Formação Continuada em MATEMÁTICA

Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 1° ano – 4° bimestre/2013

# FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Tarefa 2

Cursista: JUAREZ AMARAL DOS REIS

Tutor: RODOLFO GREGORIO DE MORAES

Grupo: 2 – São João de Meriti

**Introdução:** Este plano de trabalho tem como objetivo permitir que os alunos complementem os estudos das funções seno, cosseno, tangente, a lei dos Senos e a Lei dos Cossenos com atividades no laboratório de informática e também algumas tarefas, trabalhadas em grupos, em sala de aula.

Na primeira atividade, os alunos serão apresentados ao “Roteiro de Ação 1 – Falta muito? É longe?”, onde será mostrada a importância que as relações trigonométricas desempenham nas medidas indiretas de distância. Na segunda atividade, os alunos serão apresentados ao “Roteiro de Ação 2 – Construção do gráfico da Função Seno, onde com a ajuda do software Geogebra, será desenvolvido um passo a passo para a construção da Função Seno. Na terceira atividade, os alunos serão apresentados ao “Roteiro de Ação 3 – Construção do gráfico da Função Cosseno onde, com a ajuda do software Geogebra, será desenvolvido um passo a passo para a construção da Função Cosseno. Na quarta atividade, os alunos serão apresentados ao “Roteiro de Ação 4 – Construção do gráfico da Função Tangente onde, com a ajuda do software Geogebra, será desenvolvido um passo a passo para a construção da Função Tangente. Na última atividade, Roteiro de Ação 5 – Descobrindo a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos, os alunos deverão estudar a Lei do Seno e a Lei dos Cossenos, que são tópicos da trigonometria usados para o cálculo indireto de distância ou ângulos.

Estas atividades citadas acima foram construídas para facilitar a análise das funções trigonométricas, seus domínios, conjunto imagem, valor máximo, valor mínimo, intervalos de crescimento ou decrescimento e se somarão aos exercícios de equações exponenciais e a resolução de questões de múltipla escolha, do tipo Saerjinho, visando obter uma aprendizagem significativa.

## Atividade 1: Falta muito? É longe?

## Desenvolvimento:

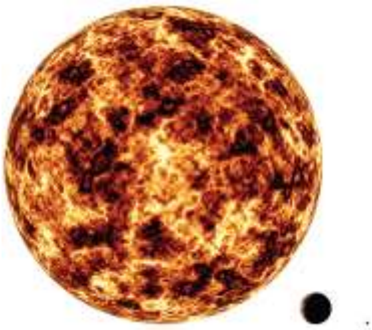
GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
SECRETARIA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO
COORDENADORIA REGIONAL METROPOLITANA XI
COLÉGIO ESTADUAL PROF. MURILO BRAGA

Nomes: ........................................................................................................... N$^{os}$ ......................

Turma: 10..... Professor: Juarez Reis Data: ........../........../2013 Nota: .................

**Roteiro de Ação 1 – Falta muito? É longe?**

Você sabe qual é a distância da Terra ao Sol? Como terá sido medida essa distância?



A preocupação em medir distâncias acompanha o homem da antiguidade até os dias de hoje. Calcular pequenas distâncias é um problema de fácil solução. Mas muitos problemas interessantes envolvem a medida de distâncias inacessíveis.

Sejam estas medidas acessíveis ou inacessíveis, praticamente todas, podem ser obtidas com o auxílio da trigonometria. Na essência, o problema que está presente em quase todas as situações é a resolução de um triângulo.

Você seria capaz de fornecer exemplos de instrumentos de medidas?

1. Cite quais grandezas são possíveis de serem medidas com os instrumentos citados?
2. Imagine se o instrumento de medida citado pode ser usado para determinar as seguintes medidas: distância entre dois planetas, espessura de um fio de cabelo, altura do Morro do Pão de Açúcar, distância de uma margem a outra da Baía de Guanabara, largura do rio Paraíba do Sul.
3. Suponha que você deseja saber a distância do planeta Terra ao Sol. Como poderemos fazer isso? Quais são os instrumentos mais adequados? Quais são as dificuldades? Discuta com seus colegas.
4. Você conhece o teodolito? Para que ele serve?

O funcionamento do Teodolito baseia-se em conceitos de Trigonometria. As figuras abaixo mostram um pouco desse importante instrumento de medida de distâncias inalcançáveis:

Figura: Teodolito em uso.

Agora vou mostrar passo a passo como fazer um teodolito inprovisado. Vamos ver como é?

**Para construção do teodolito improvisado (ou ainda, do medidor de ângulos), devemos seguir os seguintes passos:**

Passo 1. Recorte um pedaço (20 cm × 10 cm) do papel cartão. Ele será a base do seu teodolito.

Passo2. Fixe o transferidor neste pedaço de papel usando a fita transparente, como vemos na figura, dando destaque ao segmento de reta que passa pela marca do ângulo de 90°, como na figura a seguir.

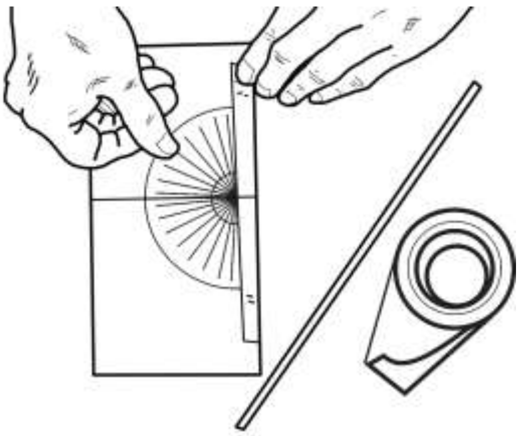


Figura: Teodolito em construção

Passo 3. Agora precisamos prender o canudo com o barbante e o peso no transferidor. Tenha bastante atenção para que o canudo coincida com a linha de fé do transferidor (a linha que passa pelo 0° e pelo 180°), e o barbante já deverá estar preso ao canudo (amarrado) de maneira que o nó coincida com o centro do transferidor. As figuras abaixo ilustram isso.

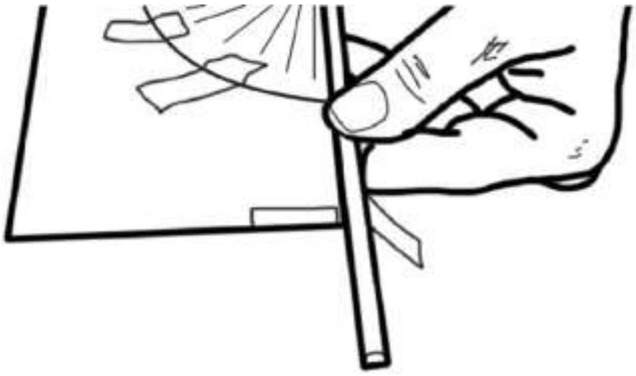


Figura: teodolito em construção

Figura: teodolito em construção

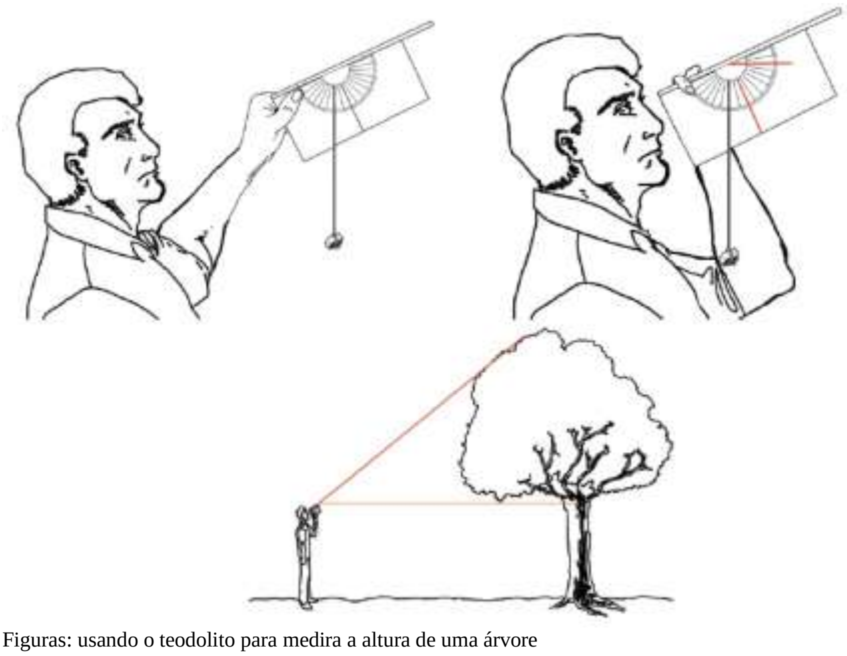
De posse do nosso medidor de ângulos, que tal medirmos a altura de algo inacessível na escola? Procure na escola alturas difíceis de serem medidas, como a do telhado, da cobertura da quadra, do segundo pavimento, de uma árvore ou de uma torre de transmissão de celular, por exemplo.

5. Que altura você vai medir?

6. Agora que você escolheu que altura deseja medir, posicione-se a uma distância conhecida do objeto cuja altura você vai determinar (você pode medir antes a distância). A que distância você está do objeto cuja altura você pretende verificar?

7. Leve o seu teodolito à altura dos seus olhos e observe, através do canudo, o topo do objeto do qual você pretende determinar a altura. Peça a um colega que olhe no seu teodolito, enquanto você observa pelo canudo o topo do seu objeto, qual a menor indicação para a medida do ângulo do barbante no transferidor. Qual foi o ângulo que o seu colega viu?

8. As imagens abaixo mostram a realização deste experimento, onde o objeto cuja altura está sendo determinada é uma árvore.



Figuras: usando o teodolito para medira a altura de uma árvore

Correlacione essas imagens com o que você fez e com o ângulo lido pelo seu colega. Se chamarmos de "ângulo de observação" ao ângulo BÂC do esquema abaixo, qual a sua medida? Quanto medem ainda a distância do observador (você) ao objeto observado e a altura do observador (a sua própria altura)?

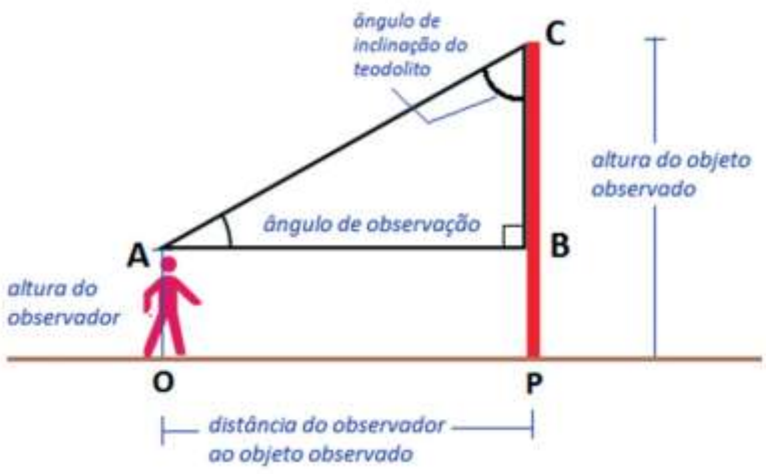



Figura: esquema indicativo das medidas encontradas

9. Use agora os seus conhecimentos sobre razões trigonométricas para determinar a altura do objeto que você observou pelo teodolito. Mas lembre-se: o segmento BC indicado no esquema acima representa apenas uma parte da altura procurada. A altura total será o resultado da soma da medida do segmento BC com a sua própria altura, certo? Mãos à obra!

**Objetivos:** Introduzir o estudo da função tangente, utilizando a geometria para resolução de uma situação-problema que envolva medição.

**Pré-requisitos:**
Geometria do triângulo retângulo.

**Tempo de duração:**
100 minutos (dois tempos de aula)

**Recursos educacionais utilizados:**
Construção de um teodolito artesanal.

**Organização da turma:**
Grupos de 2 a 3 alunos.

**Metodologia adotada:**
Nesta atividade os alunos deverão construir um teodolito artesanal que servirá de instrumento para que os alunos percebam a importância que as relações trigonométricas desempenham no cálculo das medidas indiretas de distância.

**Avaliação:**
Os alunos serão avaliados pela resolução de desafios propostos pelo professor. Valor: 1 ponto.

**Referências Bibliográficas:**
1- Roteiro de Ação 2 – Falta muito? É longe? – Curso de formação continuada – Matemática – 1° ano – CECIERJ – 2013.

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
SECRETARIA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO
COORDENADORIA REGIONAL METROPOLITANA XI
COLÉGIO ESTADUAL PROF. MURILO BRAGA

Nomes: ............................................................................................................................ N$^{os}$ ......................

Turma: 10..... Professor: Juarez Reis Data: ........../........../2013 Nota: .................

**Roteiro de Ação 2 – Construção do gráfico da Função Seno**

Vamos estudar o gráfico da função seno, aproveitando para estudar juntos as suas regularidades.

1. Abra uma tela nova no GeoGebra. No campo "Entrada", disponível na parte inferior da tela, digite O=(0,0). O programa marcará o ponto O, origem do sistema de eixos cartesianos.
2. Agora vamos traçar a circunferência que representará o ciclo trigonométrico. Para isso, clique no botão , disponível no 6º menu de botões, e clique no ponto O (origem do sistema cartesiano). Vai abrir-se uma caixa de diálogo, pedindo que você informe que raio você deseja que sua circunferência tenha, conforme podemos ver abaixo.


Digite 1, que é o raio do ciclo trigonométrico, e o botão OK, e você verá na tela uma circunferência de centro O e raio unitário.

3. Precisamos agora marcar a origem do ciclo trigonométrico. Como vimos, a origem é o ponto (1,0), que chamaremos nesta construção de A. Então, novamente no campo Entrada, digite A=(1,0) seguido da tecla ENTER. Surgirá na tela o ponto A(1,0). Até agora, sua construção deve estar assim:

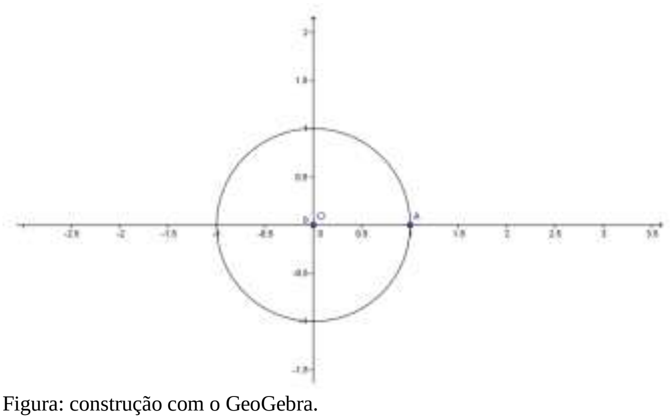
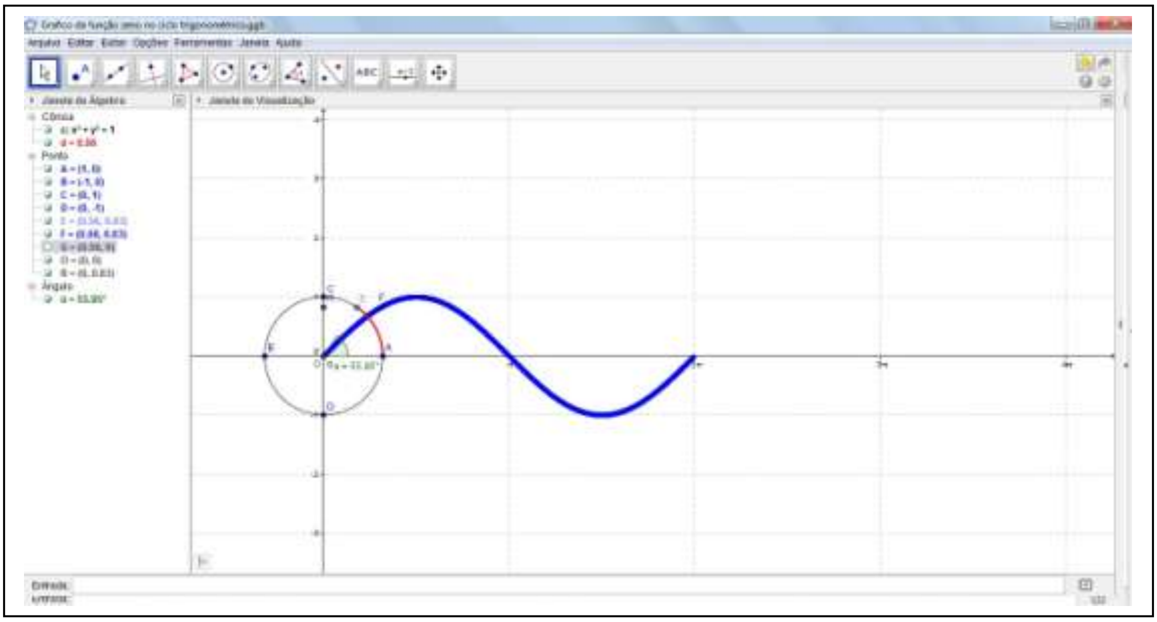


Figura: construção com o GeoGebra.

4. Proceda da mesma maneira para marcar os pontos B=(-1,0), C=(0,1) e D=(0,-1). Este é o ciclo trigonométrico, e os pontos A, B, C e D são os limites dos quadrantes.

5. Tome um ponto E qualquer no ciclo trigonométrico e marque o arco AOE, clicando no botão (6º menu de botões) e, sequencialmente, nos pontos O, A e E. Você verá na janela da álgebra surgir a indicação "d=...", que representa o comprimento do arco AOE.

6. Agora, clique no botão , disponível no 6º menu de botões e depois nos pontos A, O e E para fazer aparecer o ângulo $\alpha$ no ciclo trigonométrico. Agora, clique no botão , disponível no 2° menu de botões e depois clique em algum ponto do plano cartesiano, no ciclo trigonométrico. Dê um duplo clique no ponto F e mude as coordenadas de F para F=($\alpha$,sen($\alpha$)). Observe que o ponto F mudou de lugar (agora ele está dentro do ciclo trigonométrico), então clique em F com o botão esquerdo do mouse e depois em “Habilitar Rastro”. Agora, clique com o botão esquerdo do mouse no eixo dos “x” e depois em “Janela de Visualização”, depois na aba “Eixo x” e na janela “unidade”, marque $\pi$. Agora, prá terminar, clique com o botão direito do mouse no ponto E e depois em “Animar”. Pronto, está aí o gráfico da função f(x)=sen x!



## Atividades

1. Observe que as ordenadas dos pontos R, E e F são iguais. Logo, ao movimentar o ponto E no círculo, que valores essa ordenada pode assumir? Ou ainda, perguntando a mesma coisa de forma diferente, qual é o intervalo de variação da ordenada do ponto R?

2. De acordo com seus conhecimentos sobre o círculo trigonométrico a abscissa do ponto F é uma função da ordenada. Neste caso, que função é essa?

3. Clique no ponto E e movimente-o no sentido anti-horário sobre o círculo trigonométrico percorrendo o primeiro quadrante e responda:

a. Os números reais do intervalo $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ possuem seno positivo ou negativo?

b. Nesse intervalo, quando o percorremos no sentido crescente o ponto E está percorrendo o círculo no sentido anti-horário. Durante esse movimento, os valores da ordenada de E vão aumentando ou diminuindo? Então os respectivos senos estão aumentando ou diminuindo?

4. Faça E se movimentar em cada um dos outros três quadrantes, sempre no sentido crescente (de $\frac{\pi}{2}$ a π, de π a $\frac{3\pi}{2}$ π e, finalmente, de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π ), observando esse movimento, e o movimento do ponto E (e de seu rastro). A partir dessas observações complete a tabela abaixo:

| **Função Seno** | **1º quadrante** | **2º quadrante** | **3º quadrante** | **4º quadrante** |
|---|---|---|---|---|
| **Sinal** | | | | |
| **Crescimento/ decrescimento** | | | | |
| **Imagem** | | | | |

**Objetivos:**
Construir o gráfico da função seno.

**Habilidades relacionadas:**
Manuseio com o programa Geogebra.

**Pré-requisitos:**
Ciclo trigonométrico e arcos côngruos.

**Tempo de duração:**
100 minutos (dois tempos de aula)

**Recursos educacionais utilizados:**
Laboratório de informática

**Organização da turma:**
Grupos de 2 a 3 alunos.

**Metodologia adotada:**
Para construir o gráfico da função seno, a parti do Geogebra, os alunos deverão executar as tarefas numa ficha em que deverão preencher, seguindo o passo a passo das instruções.

**Avaliação:**
Os alunos serão avaliados pelas respostas na ficha, propostos pelo professor. Valor: 1 ponto.

**Referências Bibliográficas:**
1- Roteiro de Ação 3 – Construção do gráfico da Função Cosseno – Curso de formação continuada – Matemática – 1° ano – CECIERJ – 2013.

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
SECRETARIA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO
COORDENADORIA REGIONAL METROPOLITANA XI
COLÉGIO ESTADUAL PROF. MURILO BRAGA

Nomes: ........................................................................................................................ N$^{os}$ ......................

Turma: 10..... Professor: Juarez Reis Data: ........../........../2013 Nota: .................

**Roteiro de Ação 3 – Construção do gráfico da Função Cosseno**

Agora que você estudou o gráfico da função seno, vamos experimentar construir juntos o gráfico da função cosseno e estudar suas regularidades?

1. Abra uma tela nova no GeoGebra. No campo “Entrada”, disponível na parte inferior da tela, digite O=(0,0). O programa marcará o ponto O, origem do sistema de eixos cartesianos.
2. Agora vamos traçar a circunferência que representará o ciclo trigonométrico. Para isso, clique no botão Círculo dados Centro e Raio, disponível no 6º menu de botões, e clique no ponto O (origem do sistema cartesiano). Vai abrir-se uma caixa de diálogo, pedindo que você informe que raio você deseja que sua circunferência tenha, conforme podemos ver abaixo.


Digite 1, que é o raio do ciclo trigonométrico, e o botão OK, e você verá na tela uma circunferência de centro O e raio unitário.

3. Precisamos agora marcar a origem do ciclo trigonométrico. Como vimos, a origem é o ponto (1,0), que chamaremos nesta construção de A. Então, novamente no campo Entrada, digite A=(1,0) seguido da tecla ENTER. Surgirá na tela o ponto A(1,0). Até agora, sua construção deve estar assim:

