Formação Continuada em MATEMÁTICA

Fundação CECIERJ/ Consórcio CEDERJ

Matemática 1º Ano – 3º Bimestre / 2012

Trigonometria na Circunferência

Acesso 15/09/2012 – http://www.flickr.com/photos/proforestes/5185896159/in/photostream

Tarefa 2

Cursista: **Rosângela Luiz Ferreira**

Tutora: **Ângela Santos**

S u m á r i o

Introdução

A Trigonometria apareceu há milhares de anos, com a finalidade de ajudar o estudo dos triângulos. Agora, o tema será abordado de uma forma mais abrangente devido as necessidades. Nesse novo contexto os conceitos de seno, cosseno e tangente serão apresentados na circunferência.

É importante mostrar para o aluno que o círculo Trigonométrico é o centro. Os arcos são definidos e situados nos quadrantes e assim, são introduzidas as reduções à primeira volta do círculo.

Sendo assim introduzindo à unidade de medida **Radiano.**

Os conceitos estudados a seguir servirão de base para o desenvolvimento de outros: por exemplo, para estudar as funções trigonométricas ou para escrever um número complexo na forma trigonométrica (3º ano).

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1

- **HABILIDADE RELACIONADA: H21 – C1** Converter em graus a medida de um arco dado em radianos, a qual não exceda duas voltas da circunferência unitária ; **C2** Converter em radianos a medida de um arco dado em graus, a qual não exceda duas voltas da circunferência unitária.

- **PRÉ-REQUISITO:** Arcos e ângulos na Circunferência

- **TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos

- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Material concreto (tampa de um pote de maionese, CD, disco que vem separando a pizza etc e barbante, tesoura e caneta) para uma atividade experimental.

- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Em duplas para não gerar tumultos.

- **OBJETIVOS:** Que o aluno consiga transitar pelo ciclo trigonométrico reconhecendo posições, arcos e ângulos; relacionar com correção as unidades de medida de arcos e ângulos.

METODOLOGIA ADOTADA: O conteúdo será inserido com a atividade prática que segue abaixo com o objetivo de informar todos os aspectos do tema que será tratado, no caso, A CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA. Após isso, abordar os tópicos descritos abaixo.
E para um entendimento mais claro uma atividade dirigida com o Software geogebra.

Atividade

Observação: Todas as propostas a seguir o aluno deverá representá-la através de desenho.

- Circundamos o objeto com o barbante e denominamos as extremidades obtidas de A e H.

- Por A, esticamos o barbante como um diâmetro obtendo o ponto C.

- Dobramos ao meio o pedaço e obtemos o raio do objeto, localizando o ponto B.

- Fazemos marcas sucessivas, para localizar os pontos D, E, F e G: serão seis marcas e sobrará um pedaço de barbante .

- Com precisão, o pedaço restante corresponde a cerca de 28% do raio, isto é "cabe" aproximadamente 6,28 vezes na circunferência: é a fórmula do comprimento da circunferência.

- Voltando ao objeto circular, circunde-o novamente.

- Tomando um par de pontos consecutivos (exceto A e G) e unindo-os ao centro, obtemos um arco de medida 1 rad (seu comprimento é igual ao raio). Decorre daí, também que a medida da circunferência é, em radianos, igual a 2π.

1 rad equivale a aproximadamente 57°

A partir desta atividade apresentarei o ciclo trigonométrico. Este trabalho será realizado em duas etapas: 0 a 2π (1 volta) e, depois que o aluno já adquiriu certa familiaridade com o ciclo, estender para IR (demais voltas, em qualquer sentido). Entenda-se por familiaridade o aluno fazer a correta leitura do seno, do cosseno e da tangente de um número real x (ou de um arco de medida x rad), com $0 \leq x \leq 2\pi$; reconhecer simetrias e regularidade no ciclo; "reduzindo corretamente ao primeiro quadrante".

O papel da trigonometria

A palavra Trigonometria é formada por três radicais gregos: tri (três), gonos (ângulos) e metron (medir). Daí vem seu significado mais amplo: Medida dos Triângulos, assim através do estudo da Trigonometria podemos calcular as medidas dos elementos do triângulo (lados e ângulos).

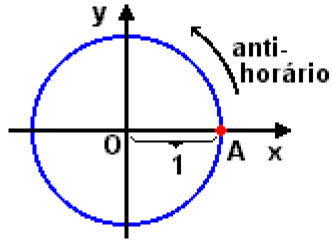
Com o uso de triângulos semelhantes podemos calcular distâncias inacessíveis, como a altura de uma torre, a altura de uma pirâmide, distância entre duas ilhas, o raio da terra, largura de um rio, entre outras.

A Trigonometria é um instrumento potente de cálculo, que além de seu uso na Matemática, também é usado no estudo de fenômenos físicos, Eletricidade, Mecânica, Música, Topografia, Engenharia entre outros.

Ponto móvel sobre uma curva

Consideremos uma curva no plano cartesiano. Se um ponto P está localizado sobre esta curva, simplesmente dizemos P pertence à curva e que P é um ponto fixo na mesma. Se assumirmos que este ponto possa ser deslocado sobre a curva, este ponto receberá o nome de ponto móvel.

Um ponto móvel localizado sobre uma circunferência, partindo de um ponto A pode percorrer esta circunferência em dois sentidos opostos. Por convenção, o sentido anti-horário (contrário aos ponteiros de um relógio) é adotado como sentido positivo.

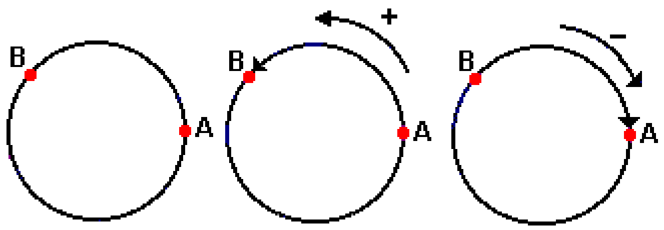


Arcos da circunferência

Se um ponto móvel em uma circunferência partir de A e parar em M, ele descreve um arco AM. O ponto A é a origem do arco e M é a extremidade do arco.

Quando escolhemos um dos sentidos de percurso, o arco é denominado *arco orientado* e simplesmente pode ser denotado por AB se o sentido de percurso for de A para B e BA quando o sentido de percurso for de B para A.

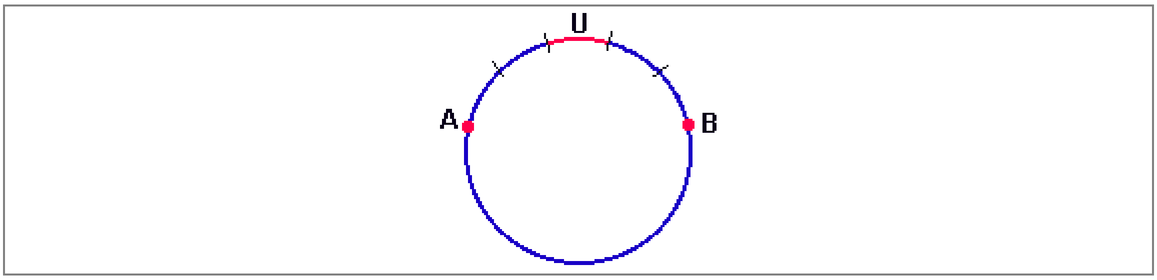
Quando não consideramos a orientação dos arcos formados por dois pontos A e B sobre uma circunferência, temos dois arcos não orientados sendo A e B as suas extremidades.



Medida de um arco

A medida de um arco de circunferência é feita por comparação com um outro arco da mesma circunferência tomado como a unidade de arco. Se u for um arco de comprimento unitário (igual a 1), a medida do arco AB, é o número de vezes que o arco u cabe no arco AB.

Na figura em anexo, a medida do arco AB é 5 vezes a medida do arco u. Denotando a medida do arco AB por m(AB) e a medida do arco u por m(u), temos m(AB)=5 m(u).



A medida de um arco de circunferência é a mesma em qualquer um dos sentidos. *A medida algébrica* de um arco AB desta circunferência, é o comprimento deste arco, associado a um sinal positivo se o sentido de A para B for anti-horário, e negativo se o sentido for horário.

O número pi

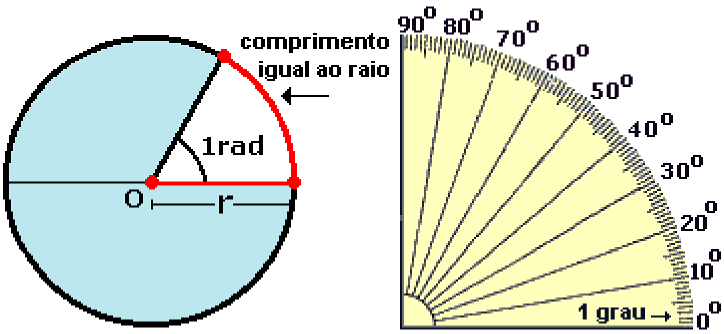
Para toda circunferência, a razão entre o perímetro e o diâmetro é constante. Esta constante é denotada pela letra grega π, que é um número irracional, isto é, não pode ser expresso como a divisão de dois números inteiros. Uma aproximação para o número π é dada por:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950...$$

Unidades de medida de arcos

A unidade de medida de arco do Sistema Internacional (SI) é o *radiano*, mas existem outras medidas utilizadas pelos técnicos que são o *grau* e o *grado*. Este último não é muito comum.

Radiano: Medida de um arco que tem o mesmo comprimento que o raio da circunferência na qual estamos medindo o arco. Assim o arco tomado como unidade tem comprimento igual ao comprimento do raio ou 1 radiano, que denotaremos por 1 rad.



Grau: Medida de um arco que corresponde a 1/360 do arco completo da circunferência na qual estamos medindo o arco.

Grado: É a medida de um arco igual a 1/400 do arco completo da circunferência na qual estamos medindo o arco.

Exemplo: Para determinar a medida em radianos de um arco de comprimento igual a 12 cm, em uma circunferência de raio medindo 8 cm, fazemos,

$$m(AB)=\frac{\text{comprimento do arco(AB)}}{\text{comprimento do raio}}=\frac{12}{8}$$

Portanto m(AB)=1,5 radianos

Arcos de uma volta

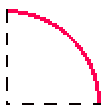
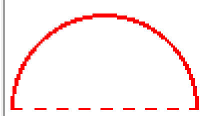
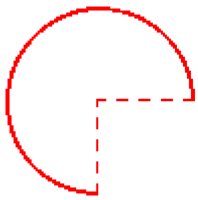
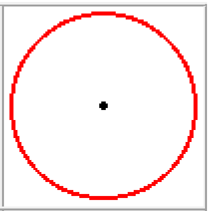
Se AB é o arco correspondente à volta completa de uma circunferência, a medida do arco é igual a $C=2\pi r$, então:

$$m(AB)=\frac{\text{comprimento do arco(AB)}}{\text{comprimento do raio}}=\frac{2\pi r}{r}=2\pi$$

Assim a medida em radianos de um arco de uma volta é 2π rad, isto é,

2π rad=360 graus

Podemos estabelecer os resultados seguintes

Desenho				
Grau	90	180	270	360
Grado	100	200	300	400
Radiano	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

0 graus = 0 grado = 0 radianos

Mudança de unidades

Consideremos um arco AB de medida R em radianos, esta medida corresponde a G graus. A relação entre estas medidas é obtida pela seguinte proporção,

2πrad .... 360 graus
R rad .... G graus

Assim, temos a igualdade $R/2\pi=G/360$, ou ainda,

R =   G

$$\frac{}{\pi} \quad \frac{}{180}$$

Exemplos

1. Para determinar a medida em radianos de um arco de medida 60 graus, fazemos

$$\frac{R}{\pi} = \frac{60}{180}$$

2. Assim R=π/3 ou 60 graus=π/3 rad
3. Para determinar a medida em graus de um arco de medida 1 radiano, fazemos:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{G}{180}$$

4. Assim 1 rad=180/π graus.

Atividades

1. O pêndulo de um relógio de parede descreve um ângulo de 60º e sua extremidade percorre um arco AB. Calcule o comprimento desse arco sabendo que o pêndulo tem 0,60 m de comprimento.

2. Quanto mede o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às:

a) 8 h e 20 min

b) 5 h e 40 min

3. Sabendo que a medida da roda de um carro de fórmula 1 é igual a 207,24 cm, determine o seu diâmetro. Adote π igual a 3,14.

