Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos:

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhar Ideias	Zero para que te quero!	de 15 a 20 min	Em duplas com discussão coletiva	Individual
2	Um novo olhar ...	Cadê o meu voo?	de 25 a 35 min.	Em duplas com discussão coletiva	Individual
3	Fique por dentro!	Tão diferentes e tão parecidas!	de 15 a 20 min.	Em duplas com discussão coletiva	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor se tiver dúvidas.			

Apresentação

Em algum momento de nosso dia a dia, nos deparamos com dados, muitas vezes numéricos, organizados em estruturas especiais em forma de linhas e colunas. Sendo assim, no Ensino Médio, é fundamental que os alunos compreendam essas estruturas como matrizes e identifiquem sua importância. Na primeira etapa, apresentamos um texto e alguns questionamento sobre diferentes operações envolvendo o número zero e o seu significado como elemento neutro. Na segunda etapa, apresentamos uma situação que trabalha a organização de dados em uma tabela e em uma matriz. Finalmente, na terceira etapa, discutimos a adição de matrizes e abordamos a matriz nula como o elemento neutro desta operação e ainda levamos os alunos a pensarem na subtração de matrizes, bem como nas matrizes opostas.

Como sempre, você terá possibilidade de fazer algumas escolhas entre usar mais ou menos tempo nas atividades aqui propostas ou enfatizar algum ponto que considere mais crucial para os seus alunos.

Bom trabalho!

2. O texto não menciona as operações com o número zero, contudo elas têm algumas particularidades. Complete o quadro a seguir e depois discuta um pouco com o seu colega a respeito do que vocês observam.

472	–		=	0
215	–		=	215
53	×	0	=	
0	÷		=	0
	+	4533	=	4533
14027	–		=	0
	×	19	=	0
	÷	15	=	0

Resposta

472	–	*472*	=	0
215	–	*0*	=	215
53	×	*0*	=	*0*
0	÷	*31255*	=	0
0	+	4533	=	4533
14027	–	*14027*	=	0
0	×	19	=	0
0	÷	15	=	0

3. O que acontece quando se adiciona zero a algum número?

Resposta

O valor do número não se altera.

4. Em Matemática, um elemento neutro é aquele cuja utilização numa operação não causa alteração no outro elemento, independente de realizarmos essa operação à esquerda ou à direita. Nesse sentido, o que você pode afirmar sobre o número zero em relação à operação de adição?

Professor

0	÷		=	0

qualquer número diferente de zero pode ser colocado. Certifique-se de que, ao preencherem o quadro, os alunos compreendam que 0 dividido por um número qualquer, diferente de zero, é o próprio zero, enquanto que a divisão pelo número zero não está definida. Sugerimos que você retome o fato de que a divisão pode ter o significado de partilha. Para isso, dê exemplos diversificados, nos quais eles possam explorar essa ideia. Por exemplo, dividir uma coleção de 10 canetas para 5 alunos, na qual o resultado é a quantidade de canetas que cada aluno irá receber. Assim 10 ÷ 5 = 2. Seguindo esta ideia, você pode ainda mencionar a divisão de zero canetas para esse mesmo grupo de 5 alunos, na qual cada aluno receberá zero canetas, ou, ainda, que 0 ÷ 5 = 0. Conclua o raciocínio falando por fim em dividir 10 canetas para zero alunos, e que essa ação não faz sentido, justificando assim, de uma maneira que faça algum sentido para o aluno, a impossibilidade da divisão pelo zero.

- *No item 4, apresentamos uma descrição informal do elemento neutro e esperamos que os alunos consigam perceber que o zero é o mesmo elemento da adição. Já no item 5, questionamos se o zero pode ser o elemento neutro da subtração. Neste momento, você deve explicar que, para ser um elemento neutro, a ordem em que a operação ocorre não deve alterar o resultado. Dessa maneira, a subtração não possui elemento neutro, pois para qualquer número a temos que $a - 0 = a$, mas $0 - a \neq a$.*

Segunda Etapa

Um novo olhar...