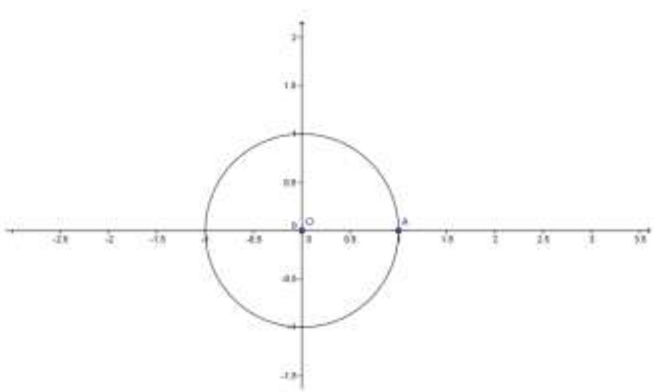


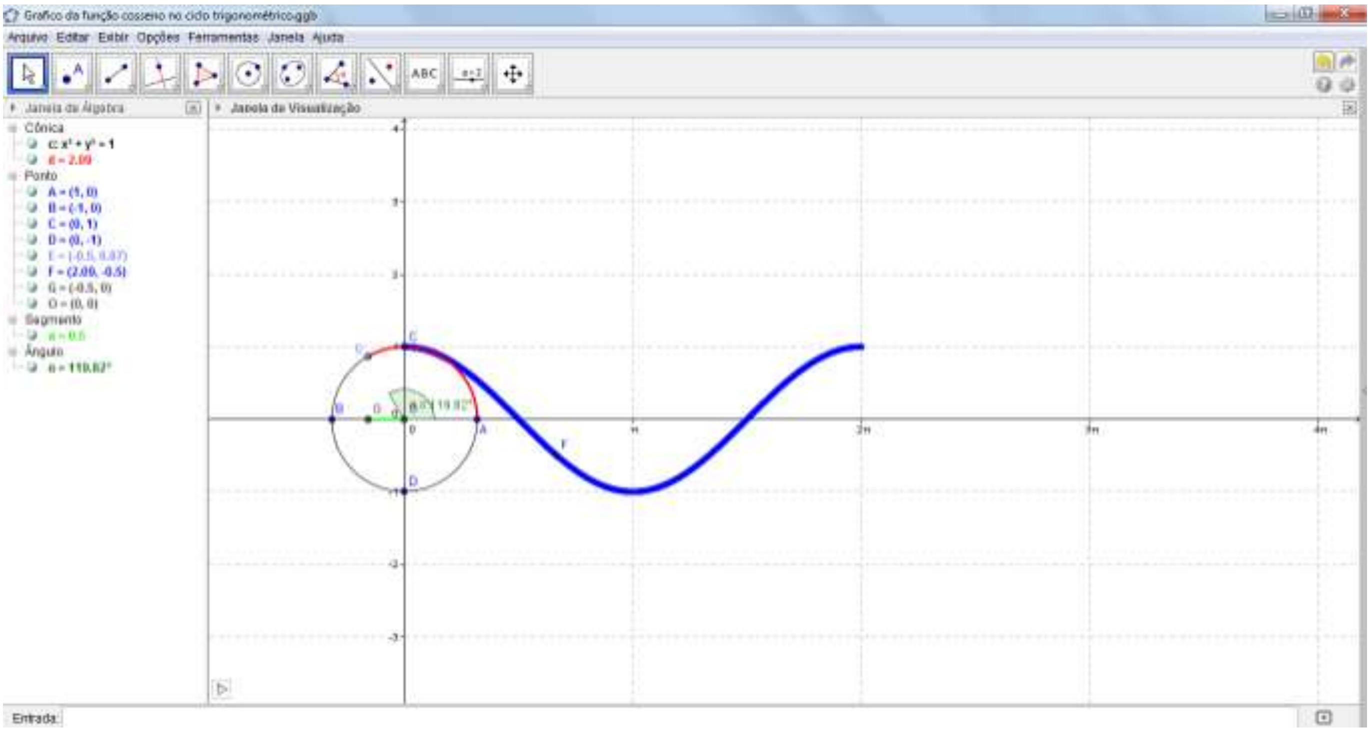
Figura: construção com o GeoGebra.

4. Proceda da mesma maneira para marcar os pontos B=(-1,0), C=(0, 1) e D=(0,-1). Este é o ciclo trigonométrico, e os pontos A, B, C e D são os limites dos quadrantes.

5. Tome um ponto E qualquer no ciclo trigonométrico e marque o arco AOE, clicando no botão (6º menu de botões) e, sequencialmente, nos pontos O, A e E. Você verá na janela da álgebra surgir a

indicação “d=...”, que representa o comprimento do arco AOE.

6. Agora, clique no botão , disponível no 6º menu de botões e depois nos pontos A, O e E para fazer aparecer o ângulo $\alpha$ no ciclo trigonométrico. Agora, clique no botão , disponível no 2° menu de botões e depois clique em algum ponto do plano cartesiano, no ciclo trigonométrico. Dê um duplo clique no ponto F e mude as coordenadas de F para F=( $\alpha$ ,cos( $\alpha$ )). Observe que o ponto F mudou de lugar (agora ele está dentro do ciclo trigonométrico), então clique em F com o botão esquerdo do mouse e depois em “Habilitar Rastro”. Agora, clique com o botão esquerdo do mouse no eixo dos “x” e depois em “Janela de Visualização”, depois na aba “Eixo x” e na janela “unidade”, marque $\pi$ . Agora, prá terminar, clique com o botão direito do mouse no ponto E e depois em “Animar”. Pronto, está aí o gráfico da função f(x)=cos x!




## Atividades

5. Observe que as ordenadas dos pontos R, E e F são iguais. Logo, ao movimentar o ponto E no círculo, que valores essa ordenada pode assumir? Ou ainda, perguntando a mesma coisa de forma diferente, qual é o intervalo de variação da ordenada do ponto R?

6. De acordo com seus conhecimentos sobre o círculo trigonométrico a abscissa do ponto F é uma função da ordenada. Neste caso, que função é essa?

7. Clique no ponto E e movimente-o no sentido anti-horário sobre o círculo trigonométrico percorrendo o primeiro quadrante e responda:

c. Os números reais do intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ possuem seno positivo ou negativo?

d. Nesse intervalo, quando o percorremos no sentido crescente o ponto E está percorrendo o círculo no sentido anti-horário. Durante esse movimento, os valores da ordenada de E vão aumentando ou diminuindo? Então os respectivos senos estão aumentando ou diminuindo?

8. Faça E se movimentar em cada um dos outros três quadrantes, sempre no sentido crescente (de $\frac{\pi}{2}$ a π, de π a $\frac{3\pi}{2}$ π e, finalmente, de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π ), observando esse movimento, e o movimento do ponto E (e de seu rastro). A partir dessas observações complete a tabela abaixo:

| **Função coseno** | **1º quadrante** | **2º quadrante** | **3º quadrante** | **4º quadrante** |
|---|---|---|---|---|
| **Sinal** | | | | |
| **Crescimento/ decrescimento** | | | | |
| **Imagem** | | | | |

**Objetivos:**
Construir o gráfico da função cosseno.

**Habilidades relacionadas:**
Manuseio com o programa Geogebra.

**Pré-requisitos:**
Ciclo trigonométrico e arcos côngruos.

**Tempo de duração:**
100 minutos (dois tempos de aula)

**Recursos educacionais utilizados:**
Laboratório de informática

**Organização da turma:**
Grupos de 2 a 3 alunos.

**Metodologia adotada:**
Para construir o gráfico da função cosseno, a parti do Geogebra, os alunos deverão executar as tarefas numa ficha em que deverão preencher, seguindo o passo a passo das instruções.

**Avaliação:**
Os alunos serão avaliados pelas respostas na ficha, propostos pelo professor. Valor: 1 ponto.

**Referências Bibliográficas:**
1- Roteiro de Ação 3 – Construção do gráfico da Função Cosseno – Curso de formação continuada – Matemática – 1° ano – CECIERJ – 2013.

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
SECRETARIA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO
COORDENADORIA REGIONAL METROPOLITANA XI
COLÉGIO ESTADUAL PROF. MURILO BRAGA

Nomes: ............................................................................................................ N$^{os}$ ......................

Turma: 10..... Professor: Juarez Reis Data: ........../........../2013 Nota: .................

**Roteiro de Ação 4 – Construção do gráfico da Função Tangente**

Vamos estudar o gráfico da função tangente, aproveitando para estudar juntos as suas regularidades.

1. Abra uma tela nova no GeoGebra. No campo “Entrada”, disponível na parte inferior da tela, digite O=(0,0). O programa marcará o ponto O, origem do sistema de eixos cartesianos.
2. Agora vamos traçar a circunferência que representará o ciclo trigonométrico. Para isso, clique no botão , disponível no 6º menu de botões, e clique no ponto O (origem do sistema cartesiano). Vai abrir-se uma caixa de diálogo, pedindo que você informe que raio você deseja que sua circunferência tenha, conforme podemos ver abaixo.


Digite 1, que é o raio do ciclo trigonométrico, e o botão OK, e você verá na tela uma circunferência de centro O e raio unitário.

3. Precisamos agora marcar a origem do ciclo trigonométrico. Como vimos, a origem é o ponto (1,0), que chamaremos nesta construção de A. Então, novamente no campo Entrada, digite A=(1,0) seguido da tecla ENTER. Surgirá na tela o ponto A(1,0). Até agora, sua construção deve estar assim:

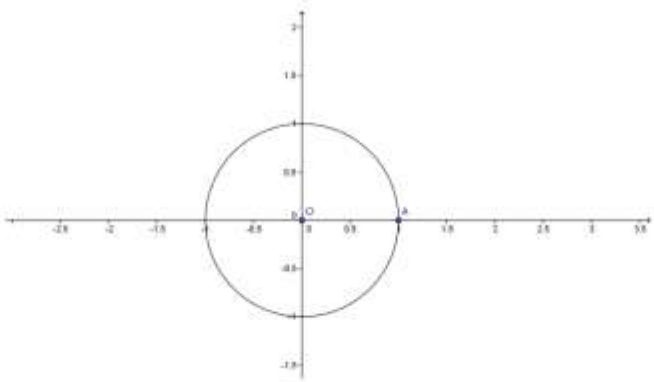


Figura: construção com o GeoGebra.

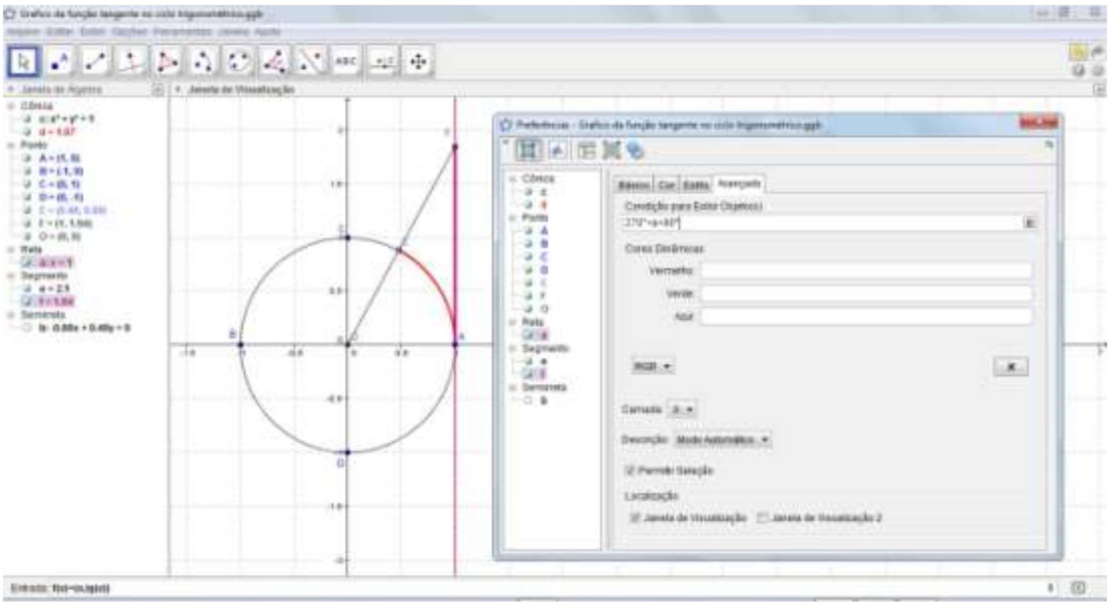
4. Proceda da mesma maneira para marcar os pontos B=(-1,0), C=(0,1) e D=(0,-1). Este é o ciclo trigonométrico, e os pontos A, B, C e D são os limites dos quadrantes.

5. Tome um ponto E qualquer no ciclo trigonométrico e marque o arco AOE, clicando no botão (6º menu de botões) e, sequencialmente, nos pontos O, A e E. Você verá na janela da álgebra surgir a indicação “d=...”, que representa o comprimento do arco AOE.

6. Agora, clique no botão , disponível no 6º menu de botões e depois nos pontos A, O e E para fazer aparecer o ângulo $\alpha$ no ciclo trigonométrico.

7. Para que o ponto E possa caminhar por todo o ciclo trigonométrico, vamos fazer o seguinte:
1°_ Vamos traçar uma reta perpendicular ao eixo dos “x” passando por A. Para isto, clique no 4° menu de botões, em “Reta Perpendicular” , , e depois em clique no ponto A, então. Agora, vamos traçar uma semi-reta de origem em O passando por E. Para isto, clique no 3° menu de botões, e em seguida em Semi-reta definida por dois pontos, . Então, clique no 2° menu de botões, , e em seguida clique na interseção da semi-reta b com a reta a e o novo ponto criado é o F. Vamos então “esconder” a semi-reta ***b*** clicando com o botão direito do mouse em cima dela e depois na opção “Exibir Objeto”.

Agora vamos criar um segmento de reta ligando os pontos A e F. Para isto, clique no 3° menu de botões, e depois em “Segmento Definido Por Dois Pontos”, . Em seguida, vamos criar um segmento de reta ligando os pontos A e F. Para isto, clique no 3° menu de botões, e em seguida em “Semi-reta definida por dois pontos”, . Em seguida, vamos clicar com o botão direito do mouse no segmento de reta e depois em “Propriedades...”. Vamos escolher uma cor rocha e na aba “Estilo” vamos colocar a “Espessura da Linha” igual a 5. Também, vamos clicar na reta ***a***, com o botão direito do mouse e depois em “Propriedades...”. Agora vamos escolher a aba “Avançado” e escrever a expressão 270°< $\alpha$ <90° em “Condições para Exibir Objeto(s)”

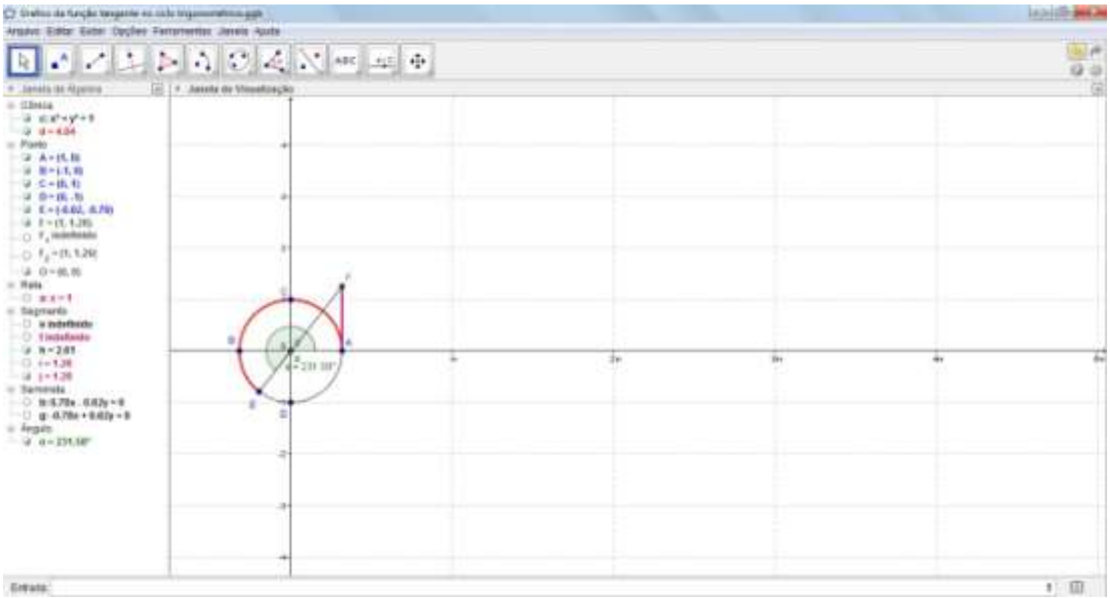


Precisamos agora, fazer o ponto F “aparecer” quando E está nos quadrantes 2° e 3°. Para isto, vamos traçar uma semi-reta de origem em E passando por O, clicando no 3° menu de botões, , e depois em “Semi-reta Definida Por Dois Pontos”, . Então vamos marcar um ponto G na interseção da semi-reta ***g*** com a reta ***a*** e depois ocultar a semi-reta, clicando nela com o botão direito do mouse e depois em “Exibir Objeto”.