4.Encontre os arcos simétricos, em relação ao eixos x e y e em relação à origem O, dos arcos de medida:

a) 4π/ 5 rad

b) 320º

5. Um automóvel percorre 157 m em uma pista circular, descrevendo um arco de 72º. Determine o raio da curva. Use a aproximação π = 3,14.

Qual a medida, em graus, do ângulo de 1 radiano? Qual a medida, em radianos, do ângulo de 1 grau.

exercício 2 Como se relaciona a medida em graus e em radianos de um mesmo arco na circunferência trigonométrica?

exercício 3 Calcule em radianos: 30º, 60º, 75º, -120°, 136°, 1360°, -1360°.

exercício 4 Calcule em graus:

3 rad, $\frac{\pi}{4}$ rad, $\frac{5\pi}{6}$ rad, $\frac{7\pi}{12}$ rad, 8 rad.

exercício 5 Calcule qual a medida em radianos do ângulo formado pelos ponteiros do relógio às 13h 15min.

exercício 6 Calcule qual a medida em graus do ângulo formado pelos ponteiros do relógio às 15h 15min.

exercício 7 Qual o comprimento do arco descrito pelo ponteiro dos minutos de um relógio cujo mostrador tem 5 cm de diâmetro, após ter passado 1 hora?

exercício 8 Quantas voltas serão dadas na circunferência trigonométrica para se representar os números $\frac{25\pi}{12}$ e –12?

exercício 9 Se um ponto P da circunferência trigonométrica corresponde a um número x real, qual é a forma dos outros números que também correspondem a esse mesmo ponto?

Atividade 2

- **HABILIDADE RELACIONADA: H21 – C1** Converter em graus a medida de um arco dado em radianos, a qual não exceda duas voltas da circunferência unitária ; **C2** Converter em radianos a medida de um arco dado em graus, a qual não exceda duas voltas da circunferência unitária.

- **PRÉ-REQUISITO:** Arcos e ângulos na Circunferência

- **TEMPO DE DURAÇÃO:** 100 minutos

- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:** Software GeoGebra; Folha de atividades; Laboratório de Informática / Projetor Multimídia e Notebook .

- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Em duplas para não gerar tumultos.

- **OBJETIVOS:** Expandir e aprofundar o estudo da Trigonometria, complementando assim o que foi estudado anteriormente.

METODOLOGIA ADOTADA: O conteúdo já foi inserido com a atividade prática, e para que haja um entendimento mais claro do conteúdo a atividade será realizada no Software GeoGebra. Após isso, abordar os tópicos descritos abaixo.

Observação: Por não dominar completamente o GeoGebra, eu não criei um exercício, aproveitei o que foi sugerido no Plano de Ação.

Após a atividade no laboratório os alunos escreverão suas conclusões.

Laboratório de Informática:

1. Abra uma tela do *GeoGebra*.

2. Trace uma circunferência clicando no botão (6º menu de botões). Dessa forma, você construirá uma circunferência de centro A e que passa pelo ponto B. Logo, podemos considerar o segmento *AB* como sendo o raio dessa circunferência.

3. Marque o segmento *AB* :
   - Clique no botão (3º menu de botões)
   - Clique nos pontos A e B.

   Pronto! O segmento *AB* está marcado.

4. Vamos medir o segmento AB?
   - Clique no botão (8º menu de botões)
   - Clique sobre o segmento *AB* .
   - Surgirá a expressão *a* = ... no canto esquerdo da tela (Janela da Álgebra).
   - Clique em (1º menu de botões).

Agora, você pode mover os pontos livres do seu desenho. Clique no ponto B e movimente-o. Repare que o raio da circunferência variará à medida que você altera a posição do ponto B.

- Observe o que acontece para os valores de *a*.

Note que esse valor indica exatamente o tamanho do raio da circunferência.

4. Marque agora um ponto C sobre a circunferência: clique em (2º menu de botões); em seguida, clique em um ponto sobre a circunferência distinto de B.

6. Marque o segmento *AC* . Caso tenha dúvidas consulte o item 3 acima.

Qual a medida de *AC* ? Ela é a mesma de *AB* ? Por quê?

Com os três pontos A, B e C é possível traçar ângulos. Estamos interessados no ângulo cujo vértice é o ponto A, ou seja, o centro da circunferência. Esse ângulo BÂC determina sobre a circunferência o arco $\overset{\frown}{BC}$.

Vamos construir esse arco.

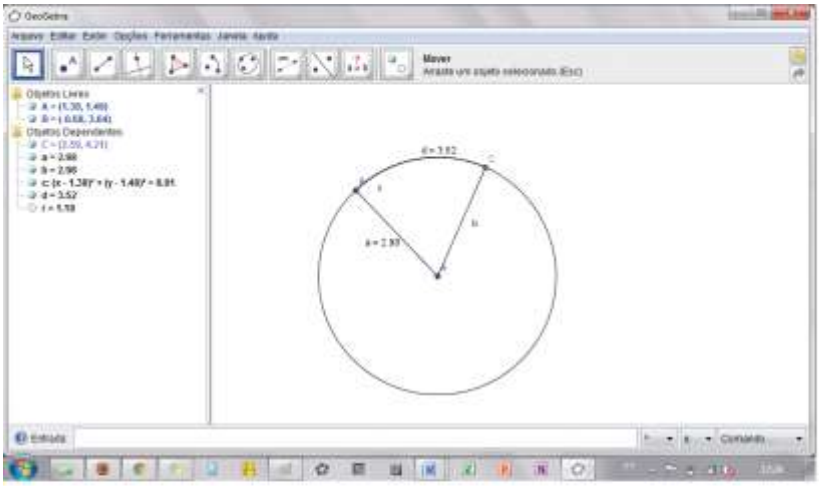
Clique no botão (6º menu de botões), e, sequencialmente, em A, B e C.

Surgirá o arco $\overset{\frown}{BC}$ indicado por d. Observe no canto esquerdo da tela, na "Janela da Álgebra", que aparece associada ao objeto "d" uma medida, que indica o comprimento do arco $\overset{\frown}{BC}$, ou seja, a medida linear desse arco.

7. Vamos agora usar a relação que define o radiano, calculando a razão r entre o comprimento do arco e o do raio da circunferência.

Digite na caixa Entrada (parte inferior da tela) r=d/a seguido de ENTER.

Na Janela de Álgebra (parte esquerda da tela) você verá o resultado *r* = *...*, que indicará o valor da razão. *d r a* = . Repare que, conforme a definição, r é a medida em radianos do ângulo BAC e do arco □*BC* .



Tela do *GeoGebra.*

8. Experimente agora fazer C variar.
O que acontece com os valores de r?

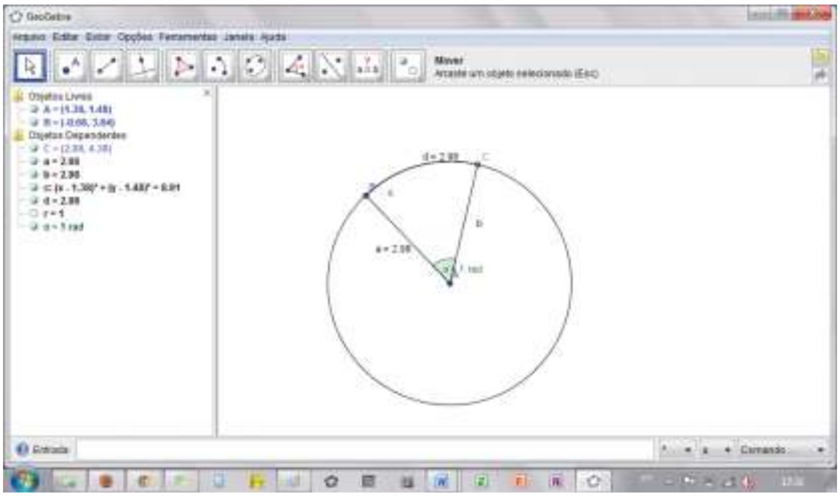
9. Tente colocar o ponto C numa posição tal que o comprimento do arco □*BC* seja exatamente o valor do raio da circunferência, inçados na janela da álgebra por *a* e *b*. O que acontece com o valor de r? Observe na janela de Álgebra.

É isso mesmo, vale 1! E sabe o que isso significa?

Que o arco □*BC* tem medida 1rad, assim como o ângulo central *BÂC* também tem medida 1rad.

10. O *GeoGebra* também tem uma ferramenta para medir ângulos em graus ou em radianos. Vamos usá-la para medir o ângulo *BÂC* ?

Clique no botão (8º menu de botões) e a seguir, sequencialmente, nos pontos B, A e C – você passará a ver a medida do ângulo *BÂC* em graus. Vamos mudar a unidade para radianos? No menu *Opções/Unidade de medida de ângulos* selecione *radianos* e observe a medida do ângulo *BÂC* .



Radianos

Unidade para medir circunferências
Normalmente, os ângulos são medidos em graus. Mas existe uma outra medida também bastante utilizada medir uma circunferência (ou um arco): os **radianos**, utilizados especialmente para o caso de operações representadas no círculo trigonométrico. Para começar, lembre-se de que o ângulo correspondente a uma volta completa vale 360°.

Se o comprimento de arco da circunferência trigonométrica (raio 1) for calculado:

$C = 2 \cdot \pi \cdot r$ sendo r o raio, que no caso vale 1, logo:

$C = 2\pi$ é o comprimento desta circunferência que mede 360°, então:

$2\pi = 360°$

Esta nova medida de um arco de circunferência é chamada de radiano, com a abreviatura *rad*.

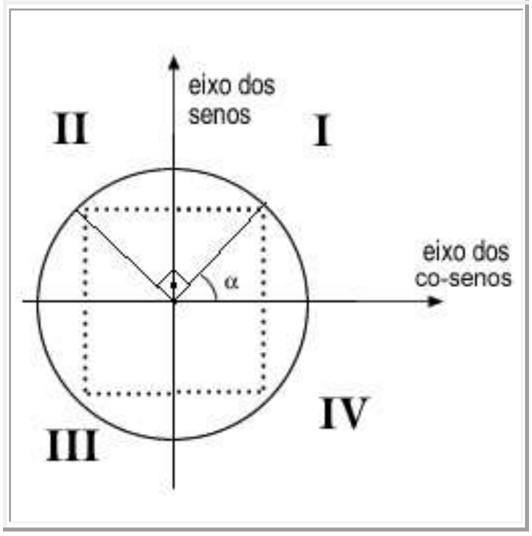
Veja abaixo a correspondência entre os ângulos em graus e radianos:

Arcos em graus	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
Arcos em radianos	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$

A conclusão a que se chega é que um arco de circunferência pode ser medido pelo ângulo central (em graus) ou pelo seu comprimento (em radianos).

Seno e co-seno nos quadrantes do círculo trigonométrico

Note o ângulo a e a+90° na figura abaixo:



Note que nos quadrantes I e II os ângulos possuem o mesmo seno e co-senos de mesmo valor, mas de sinais contrários, sendo negativo no quadrante II.

Analisando o que acontece nos quadrantes III e IV obtém-se a seguinte tabela.

Quadrante	I	II	III	IV
Seno	+	+	-	-
Co-seno	+	-	-	+

Se a fosse, por exemplo, 45° (ou $\pi/4$ rad) seria:

Quadrante	45°	135°	225°	315°
Seno	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
Co-seno	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Tente resolver para os outros ângulos notáveis .

E como ficaria a tangente?

Veja:

Quadrante	45°	135°	225°	315°
Tangente	1	- 1	1	- 1

É só usar a fórmula:

$$tgx = \frac{senx}{\cos x}$$

Tente construir o círculo trigonométrico, com o eixo das tangentes e verificar o quadro acima.

Exercícios

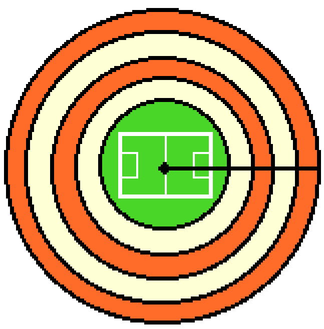
1. Um arco AB de uma circunferência tem comprimento L. Se o raio da circunferência mede 4 cm, qual a medida em radianos do arco AB, se:

   (a) L=6cm (b) L=16cm (c) L=22cm (d) L=30cm

2. Em uma circunferência de raio R, calcule a medida de um arco em radianos, que tem o triplo do comprimento do raio.

3. Um atleta percorre 1/3 de uma pista circular, correndo sobre uma única raia. Qual é a medida do arco percorrido em graus? E em radianos?

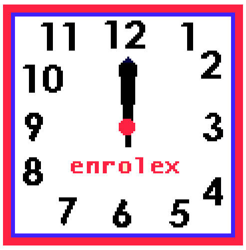
4. Em uma pista de atletismo circular com quatro raias, a medida do raio da circunferência até o meio da primeira raia (onde o atleta corre) é 100 metros e a distância entre cada raia é de 2 metros. Se todos os atletas corressem até completar uma volta inteira, quantos metros cada um dos atletas correria?



5. Qual é a medida (em graus) de três ângulos, sendo que a soma das medidas do primeiro com o segundo é 14 graus, a do

segundo com o terceiro é 12 graus e a soma das medidas do primeiro com o terceiro é 8 graus.

6. Qual é a medida do ângulo que o ponteiro das horas de um relógio descreve em um minuto? Calcule o ângulo em graus e em radianos.



7. Os dois ponteiros de um relógio se sobrepoem à 0 horas. Em que momento os dois ponteiros coincidem pela primeira vez novamente?

8. Calcular o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio que marca 12h e 20minutos.

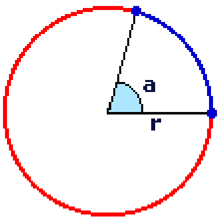
9. Em um polígono regular um ângulo externo mede pi/14 rad. Quantos lados tem esse polígono?

10. Escreva o ângulo a=12°28' em radianos.

11. Escreva o ângulo a=36°12'58" em radianos.

12. Dados os ângulos x=0,47623rad e y=0.25412rad, escreva-os em graus, minutos e segundos.

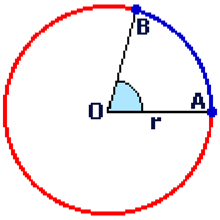
13. Em uma circunferência de raio r, calcular a medida do arco subtendido pelo ângulo A em cada caso:



a. A=0°17'48" r=6,2935cm

b. A=121°6'18" r=0,2163cm

14. Em uma circunferência de centro O e raio r, calcule a medida do ângulo AÔB subtendido pelo arco AB nos seguintes casos.



a. AB=0,16296 cm r=12,587cm.

b. AB=1,3672cm r=1,2978cm.

15. Em uma circunferência, dado o comprimento do arco AB e o ângulo AÔB subtendido a este arco, calcule a medida do raio.

a. AÔB=0°44'30" AB=0,032592cm

b. AÔB=60°21'6" AB=0,4572cm

Avaliação

A avaliação tem como objetivo informar como está o processo de ensino – aprendizagem e a partir daí o professor fazer uma análise do seu trabalho e os alunos verificarem seu desempenho.

A avaliação deve ser contínua e processual e isso se dará mediante observações feitas em sala de aula e através de grupos de discussões sobre as questões matemáticas; nesse tipo de discussão, podem ser avaliadas a compreensão das ideias matemáticas envolvidas, a argumentação, a aptidão para interpretar e discutir situações em que tais ideias estejam presentes.

Enfim, vale resaltar que não existe instrumento único para o sistema de avaliação, o qual deve sempre contemplar a participação dos alunos nas atividades regulares, seu desempenho em atividades específicas e os diferentes tipos de produção, incluindo os instrumentos de autoavaliação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ROTEIROS DE AÇÃO – Trigonometria na Circunferência – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio – 3° bimestre/2012

http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 04/09/2012.

SMOLE, Kátia.S; DINIZ, Maria Ignez . Matemática Ensino Médio, Volume 2 – 6ª Edição – São Paulo: Saraiva, 2009.

IEZZI, Gelson, et al, MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÃO, Volume 2 / – 6ª Edição – São Paulo: Saraiva, 2010.

Endereços eletrônicos acessados de 04/09/2012 a 17/09/2012, citados ao longo do trabalho:

http://www.flickr.com/photos/proforestes/5185896159/in/photostream

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonom/trigo01-a.htm

http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/trigonometricas/circunferencia/exercicios/exercicios.htm

http://educacao.uol.com.br/matematica/radianos-unidade-para-medir-circunferencias.jhtm