35 MINUTOS

Atividade • Cadê o meu voo?

Objetivo

Entender a matriz como uma forma de organização de dados.

Descrição da Atividade

Professor, nesta atividade pretendemos que o aluno explore os elementos de matrizes quadradas, observando a linha e a coluna a que pertencem, e propiciando também uma investigação quanto à simetria da matriz. Veja a proposta a seguir.

Suponha que dos aeroportos de 5 cidades partam voos diários. As rotas existentes entre as cidades estão representadas pelas setas no desenho a seguir.

3. Você e seu colega devem preencher a tabela a seguir. Para isso, devem preencher com o número 1, quando existir voo direto partindo de uma cidade para a outra, e com o número zero, caso contrário.

		CIDADES DE CHEGADA				
		A	**B**	**C**	**D**	**E**
CIDADES DE PARTIDA	A		1			
	B	0			0	
	C		1			
	D				0	1
	E	0				

Resposta

		CIDADES DE CHEGADA				
		A	**B**	**C**	**D**	**E**
CIDADES DE PARTIDA	A	*0*	1	*1*	*1*	*0*
	B	0	*0*	*0*	0	*1*
	C	*1*	1	*0*	*0*	*0*
	D	*1*	*0*	*1*	0	1
	E	0	*1*	*1*	*1*	*0*

4. Observando na tabela a diagonal que une o canto superior esquerdo ao inferior direito, você consegue explicar por que ela é formada só por zeros?

Resposta

Porque não existe voo ligando uma cidade a ela mesma.

Professor

Recursos necessários

- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

Mantenha a turma organizada como na etapa anterior.

Intervenção Pedagógica

- *Professor, no item 1, os alunos devem perceber que existe mais de uma maneira de partir da cidade A para B. Eles podem questionar por que passar por outras cidades se existe um voo direto; nesse caso, é importante que eles compreendam que a identificação das possibilidades é fundamental para se fazer escolhas, sobretudo quando há necessidade de passar em outra cidade.*
- *Ao responder ao item 2, o aluno deve observar que existe voo direto da cidade A para B, mas o contrário não. Você pode sinalizar que é possível partir da cidade B para a cidade A, mas não diretamente.*
- *No item 3, pode ocorrer que os alunos confundam a cidade de partida e a cidade de chegada. Assim, é importante que você sinalize isso para eles. Geralmente, os alunos estão mais acostumados a atribuir números a quantidades e nesse item, eles devem atribui-los a códigos. Por esse motivo, é interessante que você destaque que atribuímos o número 1 quando for verdade que exista voo direto de uma cidade para a outra e o 0, quando isso for falso, ou seja, quando o voo não existir.*
- *Se existirem dificuldades para o item 4, é importante que você retome que as linhas representam os voos de partida e as colunas, os de chegada. Assim, os alunos podem compreender que não existem voos saindo e chegando da mesma cidade.*
- *No item 5, os alunos têm a oportunidade de fazer o processo inverso: observar a matriz e desenhar as rotas. O principal destaque desse item é que os alunos devem observar a matriz no lugar da tabela. Como as duas representações têm a mesma estrutura e a matriz apresentada tem as linhas e colunas indicadas pelas cidades que cada uma representa, é provável que eles não tenham grandes dificuldades. Caso isso ocorra, você pode fazer na lousa a tabela e a matriz ao lado, destacando que a matriz nada mais é do que uma tabelas sem as demarcações das linhas e colunas.*

Resposta

MATRIZ	NÚMERO DE LINHAS	NÚMERO DE COLUNAS	ORDEM
$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$	3	3	3 × 3
$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$	2	3	2 × 3
$C = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$	2	1	2 × 1
$D = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$	1	3	1 × 3

2. Dadas duas matrizes de mesma ordem, A e B, a matriz soma (A+B) é obtida somando os elementos correspondentes das duas matrizes.

a. É possível somar as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$? Por quê?

