Marcus Vinícius Dionísio da Silva (Angra dos Reis) – 9ª série – Grupo 1

Tutora: Emílio Rubem Batista Júnior

Assunto: Equação Polinomial do 2° Grau

1. Introdução:

Este plano de aula tem o objetivo geral de mostrar aos alunos um processo geométrico para resolução da equação do 2° Grau, tendo em vista a dificuldade dos mesmos nesse assunto.

É importante construir junto com os alunos a solução da equação polinomial do 2 ° Grau e mostrar que a geometria pode ser útil para resolução da mesma, através do processo do complemento de quadrados.

1.1 Pré-requisitos:

Antes de desenvolver o plano, relembrar com os alunos alguns conteúdos como: operações com números inteiros e racionais; raiz quadrada e área de figuras planas.

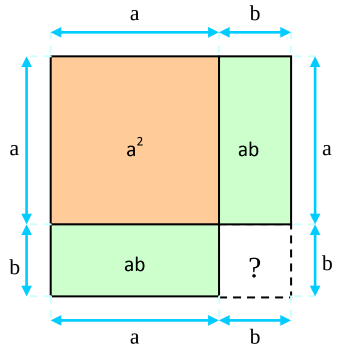
1.2 Tempo de duração: 100 minutos

2. Desenvolvimento:

2.1 Ações:

(Método Al-Khowarizmi)

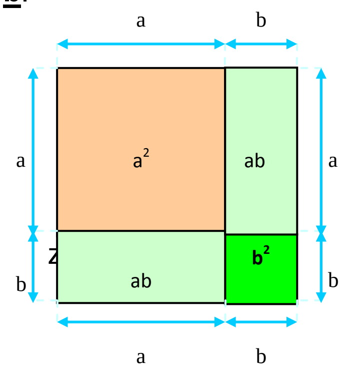
1° Análise do Abstrato: Mostrar aos alunos um quadrado de lado **a** e dois retângulos de lados **a** e **b**, e questionar os alunos se juntarmos as figuras, o que ficaria faltando para completar o quadrado.



2° Análise do Concreto: Um quadrado e dois retângulos feitos de papel cartão.

3. Entendimento:

A aprendizagem obtida pode usar questões dos livros didáticos, pois será possível o entendimento de situações completas e também visualizações das mesmas. Nessa etapa é possível já compreender que devemos acrescentar um quadrado de lado **b**, para formar um quadrado de lado **a** + **b**.



Pela figura, vemos que:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

4. Cálculos:

*Equação Polinomial do 2° Grau é toda equação escrita na forma ax²+bx+c=0, com **a** diferente de **0**.*

Aplicando a interpretação geométrica acima, vamos resolver a equação de 2º grau com uma incógnita:

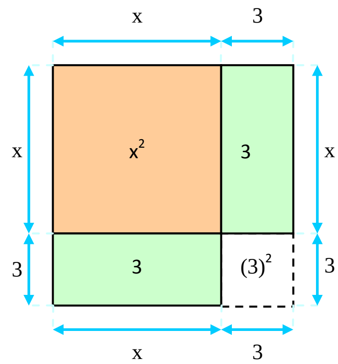
$X^2 + 6x + 8 = 0$

Considerando a expressão $X^2 + 6x$, temos:

$X^2 + 6x = X^2 + 2(3x)$

Área de um retângulo cujo os lados medem 3 e x

Área de um quadrado cujo o lado mede x



Pela figura, observamos que é necessário acrescentar $(3)^2$ à expressão dada, ou seja, 9, para obter um quadrado.

Descoberto geometricamente o valor que devemos acrescentar a expressão $x^2 + 6x$, voltamos a equação dada:

$x^2 + 6x + 8 = 0$

$x^2 + 6x = -8$ → Principio aditivo

$\underbrace{x^2 + 6x + 9}_{\text{Trinômio quadrado perfeito}} = -8 +9$ → Principio de equivalência das equações

Fatorando o trinômio quadrado prefeito do primeiro membro, temos:

$(x + 3)^2 = 1$

Daí:

$(x+3) = +\sqrt{1}$ $x + 3 = +1$ $x = +1 - 3$ $x = -2$	**ou**	$(x+3) = -\sqrt{1}$ $x + 3 = -1$ $x = -1 - 3$ $x = -4$

Logo, S = {- 4 – 2 } e os números – 4 e – 2 são as raízes da equação.

Denominação:

Denomina-se equação do segundo grau, toda a equação do tipo **ax^2+bx+c**, com coeficientes numéricos **a**.**b** e **c** com $a \neq 0$.

Exemplos:

Equação	a	b	c
x^2+2x+1	1	2	1
$5x-2x^2-1$	-2	5	-1

Classificação:

- Incompletas: Se um dos coeficientes (**b** ou **c**) for nulo, temos uma equação do 2º grau incompleta.

1º caso: b=0

Considere a equação do 2º grau incompleta:

$x^2-9=0$ » $x^2=9$ » $x=\pm\sqrt{9}$ » $x=\pm 3$

2º caso: c=0

Considere a equação do 2º grau incompleta:

$x^2-9x=0$ » Basta fatorar o fator comum x
$x(x-9)=0$ » $x=0,9$

3º caso: b=c=0

$2x^2=0$ » $x=0$

4.1 Resolução de equações do 2º grau: (Método de Bháskara)

A resolução de equações do 2º grau incompletas já foi explicada acima, vamos agora resolver equações do 2º grau completas, ou seja, do tipo $ax^2+bx+c=0$ com **a**, **b** e **c** diferentes de zero.

Uma equação do 2º grau pode ter até 2 raízes reais, que podem ser determinadas pela fórmula de Bháskara.

Como Bháskara chegou até a fórmula de resolução de equações do 2º grau?

Considerando a equação: $ax^2+bx+c=0$, vamos determinar a fórmula de Bháskara:

Multiplicamos os dois membros por 4a:

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$
$$4a^2x^2+4abx=-4ac$$

Somamos b^2 aos dois membros:

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$$

Fatoramos o lado esquerdo e chamamos de Δ(delta) b^2-4ac:

$$(2ax+b)^2=\Delta$$

$$2ax+b=\pm\sqrt{\Delta}$$

$$2ax=-b\pm\sqrt{\Delta}$$

Logo:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$ ou $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Fórmula de Bháskara:

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Utilizando a fórmula de Bháskara, vamos resolver alguns exercícios:

1) $3x^2-7x+2=0$

a=3, **b**=-7 e **c**=2

$\Delta = b^2 - 4ac$ = $(-7)^2-4.3.2 = 49-24 = 25$

Substituindo na fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2.3} = \frac{7 \pm 5}{6}$$

$$x = \frac{7+5}{6} = 2 \quad \text{e} \quad x = \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Logo, o conjunto verdade ou solução da equação é:

$$V = \left\{ \frac{1}{3}, 2 \right\}$$

2) $-x^2+4x-4=0$

a=-1, **b**=4 e **c**=-4

$\Delta = b^2 - 4ac$ = $4^2-4.-1.-4 = 16-16 = 0$

Substituindo na fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-4 \pm 0}{-2}$$ » x=2

$$V = \{2\}$$

Neste caso, tivemos uma equação do 2º grau com duas raízes reais e iguais. ($\Delta = 0$)

3) $5x^2-6x+5=0$

a=5 **b**=-6 **c**=5

$\Delta = b^2 - 4ac$ = $(-6)^2-4.5.5 = 36-100 = -64$

Note que Δ<0 e não existe raiz quadrada de um número negativo. Assim, a equação não possui nenhuma raiz real.

Logo: $V=\emptyset$» vazio

Propriedades:

$\Delta > 0$	Duas raízes reais e diferentes
$\Delta = 0$	Duas raízes reais e iguais
$\Delta < 0$	Nenhuma raiz real

4.2 Relações entre coeficientes e raízes

$Soma = -\dfrac{b}{a}$	$Produto = \dfrac{c}{a}$

Vamos provar as relações descritas acima:

Dado a equação ax²+bx+c=0, com $a \neq 0$e $\Delta \geq 0$, suas raízes são:

$$x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

A soma das raízes será:

$$x + x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Logo, a soma das raízes de uma equação do 2º grau é dada por: $S = -\dfrac{b}{a}$

O produto das raízes será:

$$x.x = \frac{(-b+\sqrt{\Delta}).(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2-\sqrt{\Delta}^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Logo, o produto das raízes de uma equação do 2º grau é dada por:

$$P = \frac{c}{a}$$

Podemos através da equação $ax^2+bx+c=0$, dividir por **a**.

Obtendo: $ax^2 + bx + c = \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}$

Substituindo por $S = -\frac{b}{a}$ e $P = \frac{c}{a}$:

Obtendo a **Soma e Produto de uma equação do 2º grau**:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

Exemplos:

1) Determine a soma e o produto das seguintes equações:

a) $x^2 - 4x + 3=0$

[Sol] Sendo a=1, b=-4 e c=3:

$$S = -\frac{b}{a} = 4 \qquad P = \frac{c}{a} = 3$$

b) $2x^2 - 6x - 8 = 0$

Sendo a=2, b=-6 e c=-8

$$S = -\frac{b}{a} = 3 \quad P = \frac{c}{a} = -4$$

c) $4 - x^2 = 0$

Sendo a=-1, b=0 e c=4:

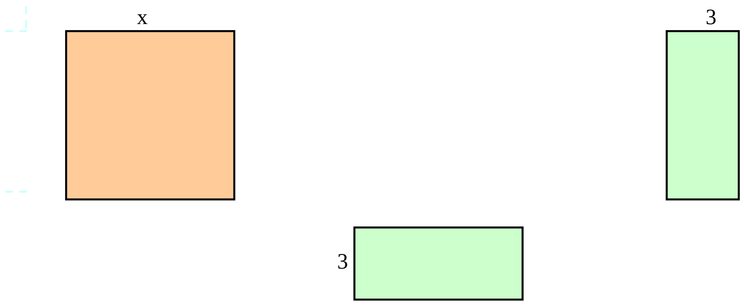
$$S = -\frac{b}{a} = 0 \quad P = \frac{c}{a} = -4$$

5. Atividades:

1) Solicitar que os próprios alunos descrevam com suas palavras o que entenderam sobre a aula.

2) Montagem:

a) Através de um quadrado de lado **x** e dois retângulos de lados: **3** e **x** formar um polígono e completar um quadrado de lado **x+3.**



b) Achar a área de cada figura.

c) Acha um produto notável através do quadrado obtido.

d) Usando o processo de complemento de quadrado, determinar o conjunto solução da seguinte equação do 2° Grau, no conjunto R: $x^2-6x+8=0$

Jogo das Equações

O jogo:

Material necessário
- Duas folhas de cartolina, uma branca e outra amarela, por equipe;
- Canetas hidrográficas;

Participantes
- Equipes de 4 alunos;

Objetivo
- Agrupar o maior número de pares de cartas;

Regras
- Deverá ser escrita uma equação do 2° grau em cada carta branca. A solução correspondente a cada equação deverá ser escrita em uma carta amarela.
- Para iniciar o jogo, cada grupo deverá embaralhar as cartas separando as amarelas em um monte. Esse monte terá as faces com as soluções viradas para baixo e ficará no centro da mesa.
- As cartas brancas deverão ser distribuídas igualmente para os componentes do grupo. Cada elemento do grupo irá observar as equações descritas nas cartas brancas, mas não deixará os demais componentes observarem suas cartas.
- Uma a uma, as cartas amarelas serão viradas, no centro da mesa. Os jogadores irão observar suas cartas e verificar se há alguma equação cuja solução seja a indicada pela carta amarela exposta. Caso isso ocorra, o jogador deverá pegar a carta amarela e formar o par equação-solução separando-as em um monte.
- Ganha a rodada o jogador que primeiro formar os cinco pares equação-solução.

Modelo de equações

Branca (Equações)	Amarela (solução)	Branca (Equações)	Amarela (solução)
$2x^2 + 3x - 5 = 0$	$S = \{-\frac{5}{4}; 1\}$	$2x^2 - 5x - 3 = 0$	$S = \{-\frac{1}{2}; 3\}$
$x^2 - 7x + 10 = 0$	$S = \{2; 4\}$	$6x^2 - 5x + 1 = 0$	$S = \{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$
$x^2 - 2x + 1 = 0$	$S = \{1\}$	$x^2 - x - 2 = 0$	$S = \{-1; 2\}$
$x^2 - 10x + 9 = 0$	$S = \{1; 9\}$	$x^2 - x + 20 = 0$	$S = \{-4; 5\}$
$x^2 + 3x^2 - 4 = 0$	$S = \{-4; 1\}$	$x^2 - 7x + 6 = 0$	$S = \{1; 6\}$
$x^2 - 3x - 4 = 0$	$S = \{-1; 4\}$	$x^2 - 3x + 2 = 0$	$S = \{1; 2\}$
$x^2 + 6x + 5 = 0$	$S = \{-5; -1\}$	$x^2 - 6x + 9 = 0$	$S = \{3\}$
$x^2 + 4x + 3 = 0$	$S = \{-3; -1\}$	$x^2 - 4x - 5 = 0$	$S = \{-1; 5\}$
$x^2 + 12x + 20 = 0$	$S = \{-10; -2\}$	$x^2 - 6x + 8 = 0$	$S = \{2; 4\}$
$x^2 + 2x - 15 = 0$	$S = \{-5; 3\}$	$x^2 - 3x + 2 = 0$	$S = \{1; 2\}$

Através do jogo das Equações os alunos desenvolvem o conhecimento adquirido nas etapas acima, de uma forma dinâmica e significativa.

6. Avaliação:

Mediante os procedimentos e participação dos alunos nas atividades os indicadores para a avaliação poderão ser:

- O aluno soube identificar uma equação?
- O aluno que teve mais facilidade no jogo?

Descritores avaliados:

H57 – resolver problemas envolvendo função do 2º grau;

H62 – reconhecer a representação algébrica ou gráfica da função polinomial do 2º grau.

7. Referências Bibliográficas:

CASTRUCCI; GIOVANNI; JR. Giovanni. A conquista da matemática. São Paulo: Editora FTD, 2002. 8ª Série.

Endereços eletrônicos acessados entre 06/05 e 13/05:

http://www.somatematica.com.br

http://www.aprenderbrincando.com.br

Roteiros de ação e textos – Números reais e radiciação – Curso de Formação Continuada. FUNDAÇÃO CICIERJ - 9º Ano do Ensino Fundamental – 2º bimestre
Disponível em http://www.projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/

8. Recursos:

Livro didático, quadro, aulas expositivas, régua e compasso.