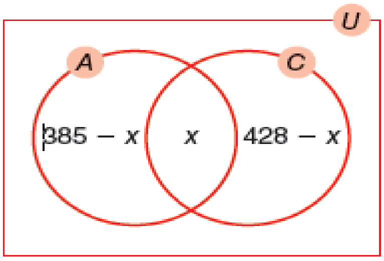
Precisamos determinar o número de elementos do conjunto $A \cap C$, isto é, o número de crianças que apresentam deficiência dos dois tipos de vitamina: A e C. Indicando por ***x*** o número de crianças nessas condições, vamos representar a incógnita ***x*** na região correspondente a $A \cap C$:



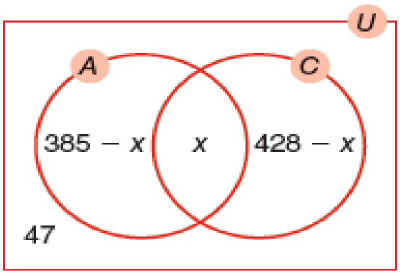
O conjunto *A* é o das crianças com deficiência de porém já foram consideradas x crianças do conjunto *A*. Portanto, faltam (385 - *x*) crianças para completar esse conjunto:



O conjunto *C* é o das crianças com deficiência de vitamina C. Tal conjunto possui 428 elementos, porém já foram consideradas *x* crianças do conjunto *C*. Logo, faltam (428-*x*) crianças para completar esse conjunto.



Finalmente representamos no diagrama as 47 crianças que não apresentavam deficiência de nenhuma das vitaminas, A ou C, completando assim o conjunto universo *U*:



Lembrando que o conjunto *U* é formado pelas 800 crianças examinadas, temos:

$(385 - x) + x + (428 - x) + 47 = 800 \Rightarrow x = 60$

Ou seja, 60 crianças apresentavam deficiência de vitamina A e de vitamina C. Logo, a probabilidade *P* de a criança selecionada ter deficiência das duas vitaminas é dada por:

$$P(A \cap C) = \frac{n(A \cap C)}{n(U)} = \frac{60}{800} = \frac{3}{40} = 7{,}5\%$$

2) No lançamento de um dado, qual a probabilidade de sair um número par ou maior que 2?

Solução: Observe que o problema consiste em determinar a probabilidade de ocorrer um evento ou outro, ou seja, a probabilidade da união de dois eventos. Primeiro passo para resolução desse tipo de problema é determinar os eventos A e B e o espaço amostral. O espaço amostral consiste no conjunto de todos os resultados possíveis. Assim, temos que:

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} → Uma vez que no lançamento de um dado pode sair qualquer número entre 1 e 6.

Vamos determinar os eventos A e B.

Evento A: sair um número par.
A = {2, 4, 6}

Evento B: sair um número maior que 2.
B = {3, 4, 5, 6}

Precisamos, também, determinar o conjunto A ∩ B, que consiste nos elementos que são comuns aos dois conjuntos. Assim, teremos:
A ∩ B = {4, 6}

Feitas as identificações dos conjuntos, podemos utilizar a fórmula da probabilidade da união para chegar à solução.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

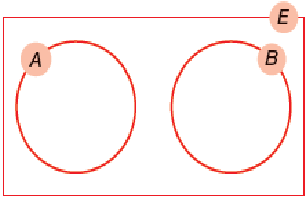
$$P(A \cup B) = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6}$$

$$P(A \cup B) = \frac{3 + 4 - 2}{6} = \frac{5}{6}$$

Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos, A e B, são mutuamente exclusivos se, e somente se, $A \cap B = \varnothing$.



Nesse caso, temos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\varnothing)$, e portanto: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Assim:

Se dois eventos, A e B, são mutuamente exclusivos, então: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

EXEMPLOS:

1) Considere o experimento: lançamento de um dado. Qual a probabilidade de sair um número maior que 5 ou um número ímpar?

Solução: Temos que:

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Chamaremos de A o evento: sair um número maior que 5.

A = {6}

Chamaremos de B o evento: sair um número ímpar.

B = {1, 3, 5}

Note que A∩B = ø.

Assim, teremos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6}$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

2) Se retirarmos aleatoriamente uma carta de baralho com 52 cartas, qual a probabilidade de ser um 8 ou um Rei?

Sendo S o espaço amostral de todos os resultados possíveis, temos: n(S) = 52 cartas.

Considere os eventos:

A: sair 8 .... P(A) = 8/52

B: sair um rei .... P(B) = 4/52

Assim, P(A ou B) = 4/52 + 4/52 – 0 = 8/52 = 2/13

Atividade 2: Desenvolvimento - 3ª e 4ª aula

Habilidade relacionada: Resolver problemas utilizando a probabilidade de eventos complementares e a probabilidade condicional.

- **Pré-requisitos:** Calcular a probabilidade de um evento.
- **Tempo de Duração:** 100 minutos**.**
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Nenhum
- **Organização da turma:** Individual.
- **Objetivos:** Compreender a probabilidade de eventos complementares e a probabilidade condicional utilizando a resolução de problemas.

Metodologia adotada: Nesse momento aprofundaremos o estudo sobre a probabilidade da união de eventos.

Vamos resolver alguns exercícios:

1) Em um país de 30 milhões de habitantes, 22 milhões têm menos de 25 anos de idade e 18 milhões têm mais de 22 anos. Escolhendo ao acaso um habitante desse país, qual é a probabilidade de ele ter mais de 22 anos e menos de 25 anos de idade?

2) Em uma classe de 2o ano do ensino médio, precisamente 64% dos alunos leem jornal, 48% leem revista e 10% não leem jornal nem revista. Escolhendo um desses alunos ao acaso, qual é a probabilidade de que ele seja leitor de jornal e de revista?

3) Uma pesquisa constatou que, dos 500 alunos de uma escola, 290 já se vacinaram contra a febre amarela, 350 já se vacinaram contra a gripe H1N1 e 120 não tomaram nenhuma dessas vacinas. Escolhendo um desses alunos ao acaso, qual é a probabilidade de ele ter tomado as duas vacinas?

4) Numa urna há 20 bolinhas numeradas de 1 a 20. Uma delas é retirada aleatoriamente. Qual a probabilidade de que o número indicado seja múltiplo de 5 ou de 7?

5) Numa urna existem 10 bolas numeradas de 1 a 10. Retirando uma bola ao acaso, qual a probabilidade de ocorrer múltiplos de 2 ou múltiplos de 3?

6) Uma pesquisa foi realizada em um aeroporto com 80 mulheres e 60 homens que iriam embarcar em um dos voos. Constatou-se que 30 mulheres e 20 homens iriam viajar de avião pela primeira vez, e que os demais já haviam voado antes.
Escolhendo um desses passageiros ao acaso, qual é a probabilidade de obter uma mulher ou um passageiro que vai voar pela primeira vez?

7) No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de que o número obtido na face superior seja múltiplo de 2 ou de 3?

8) Em uma pesquisa realizada na EsPCEx com uma turma de 30 alunos, constatou-se que:
15 alunos conhecem a cidade do Rio de Janeiro;
12 alunos conhecem a cidade de São Paulo;
9 alunos conhecem ambas as cidades.
Escolhendo ao acaso um aluno dessa turma, a probabilidade de que ele conheça a cidade do Rio de Janeiro ou a cidade de São Paulo é:

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{3}{10}$ (E) $\frac{9}{10}$

9) Se dois dados, azul e branco, forem lançados, qual a probabilidade de sair 5 no azul e 3 no branco?

10) Uma turma é composta de 9 alunos de Economia, 14 de Administração e 21 de Contábeis. Deseja-se eleger ao acaso uma comissão de dois alunos dessa turma. Calcule a probabilidade de que esta comissão seja formada por:

a) Alunos só da Economia.

b) Um aluno da Economia e outro de outro curso.

c) Um aluno da Economia e outro da Contábeis.

d) Dois alunos da Administração ou dois da Contábeis.

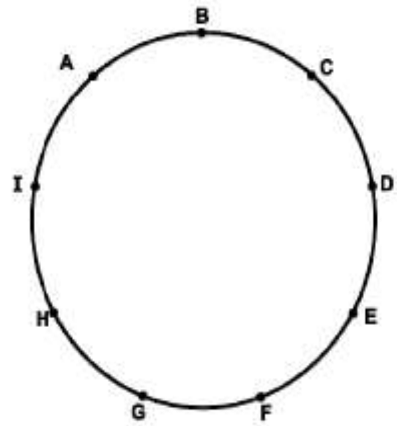
11) Retirando-se 2 cartas ao acaso de um baralho comum, qual é a probabilidade de se obterem 2 figuras ou 2 cartas de espadas?

12) Uma urna contém cinco bolas vermelhas, três bolas azuis e quatro bolas brancas. Retira-se, ao acaso, uma bola da urna. Qual é a probabilidade de sair uma bola vermelha ou uma bola azul?

13) (UFMA-2003) Três vestibulandas deixaram as suas bolsas em uma determinada sala em que prestaram exame vestibular. No dia seguinte, o fiscal devolveu uma bolsa para cada uma delas de maneira aleatória, pois não se recordava a quem pertencia cada bolsa. Qual a probabilidade de que as bolsas tenham sido devolvidas corretamente, cada uma à sua dona?

a) 1/4
b) 1/3
c) 1/5
d) 1/6
e) 1/8

14) (UFMA – 2007) Considere que os pontos destacados na circunferência abaixo são os vértices de um eneágono regular.



Qual é a probabilidade de se escolher um triângulo eqüilátero dentre os possíveis triângulos formados pelos pontos destacados acima?

a) 1/84
b) 3/28
c) 0
d) 1/3
e) 1/28

15) (UECE – 2006) O conjunto X possui seis elementos pertencentes ao intervalo $[-2, -1]$ e o conjunto Y possui oito elementos pertencentes ao intervalo $[5, 7]$. De quantos modos é possível escolher quatro elementos em $X \cup Y$ cujo produto seja positivo?

a) 495
b) 500
c) 505
d) 510

Atividade 3: Desenvolvimento - 5ª e 6ª aula

Habilidade relacionada: Resolver problemas utilizando a probabilidade de eventos complementares e a probabilidade condicional.

- **Pré-requisitos:** Calcular a probabilidade de um evento.
- **Tempo de Duração:** 100 minutos**.**
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Nenhum
- **Organização da turma:** Individual.
- **Objetivos:** Compreender a probabilidade de eventos complementares e a probabilidade condicional utilizando a resolução de problemas.
- **Metodologia adotada:**

PROBABILIDADE DE EVENTOS COMPLEMENTARES

Uma urna contém bolas coloridas. Retirando-se uma bola dessa urna, a probabilidade de se obter uma bola vermelha é 0,64. Qual é a probabilidade de se obter uma bola que não seja vermelha?

SOLUÇÃO:

Indicando por *A* o evento formado pelas bolas vermelhas, o complementar de *A* é o evento *A* formado pelas bolas não vermelhas. Sabemos que:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Logo:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$$

Portanto, a probabilidade de se obter uma bola que não seja vermelha é 0,36.

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Um lote é formado pelos seguintes artigos: 80 não defeituosos e 20 defeituosos. Dois artigos são retirados do lote. Sejam A={o 1º artigo é defeituoso} e B={o 2º artigo é defeituoso}.Calcule P(A) e P(B):

a) com reposição;

SOLUÇÃO:

Se extrairmos com reposição, $P(A) = P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$, pois cada vez que estivermos extraindo do lote, existirão 20 peças defeituosas no total de 100.

Este exemplo mostra a necessidade de se introduzir o seguinte conceito.
Sejam A e B dois eventos associados ao experimento E, denotaremos por P(B/A) a ***probabilidade condicionada*** do evento B, *quando* A tiver ocorrido.
Sempre que calcularmos P(B/A), estaremos essencialmente calculando P(B) em relação ao *espaço amostral reduzido* A, em lugar de fazê-lo em relação ao espaço original Ω.

b) sem reposição.

SOLUÇÃO:

Se estivermos extraindo sem reposição, é ainda verdade que $P(A) = \frac{1}{5}$. Mas e sobre P(B)? É evidente que, a fim de calcularmos P(B) é necessário conhecer a composição do lote no momento de se extrair a segunda peça. Isto é, devemos saber se A ocorreu ou não.

Atividade 4: Desenvolvimento - 7ª e 8ª aula

Habilidade relacionada: Resolver problemas utilizando a probabilidade de eventos complementares e a probabilidade condicional.

- **Pré-requisitos:** Calcular a probabilidade de um evento.
- **Tempo de Duração:** 100 minutos**.**
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Nenhum
- **Organização da turma:** Individual.
- **Objetivos:** Compreender a probabilidade de eventos complementares e a probabilidade condicional utilizando a resolução de problemas.
- **Metodologia adotada:** Nesse momento aprofundaremos o estudo sobre a probabilidade de eventos complementares e a probabilidade condicional utilizando a resolução de problemas.

Vamos resolver alguns exercícios:

1) (PUC-SP) Serão sorteados 4 prêmios iguais entre os 20 melhores alunos de um colégio, dentre os quais estão Tales e Euler. Se cada aluno pode receber apenas um prêmio, a probabilidade de que Tales ou Euler façam parte do grupo sorteado é:

2) (UFC) Duas equipes disputam entre si uma série de jogos em que não pode ocorrer empate e as duas equipes têm as mesmas chances de vitória. A primeira equipe que conseguir duas vitórias seguidas ou três vitórias alternadas vencerá a série de jogos. Qual a probabilidade de uma equipe vencer a série de jogos com duas vitórias seguidas?

3) Numa cidade, 20% dos carros são da marca *W*, 25% dos carros são táxis e 60% dos táxis não são da marca *W*.
Determine a probabilidade de que um carro escolhido ao acaso, nessa cidade, não seja táxi nem seja da marca *W*.

4) Uma indústria farmacêutica fez uma estimativa da eficiência de um medicamento para tratamento de determinada doença, ministrando-o a um grande número de pessoas portadoras dessa doença. Os resultados obtidos, classificados em três

categorias: *Cura*, *Melhora* (mas não cura total) e *Nenhuma alteração*, são mostrados na tabela abaixo.

Resultado	%	Probabilidade
Cura	70	0,7
Melhora	20	0,2
Nenhuma alteração	10	0,1

Considere a experiência aleatória que consiste em selecionar 4 pessoas portadoras da doença, ministrar-lhes o medicamento e determinar em que categoria o resultado se enquadra. Sendo *P* a probabilidade de a 1a pessoa apresentar melhora a 2a e a 3a não terem qualquer alteração e a 4ª ser curada, calcule p.10^4.

5) Uma urna contém cinco bolas idênticas, numeradas de 1 a 5. Uma bola é retirada da urna aleatoriamente e seu número é observado. Se for um número ímpar, essa bola será deixada fora da urna, mas, se for par, ela retornará à urna. Em ambos os casos uma segunda bola é retirada. A probabilidade de que ela apresente um número par é:

a) 32% b) 46% c) 48% d) 52% e) 64%

6) (Fuvest-SP) Dois triângulos congruentes, com lados coloridos, são indistinguíveis se podem ser sobrepostos de tal modo que as cores dos lados coincidentes sejam as mesmas. Dados dois triângulos eqüiláteros congruentes, cada um de seus lados é pintado com uma cor escolhida dentre duas possíveis, com igual probabilidade. A probabilidade de que esses triângulos sejam indistinguíveis é de:

7) Uma escola comprou computadores de três fabricantes: *A*, *B*, *C*. Trinta por cento foram comprados de *A*, trinta por cento de *B*, e o restante de *C*. A probabilidade de um computador fabricado por *A* apresentar algum tipo de problema, nos próximos 30 meses, é 0,1. As mesmas probabilidades dos fabricantes *B* e *C* são, respectivamente, 0,15 e 0,2.

a) Qual a probabilidade de que um computador escolhido ao acaso seja fabricado por *A* e represente algum problema nos próximos 30 meses?

b) Se um computador apresentar algum problema nos próximos 30 meses, qual a probabilidade de que tenha sido fabricado por *A*?

8) Uma loja colocou à venda 27 calças *jeans*, das quais 6 apresentam defeito. Escolhendo-se 3 calças ao acaso, a probabilidade de as 3 estarem com defeito é:

- **Referências:**

NERY, CHICO. **Matemática para o Ensino Médio**, Volume Único, 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

PACCOLA, HERVAL; BIANCHINI, EDWALDO. **Curso de Matemática**, Volume Único, 2. Ed. São Paulo: Moderna, 1998.

PAIVA, MANOEL RODRIGUES. **Matemática: Paiva**, Volume 3, 2.ed. São Paulo: Moderna, 2010.

- **Endereços eletrônicos acessados de 29/10/2012 a 14 /09/2012.**

http://2.bp.blogspot.com/_5lutUHN9gkk/TJqGjPdRTeI/AAAAAAAAAAc/M7wiTObdBNg/s1600/polin%C3%B4mio.JPG

http://www.coladaweb.com/exercicios-resolvidos/exercicios-resolvidos-de-matematica/polinomios

http://exercicios.brasilescola.com/matematica/exercicios-sobre-polinomios.htm

http://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=3&cad=rja&ved=0CCwQFjAC&url=http%3A%2F%2Fprofessorwaltertadeu.mat.br%2FGABlistaconceitodepolinomios2009.doc&ei=U4iOUKHwG4bq9AT7t4DgBA&usg=AFQjCNEf86DAtvjVSku135D38jLvg108aA

http://www.rdmf.mat.br/arquivos/downloads/251de62a8678ab157202d39793c20029.pdf