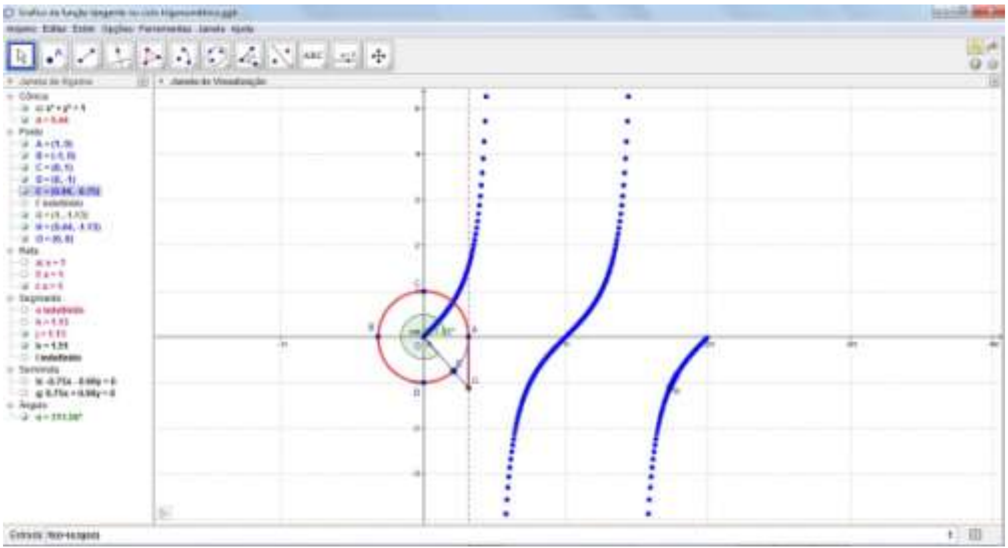
Vamos criar um segmento de reta ligando os pontos E e F, clicando no 3° menu de botões, , e depois em . Vamos também criar um segmento de reta ligando os pontos F e A, usando o mesmo procedimento anterior, depois clicar em “Propriedades...”, depois colocando o segmento com a mesma cor do segmento feito na 1ª parte e também a mesma espessura, na aba “Estilo”.

Agora, clique com o botão esquerdo do mouse no eixo dos “x” e depois em “Janela de Visualização”, depois na aba “Eixo x” e na janela “unidade”, marque $\pi$.

Então o ciclo trigonométrico ficará igual a figura abaixo.



Agora, clique no botão , disponível no 2° menu de botões e depois clique em algum ponto do plano cartesiano, no ciclo trigonométrico. Dê um duplo clique no ponto H e mude as coordenadas de H para H=( $\alpha$ ,tg( $\alpha$ )). Clique em H com o botão esquerdo do mouse e depois em “Habilitar Rastro”. Agora, prá terminar, clique com o botão direito do mouse no ponto E e depois em “Animar”. Pronto, está aí o gráfico da função f( $\alpha$ ) = tg $\alpha$ !



## Atividades

1. No arquivo Gráfico da função tangente no ciclo trigonométrico, clique com o botão direito do mouse no ponto E e depois em “Animar”. Observe e responda: Conforme o ponto E “caminha” no círculo trigonométrico o que acontece com o segmento de reta $\overline{AF}$ ? Ele aumenta de tamanho ou diminui? Ou seja, ele cresce ou decresce?

2. E no 2° quadrante?

3. E no 3° quadrante?

4. E no 4° quadrante?

5. De acordo com seus conhecimentos sobre o círculo trigonométrico a abscissa do ponto G é função da ordenada. Neste caso, que função é essa?

6. Nesse intervalo, quando o percorremos no sentido crescente o ponto E está percorrendo o círculo no sentido anti-horário. Durante esse movimento, os valores da ordenada de G vão aumentando ou diminuindo? Então a tangente está aumentando ou diminuindo?

7. Os números reais do intervalo $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ possuem a tangente positiva ou negativa?

8. Faça E se movimentar em cada um dos outros três quadrantes, sempre no sentido crescente (de $\frac{\pi}{2}$ a π, de π a $\frac{3\pi}{2}$ π e, finalmente, de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π ), observando esse movimento, e o movimento do ponto G (e de seu rastro). A partir dessas observações complete a tabela abaixo:

| **Função tangente** | **1º quadrante** | **2º quadrante** | **3º quadrante** | **4º quadrante** |
|---|---|---|---|---|
| **Sinal** | | | | |
| **Crescimento/ decrescimento** | | | | |
| **Imagem** | | | | |

**Objetivos:**
Construir o gráfico da função tangente.

**Habilidades relacionadas:**
Manuseio com o programa Geogebra.

**Pré-requisitos:**
Ciclo trigonométrico e arcos côngruos.

**Tempo de duração:**
100 minutos (dois tempos de aula)

**Recursos educacionais utilizados:**
Laboratório de informática

**Organização da turma:**
Grupos de 2 a 3 alunos.

**Metodologia adotada:**
Para construir o gráfico da função tangente, a parti do Geogebra, os alunos deverão executar as tarefas numa ficha em que deverão preencher, seguindo o passo a passo das instruções.

**Avaliação:**
Os alunos serão avaliados pelas respostas na ficha, propostos pelo professor. Valor: 1 ponto.

**Referências Bibliográficas:**

1- Roteiro de Ação 3 – Construção do gráfico da Função Cosseno – Curso de formação continuada – Matemática – 1° ano – CECIERJ – 2013.

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
SECRETARIA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO
COORDENADORIA REGIONAL METROPOLITANA XI
COLÉGIO ESTADUAL PROF. MURILO BRAGA

Nomes: ........................................................................................................................ N^os ......................

Turma: 10..... Professor: Juarez Reis Data: ........../........../2013 Nota: ................

**Roteiro de Ação 8 – Descobrindo a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos**

# 1ª parte: A Lei dos Senos

Você conhece a Praia do Flamengo, no Rio de Janeiro, e a Praia de Icaraí, em Niterói? São duas belas regiões de nosso Estado que encontram-se separadas pela Baía de Guanabara.

A praia do Flamengo é a praia que se estende por grande parte do parque Brigadeiro Eduardo Gomes (o aterro do Flamengo), no Rio de Janeiro, no Brasil. Era chamada pelos índios nativos tupinambás de “uruçumirim”, que significa “abelha pequena”. Com a chegada dos portugueses, no século XVI, estes passaram a denominar a região de Aguada dos Marinheiros, por nela se situar a foz do rio Carioca, onde os navios costumavam se abastecer de água potável. Em 20 de janeiro de 1567, aconteceu, na região, a maior batalha da invasão francesa ao Rio de Janeiro. As forças portuguesas, comandadas por Estácio de Sá, destruíram a forte paliçada tupinambá que se havia erguido no local. Na batalha, foi ferido mortalmente Estácio.

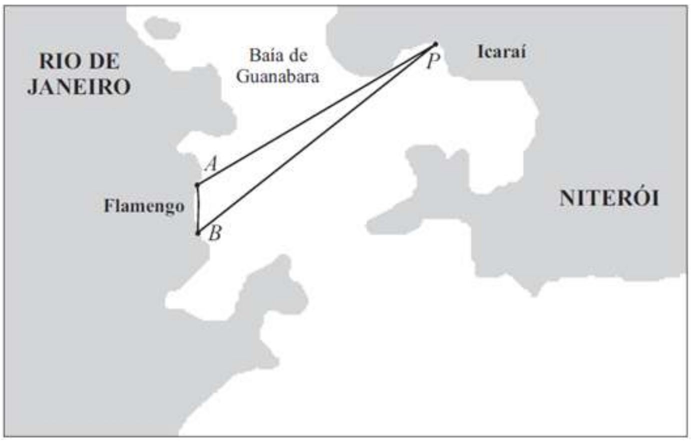
Posteriormente, a praia passou a ser chamada de praia da Carioca, em referência ao rio homônimo. Foi, ainda, conhecida como praia do Sapateiro. A origem do nome atual da praia vem da primeira invasão holandesa à cidade em 1599. Como o desembarque holandês ocorreu na praia, que era anteriormente chamada praia do Sapateiro, ela passou a ser chamada praia do Flamengo, pois originalmente a palavra *flamengo* indica a aquele que é original da região belga de Flandres. Na época da invasão, todos os habitantes dos Países Baixos falavam a língua holandesa, o que incluía os habitantes dessa região.

Na década de 1960, com a construção do parque Eduardo Gomes e o consequente aterramento do litoral em frente à praia do Flamengo, a praia passou a se situar aproximadamente cinquenta metros a frente da antiga linha costeira. É uma praia de águas tranquilas, por se situar dentro da baía de Guanabara. Pelo mesmo motivo, não apresenta normalmente condições propícias para o banho, devido às águas poluídas da baía.

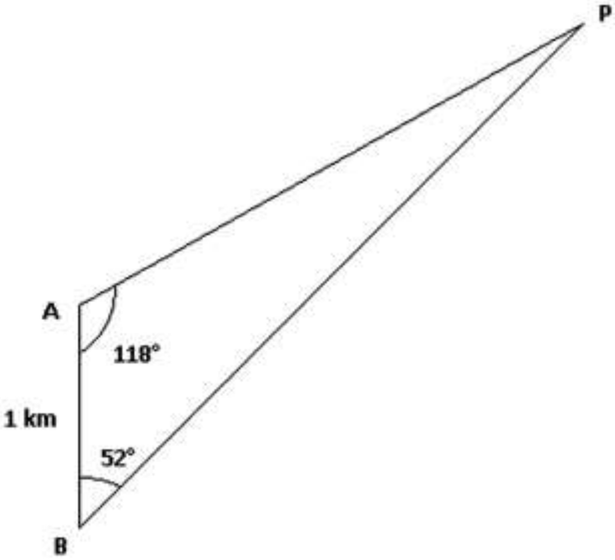
A praia de Icaraí situa-se na Baía de Guanabara também, mas na margem oposta à praia do Flamengo. A vista do Rio para Niterói é belíssima (e vice-versa). *Icarahy* em língua tupi significa água ou rio sagrado. Com a colonização européia, na Freguesia de São João de Carahy, parte integrante da chamada Sesmaria dos Índios, doada a Araribóia em 1568, desenvolveram-se duas grandes fazendas. No século XIX, a região integrou-se à recém-criada Vila Real da Praia Grande, futura cidade de Niterói. A sua praia constituía-se, à época, em um extenso areal, margeado por pitangueiras, cajueiros, cactos e vegetação típica de restinga. O seu efetivo povoamento iniciou-se a partir das décadas de 1840 e de 1850.

Em 1937, foi construído um trampolim em concreto armado no meio da praia, com recursos da Prefeitura, da Imprensa e do Clube de Regatas Icarahy. Esta estrutura foi dinamitada no final da década de 1960 por oferecer perigo aos banhistas. A partir de então, o bairro conheceu um “boom” imobiliário, que se consolidou a partir da década de 1970 com a construção e inauguração da Ponte Rio-Niterói. Atualmente, o bairro caracteriza-se pelos prédios luxuosos, de elevado padrão construtivo, erguidos na orla da baía.

Que distância separa essas duas praias? Como podemos fazer para medir essa distância? Imagine que temos um ponto, que vamos chamar de ponto A, na praia do Flamengo, e um ponto P na praia de Icaraí (estes dois pontos estão em lados opostos do canal de entrada da Baía de Guanabara). De um ponto B, na praia do Flamengo, distante 1km do ponto A, também se avista o ponto P. Usando um teodolito, conseguiu-se medir os ângulos BAP, 118°, e ABP, 52°. Será que com essas informações conseguimos saber qual é a distância aproximada entre as duas praias? A figura abaixo apresenta uma representação do que falamos aqui...

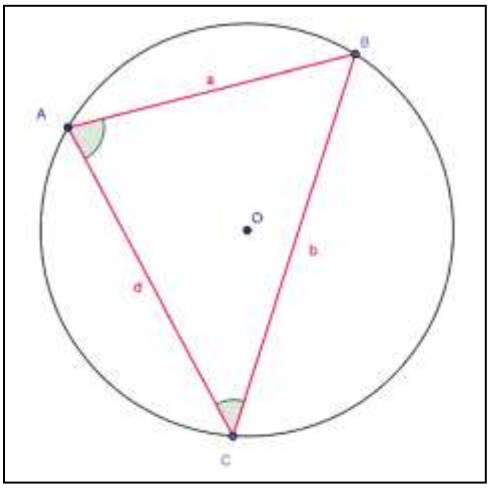



Temos então a seguinte situação, destacando o triângulo ABP:



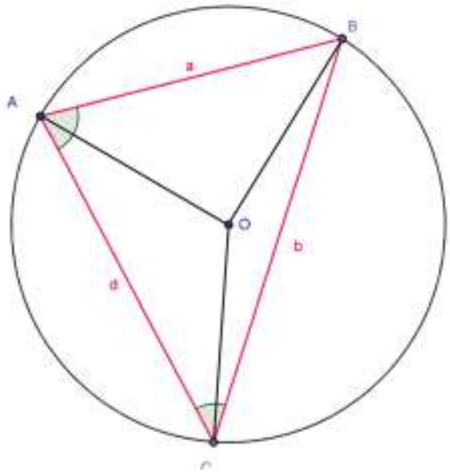

Precisamos determinar a distância de A até P. Mas como proceder?
O triângulo não é retângulo, então não podemos usar as razões trigonométricas de seno, cosseno ou tangente, nem mesmo o Teorema de Pitágoras! E agora?

Para facilitar a nossa vida, vamos deixar esse problema guardado e tentar estudar um caso geral? Como todo triângulo pode ser inscrito em uma circunferência, vamos estudar o triângulo ABC inscrito em uma circunferência de raio r.

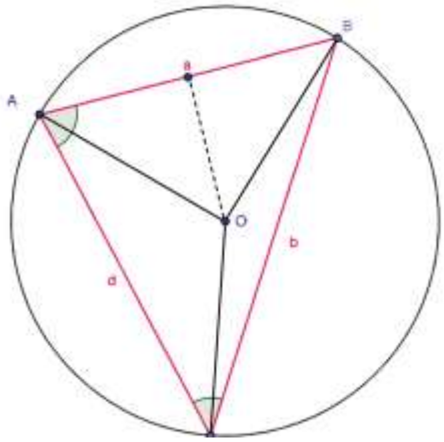


Vamos trabalhar isso juntos? Então, siga as orientações abaixo e responda às perguntas que foram formuladas.

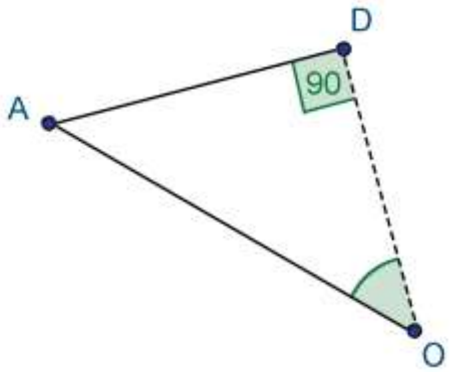
a. Trace os raios AO, OB e OC. Em quantos triângulos o triângulo ABC ficou dividido? Como você classificaria esses triângulos quanto aos lados? Quanto mede o ângulo AÔB, se considerarmos que o ângulo ACB mede $\propto$?




b. Vamos dividir ao meio o triângulo OAB? Como ele é um triângulo isósceles, essa é uma tarefa fácil: basta baixar uma perpendicular pelo ponto O ao segmento AB, que o encontrará no ponto D. Agora, observando o triângulo ADO, responda: quanto mede o ângulo ADO? E o ângulo DOA? E qual é a medida do lado OA? E do lado AD?




3. O triângulo ADO está destacado abaixo. Use o seno como razão entre o cateto oposto e a hipotenusa de um determinado ângulo agudo de um triângulo retângulo para determinar o seno do ângulo ABC, ou seja, o seno de $\propto$, que equivale à medida do ângulo AOD, conforme vimos acima. Depois, reescreva a expressão do seno de $\propto$ em função do lado AB e do raio r da circunferência.



d. Fazendo a mesma construção e dedução acima para os triângulos BOC e AOC, que relação encontramos entre o lado AC e o seno do ângulo ABC e ainda entre o lado BC e o seno do ângulo BAC? O que você pode concluir daí?

Essa é a Lei dos Senos! Ela é muito útil em situações em que conhecemos ângulos de um triângulo qualquer, mas apenas um dos lados, e precisamos determinar um outro lado. Ela pode ser descrita da seguinte maneira:

**Em um triângulo qualquer, a razão entre um lado e o seno do ângulo oposto a esse lado é constante e igual ao dobro do raio da circunferência que circunscreve esse triângulo.**

Experimente agora usar a Lei dos Senos para calcular a distância entre as praias do Flamengo e de Icaraí! Use sen 52° = 0,79, sen 9°=0,16 e sen 119° = 0,87.

**Objetivos:**

- Mostrar uma aplicação do Teorema de Pitágoras no cálculo de distâncias;
- Calcular distâncias utilizando relações trigonométricas em triângulos quaisquer;
- Mostrar e utilizar a lei dos senos para calcular distâncias que não podem ser calculadas diretamente.

**Habilidades relacionadas:**

- **H13 -** Resolver problemas envolvendo a lei dos senos
- **H13 -** C2 - Propor situações contextualizadas, envolvendo um triângulo qualquer, que recaiam na aplicação da lei dos senos.

**Pré-requisitos:**
Teorema de Pitágoras, Razões e Relações trigonométricas.

**Tempo de duração:**
100 minutos (dois tempos de aula)

**Recursos educacionais utilizados:** Ficha Roteiro de Ação 8 – Descobrindo a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos.

**Organização da turma:**
Grupos de 2 a 3 alunos.

**Metodologia adotada:**
Esta atividade deverá ser desenvolvida na própria sala de aula, em grupos de 2 ou 3 alunos que deverão seguir o passo a passo de um roteiro, numa ficha, em que no final compreenderão a dos Senos e a. Nesta ficha será apresentado um desafio em forma de pergunta onde o aluno será colocado em na situação de resolver um problema para calcular uma distância que não pode ser calculada diretamente. Então, será deduzida a Lei dos Senos que é o instrumento adequado para a resolução desse tipo de problema.

**Avaliação:**
Os alunos serão avaliados pelas respostas na ficha, propostos pelo professor. Valor: 1 ponto.

**Referências Bibliográficas:**
1- Roteiro de Ação 8 – Descobrindo a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos – Curso de formação continuada – Matemática – 1° ano – CECIERJ – 2013.

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
SECRETARIA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO
COORDENADORIA REGIONAL METROPOLITANA XI
COLÉGIO ESTADUAL PROF. MURILO BRAGA

Nomes: ............................................................................................................................ N[os] .....................

Turma: 10..... Professor: Juarez Reis Data: ........../........../2013 Nota: ................

# 2ª parte: A Lei dos Cossenos

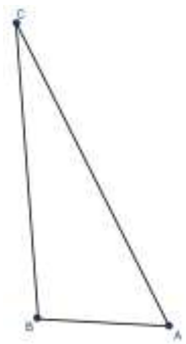
Júlio é piloto de um jatinho comercial, que foi fretado por um grupo de amigos que moram na cidade do Rio de Janeiro - RJ e na cidade de São Paulo – SP e trabalham em Brasília, de 2ª a 5ª feira. Normalmente eles fretam juntos o jatinho da empresa aérea BRARIOSP Táxi Aéreo, para a qual Júlio trabalha, e dividem as despesas da ida e da volta.

Eles combinaram o seguinte trajeto: como a BRARIOSP fica no Rio de Janeiro, RJ, primeiro ele busca, no aeroporto Santos Dumont, 4 desses amigos, percorre em linha reta a distância que separa São Paulo do Rio de Janeiro, de cerca de 385km, num voo direto até o aeroporto de Cumbica, em São Paulo – SP, onde busca mais 7 amigos. Aí segue direto, também em linha reta, até Brasília (DF), percorrendo mais cerca de 867 km. Apesar da distância do Rio até Brasília (cerca de 941 km) ser menor que a distância total percorrida pelos amigos que moram no Rio precisam voar até chegar a Brasília, a viagem acaba compensando porque o custo é parcialmente pago pelo grupo e parcialmente subsidiado pelo seu patrão, sempre muito generoso com despesas de passagens aéreas...

Essa é a primeira vez que Júlio vai fazer esta viagem, e ele precisa informar ao seu equipamento de vôo qual o ângulo entre a rota Rio-São Paulo e São Paulo – Brasília, mas anda meio esquecido dos seus conhecimentos de Trigonometria... Será que você pode ajudá-lo?

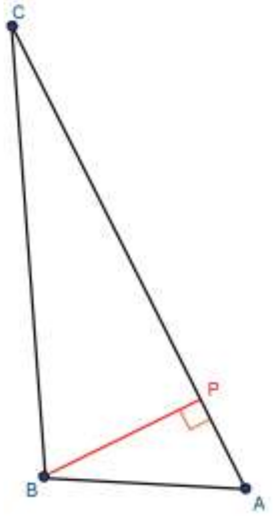
Bem, este é um problema de determinação de ângulo. Conhecemos todas as medidas dos lados do triângulo que tem como vértices os pontos A (representando a cidade do Rio de Janeiro), B (representando a cidade de São Paulo) e C (representando a cidade de Brasília). A figura abaixo mostra esse triângulo, destacado do mapa, para facilitar nosso estudo.

Precisamos calcular a medida do ângulo ABC, para podermos ajudar o Júlio... Mas como podemos fazer isso?




O que conhecemos até agora que relaciona lados e ângulos é a trigonometria no triângulo retângulo. Será que ela pode nos ajudar? Mas como, se esse triângulo não é retângulo (até que parece, mas como não temos certeza, não podemos partir dessa hipótese...).

Mas podemos usar outra estratégia: vamos fazer surgir triângulos retângulos nesse problema! Se tirarmos uma perpendicular por B, conseguimos dois triângulos retângulos! A figura a seguir mostra essa construção. Para facilitar nossos cálculos, vamos chamar o lado BC de a, o lado AC de b e o lado AB de c, sendo ainda $\propto$ a medida do ângulo CAB.




a. Ao traçarmos o segmento BP, perpendicular ao lado AC, dividimos o segmento AC em duas partes. Se a medida do segmento AP é x, como podemos indicar a medida do segmento CP?

b. Se olharmos só para o triângulo APB, podemos afirmar que ele é um triângulo retângulo? Por quê? E o triângulo CPB?

c. Usando o Teorema de Pitágoras nos triângulos APB e CPB, que relações obtemos? (Sugestão: Chame o segmento BP de *h*).

d. Isole $h^2$ nas duas expressões que você obteve acima e iguale-as. O que você encontra?

e. Qual é o cosseno do ângulo BAP? (Dica: Use as razões trigonométricas no triângulo retângulo para responder a essa pergunta!)

f. Você consegue determinar x em função de c e de cos $\alpha$ ?

g. Se você substituir o que encontrou no item (e) na expressão que encontrou no item (d), o que você obtém?

h. Escreva, em língua portuguesa, o significado dessa relação que você determinou.

Essa relação que você encontrou é conhecida como a *Lei dos Cossenos* e apresenta a vantagem de relacionar todos os lados de um triângulo com um de seus ângulos. Retomando o nosso problema, temos o seguinte triângulo:


Como você pode usar a relação acima para determinar a medida do ângulo B? Lembre-se que, se você conhece o valor do cosseno de um ângulo, você conhece o ângulo! Basta consultar uma tabela de valores trigonométricos ou uma calculadora científica (como a que vem disponível no sistema operacional de nossos computadores...). Então, responder a essa pergunta significa determinar qual é o cosseno do ângulo BAC. Você consegue responder?

**Habilidades relacionadas:**

- Resolver problemas, envolvendo a Lei dos Cossenos
- **H13 -** C2 - Propor situações contextualizadas, envolvendo um triângulo qualquer, que recaiam na aplicação da lei dos cossenos.

**Objetivos:** Apresentar a Lei dos Cossenos como uma generalização do Teorema de Pitágoras que pode ser usada em qualquer triângulo.

**Pré-requisitos:**
Teorema de Pitágoras, Razões e Relações trigonométricas.

**Tempo de duração:**
100 minutos (dois tempos de aula)

**Recursos educacionais utilizados:** Ficha Roteiro de Ação 8 – Descobrindo a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos.

**Organização da turma:**
Grupos de 2 a 3 alunos.

**Metodologia adotada:**
Esta atividade deverá ser desenvolvida na própria sala de aula, em grupos de 2 ou 3 alunos que deverão seguir o passo a passo de um roteiro, numa ficha, em que no final compreenderão a Lei dos Cossenos. Nesta ficha será apresentado um desafio em forma de pergunta onde o aluno será colocado em na situação de resolver um problema para determinar o ângulo de um triângulo que não pode ser medido diretamente. Então, será deduzida a Lei dos Cossenos que é o instrumento adequado para a resolução desse tipo de problema.

**Avaliação:**
Os alunos serão avaliados pelas respostas na ficha, propostos pelo professor. Valor: 1 ponto.

**Referências Bibliográficas:**
1- Roteiro de Ação 8 – Descobrindo a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos – Curso de formação continuada – Matemática – 1° ano – CECIERJ – 2013.