Resposta

Não é possível. Porque as matrizes têm ordens diferentes.

b. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, calcule o valor da matriz A+B.

Resposta

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Professor

5. Quais as características das matrizes encontradas no item 4? Levando em conta essa característica, invente um nome para esta matriz.

Resposta

As matrizes são todas formadas por 0 e têm a mesma ordem da matriz com que foram somadas.

O nome será de acordo com as duplas.

6. E a subtração de duas matrizes? Levando em conta a mesma ideia de subtrair os elementos correspondentes, encontre a matriz *E* - *F*, sabendo que e $E = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Resposta

$$E - F = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 & 6-5 \\ 7-4 & 8-9 \\ 1-2 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Agora um desafio. Qual é a matriz que adicionada à matriz , resulta na matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$?
Olhe para os elementos dessa matriz e para os da matriz A. Agora discuta com seu colega e pensem em um nome para essa matriz.

Resposta

$\begin{bmatrix} -1 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ *O nome vai variar de acordo com as duplas.*

Recursos necessários

- Encarte do aluno.

Professor

- *Na questão 7, você pode chamar a atenção dos alunos para o fato de que eles buscam, na verdade, o que chamamos de matriz oposta. Novamente você pode auxiliá-los destacando que, assim como na adição, na subtração, eles também podem realizar as operações entre os elementos correspondentes. Os alunos devem concluir, dessa maneira, que os elementos da matriz oposta são obtidos ao mudarem o sinal de cada um dos elementos da matriz original.*

Quarta Etapa

Quiz

10 MINUTOS

Observe a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. Qual a matriz B que somada com a matriz A resulta na matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$?

a. $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -4 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

c. $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

d. $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Quinta Etapa

Análise das Respostas ao quiz

15 MINUTOS

Resposta

De acordo com a definição de soma de matrizes, somamos os elementos ordenadamente que ocupam as mesmas posições em uma e outra. Sendo assim, a cada elemento da matriz A somamos seu oposto. Em outras palavras, devemos somar à matriz A sua matriz oposta –A, cujos elementos são exatamente os opostos de cada elemento de A em sua posição

Resposta: Letra C.

Erros Possíveis

O aluno que optou pela letra A não atentou para a alteração de sinais de cada elemento, apenas repetindo a matriz original.

A multiplicação entre matrizes ocorre de uma forma um pouco diferente, e não é tão imediata quanto a operação de adição – na dinâmica 2 você terá a oportunidade de entender um pouco sobre a multiplicação de matrizes.

Por enquanto, observe a matriz M^2 a seguir. Ela também traz informações sobre os voos entre as cidades.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ M^2 = & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow A \\ \leftarrow B \\ \leftarrow C \\ \leftarrow D \\ \leftarrow E \end{array} \end{array}$$

Para entendê-la, analise as informações da tabela a seguir e compare com os dados da matriz M^2.

EXEMPLOS	**ROTAS**	**QUANTIDADE DE ESCALAS**	**QUANTIDADES DE VOOS COM <u>UMA</u> ESCALA APENAS**
ORIGEM A DESTINO D	A → D	Não há escalas	0
	A→ B→ E→ D	Há 2 escalas	
	A→ C→ B→ E→ D	Há 3 escalas	
ORIGEM B DESTINO C	B → E → C	Há 1 escala	1
	B→ E→ D→ C	Há 2 escalas	
	B→ E→ D→ A→ C	Há 3 escalas	
ORIGEM E DESTINO A	E→ C→ A	Há 1 escala	2
	E→ D→ A	Há 1 escala	
	E→ D→ C→ A	Há 2 escalas	

Como você deve ter percebido, a matriz descreve a existência de voos com **<u>exatamente uma</u>** escala.

E agora, você teria alguma pista sobre o que representa a matriz M^3? Ela traz informações a respeito dos voos com, exatamente, duas escalas entre essas cidades. Descubra qual é a matriz M^3 e confira!

Agora, é com você!

1. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, indique: