FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA.
FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ.

Colégio: COLÉGIO ESTADUAL D. JOÃO VI – QUEIMADOS/RJ.

Tutora: GABRIELA DOS SANTOS BARBOSA.

Cursista: CINTIA AZEVEDO DOS SANTOS.

Série: 1º ANO – ENSINO MÉDIO.

Tema: PLANO DE TRABALHO II – FUNÇÕES TRIGONOMETRICAS.

4º BIMESTRE

1. INTRODUÇÃO:

O objetivo deste segundo plano de trabalho trata das funções trigonométricas. Para tanto, trabalharemos com a ajuda de um projetor.

Na atividade 1, será construído um teodolito em sala de aula, com o objetivo de fazer com que o aluno compreenda a importância da trigonometria através da atividade prática e, também, explorar e incentivar a interação e criatividade dos alunos. Em seguida, estudaremos as funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente. Iniciaremos as atividades com imagens projetadas em sala, sempre buscando estimular e desenvolver tais conceitos; finalizaremos com exercícios.

O professor deve atuar como orientador das atividades, sempre estimulando a que os alunos tirem suas próprias conclusões. Sempre que julgar necessário, o professor deve intervir de forma a orientar os alunos na construção de suas conclusões.

Finalmente, estimulando as atividades em equipe, o docente poderá gerar em seus alunos noções de organização e cidadania, como o espírito de grupo.

2. DESENVOLVIMENTO:

ATIVIDADE 1:

Habilidade relacionada: Explorar a interação entre os alunos para que, desta forma, desenvolvam-se, interajam e dividam dúvidas; a socialização entre os alunos e entre alunos e professor. Fornecer maior significado aos conceitos trabalhados.

Tempo de duração: 150 minutos.

Pré-requisito: Triângulo retângulo.

Recursos educacionais: Projetor, computador, transferidor, clips, canudo, papelão, fita adesiva, tesoura e fita-métrica ou trena.

Organização da turma: Grupos de cinco ou seis alunos.

Objetivo: Compreender a importância das relações trigonométricas.

Metodologia:

Nesta atividade construiremos o teodolito em sala com o objetivo de fazer com que o aluno compreenda a importância que as relações trigonométricas desempenham nas medidas de distância.

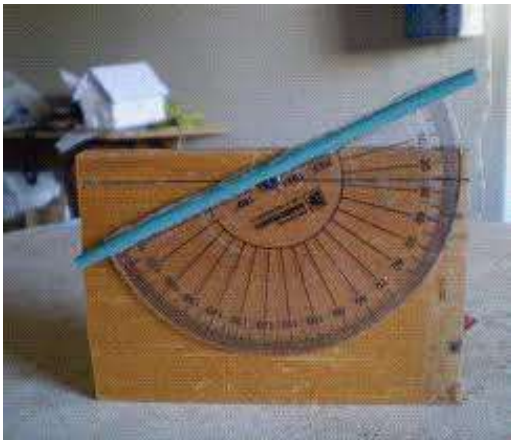
Iniciaremos a atividade com o vídeo 1

(localizado em http://www.youtube.com/watch?v=LwH04TEppnE&feature=fvwrel)

e em seguida o vídeo 2

(localizado em http://www.youtube.com/watch?v=9gvhGZHOcc8&feature=related).

Será proposta a construção, em grupo, de teodolitos em sala. Em seguida, os alunos se dirigirão ao pátio da escola com a tarefa de medir a altura da escola (prédio). Serão apresentadas as imagens abaixo de teodolitos, para que o aluno perceba sua evolução.



Para finalizar a atividade termos um debate iniciado pelas perguntas abaixo:

1) Será possível utilizar este método para medir outras distâncias?Quais?

2) Em que situações você utilizaria este método?

3) Você conhece outros métodos de medidas indiretas? Cite-os.

4) Tente imaginar como seriam feitas as seguintes medidas:

- distância entre dois planetas;

- distância da Terra até a Lua;

- raio de um planeta;

- tamanho de uma bactéria.

ATIVIDADE 2:

Habilidade relacionada: Transitar pelo ciclo trigonométrico reconhecendo a função seno.

Tempo de duração: 100 minutos.

Pré-requisito: Conceito de ângulo, radiano, circunferência trigonométrica e funções.

Recursos educacionais: Projetor, quadro branco e caneta para quadro branco.

Organização da turma: Duplas.

Objetivo: Compreender o conceito de função seno.

Metodologia:

Iniciaremos exibindo o vídeo para relembrar seno, cosseno e tangente dos ângulos 30º, 45° e 60° e será cantado em sala

(localizado em http://www.youtube.com/watch?v=ls3eOzsX66M)

Em seguida, as imagens abaixo:

A trigonometria, a roda-gigante e os fenômenos periódicos

A roda-gigante é uma das atrações mais tradicionais de todo parque de diversões.

Imagine que a roda-gigante mostrada na figura 1 a seguir tenha 12 cadeiras igualmente distribuídas ao longo da circunferência, que mede 9 m de raio. Uma estrutura de ferro sustenta a roda-gigante a partir do seu centro, mantendo-a presa ao solo. A distância do centro da roda ao solo é 10 m.

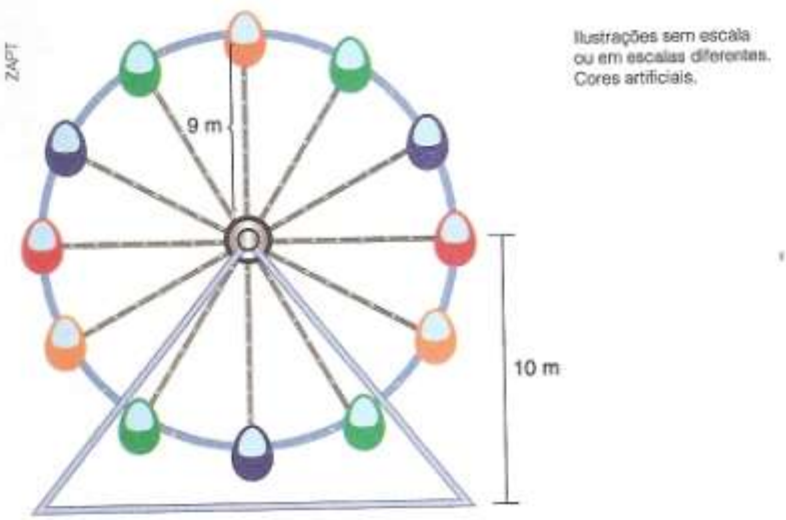


Figura 1

A roda gira, lentamente, com velocidade praticamente constante de 3° por segundo, completando a volta em 120 s. Um passageiro sentado em uma das cadeiras observa que sua altura em relação ao solo vai variando de maneira periódica ao longo do passeio, de forma que uma determinada altura é atingida algumas vezes à medida que a roda executa as várias voltas do passeio.

Como podemos expressar a altura em que se encontra uma determinada cadeira a cada instante do passeio?

Imagine que, no início do passeio, um passageiro se encontra na cadeira *A*. Como a velocidade de giro é de 3°/s, em 10 s cada cadeira percorre 30°. Na figura 2 estão representadas as posições que esse passageiro vai ocupar a cada 10 s ao longo de uma volta completa da roda.

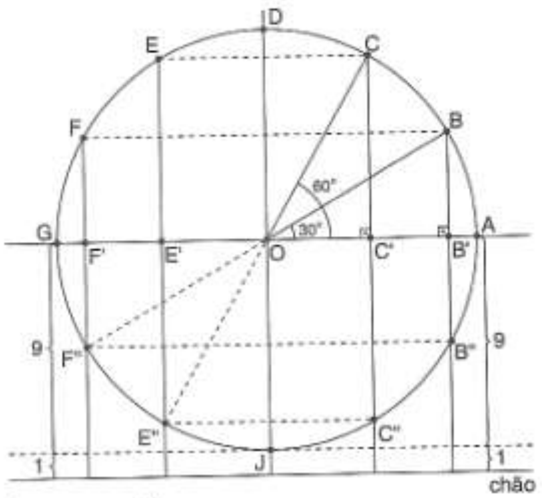


Figura 2

Velocidade de giro: $3°/s \left(\text{ou } \frac{\pi}{60} \text{ rad/s}\right)$

$\Delta BOB'$: $\text{sen } 30° = \frac{BB'}{OB} \Rightarrow BB' = 9 \cdot \text{sen } (10 \cdot 3°) = 9 \cdot \text{sen} \left(10 \cdot \frac{\pi}{60}\right)$

$\Delta COC'$: $\text{sen } 60° = \frac{CC'}{OC} \Rightarrow CC' = 9 \cdot \text{sen } (20 \cdot 3°) = 9 \cdot \text{sen} \left(20 \cdot \frac{\pi}{60}\right)$

Observe que são iguais as alturas correspondentes aos seguintes pares de posições: *A* e *G*, *B* e *F*, *C* e *E*, *F''* e *B''* e *E''* e *C''*.

Além disso, os segmentos $\overline{BB'}$, $\overline{FF'}$, $\overline{F'F''}$ e $\overline{B'B''}$ são congruentes (atenção, porém, para a diferença das alturas correspondentes a *B* e *B''* e a *F* e *F''*!), ocorrendo o mesmo com os segmentos $\overline{CC'}$, $\overline{EE'}$, $\overline{E'E''}$ e $\overline{C'C''}$.

Temos as seguintes posições para uma volta completa na roda:

Tempo (s)	Posição	Altura (m)
0	A	$10 + \underbrace{9 \cdot \text{sen}\left(0 \cdot \frac{\pi}{60}\right)}_{0} = 10$
10	B	$10 + \underbrace{9 \cdot \text{sen}\left(10 \cdot \frac{\pi}{60}\right)}_{4,5} = 14,5$
20	C	$10 + \underbrace{9 \cdot \text{sen}\left(20 \cdot \frac{\pi}{60}\right)}_{\cong 7,79} \cong 17,9$
30	D	$10 + \underbrace{9 \cdot \text{sen}\left(30 \cdot \frac{\pi}{60}\right)}_{9} = 19$
40	E	$10 + \underbrace{9 \cdot \text{sen}\left(40 \cdot \frac{\pi}{60}\right)}_{\cong 7,79} \cong 17,9$
⋮	⋮	⋮
70	F"	$10 + \underbrace{9 \cdot \text{sen}\left(70 \cdot \frac{\pi}{60}\right)}_{-4,5} = 5,5$
⋮	⋮	⋮
90	J	$10 + \underbrace{9 \cdot \text{sen}\left(90 \cdot \frac{\pi}{60}\right)}_{-9} = 1$
⋮	⋮	⋮
110	B"	$10 + \underbrace{9 \cdot \text{sen}\left(110 \cdot \frac{\pi}{60}\right)}_{-4,5} = 5,5$
120	A	$10 + \underbrace{9 \cdot \text{sen}\left(120 \cdot \frac{\pi}{60}\right)}_{0} = 10$

Observação

Note que a altura relativa ao ponto F'', por exemplo, pode ser expressa por:

$(9 - \underbrace{9 \cdot \text{sen } 30°}_{FF'}) + 1 = 10 - 9 \cdot \text{sen } 30° = 10 + 9 \cdot \text{sen } 210° = 10 + 9 \cdot \text{sen}\left(70 \cdot \frac{\pi}{60}\right)$.

Raciocínio análogo pode ser usado para os pontos E'', C'' e B''.

Observando a primeira e a última coluna da tabela, vemos que, para cada instante t (em segundos), corresponde uma altura h (em metros), dada por:

$$h(t) = 10 + 9 \cdot \text{sen}\left(t \cdot \frac{\pi}{60}\right)$$

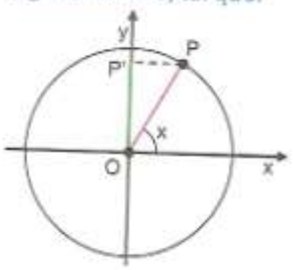
Veja que o período dessa função é $\frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{60}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{60}} = 120$ (120 s é o tempo de execução de uma volta completa).

A diferença entre a maior e a menor altura atingida nesse movimento é $\underbrace{19}_{h_{máx}} - \underbrace{1}_{h_{mín}} = 18$ metros

Referência bibliográfica
www.membros.aveiro_digital.net/adam/oficina.

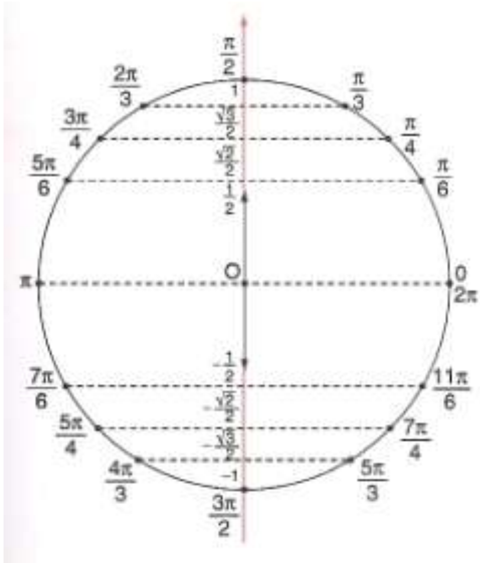
Formalizando o conceito de função seno. O professor poderá dar explicações no quadro.

Dado um número real **x**, no ciclo trigonométrico, tal que:

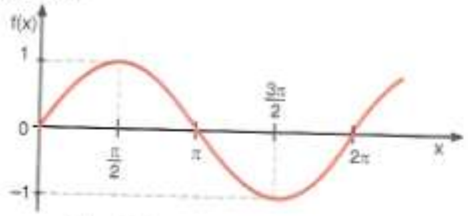


A ordenada do ponto **P** é o seno de **x**, ou seja, OP' = sen x. Dessa forma, denomina-se **função seno**, toda função f: ℝ → ℝ que associa cada **x** real a OP' por meio da relação f(x) = sen x.

Em seguida, o aluno deve ser levado a construção do ciclo abaixo e identificar, com a orientação do professor, as propriedades da função seno:



2. A curva do gráfico da função seno, ou seja, quando f(x) = sen x, é denominada senoide, e sua representação no plano cartesiano é:



Dessa forma, ao observar o gráfico da função, responda:

a) Em quais quadrantes ela é positiva? E negativa?

____

b) Em quais quadrantes ela é crescente? E decrescente?

____

c) Complete as tabelas com o valor do seno do ângulo x:

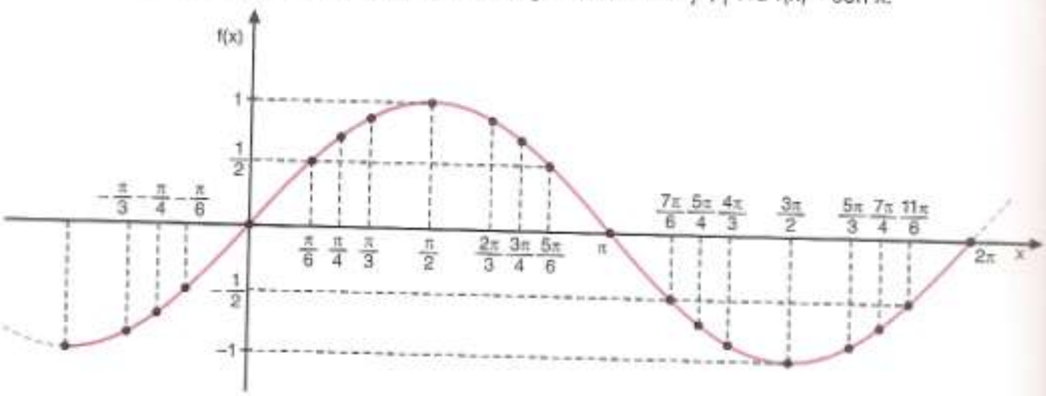
x	y = sen x
0	
$\frac{\pi}{6}$	
$\frac{\pi}{4}$	
$\frac{\pi}{3}$	

x	y = sen x
$\frac{\pi}{2}$	
$\frac{2\pi}{3}$	
$\frac{3\pi}{4}$	
$\frac{5\pi}{6}$	

x	y = sen x
π	
$\frac{7\pi}{6}$	
$\frac{5\pi}{4}$	
$\frac{4\pi}{3}$	

x	y = sen x
$\frac{3\pi}{2}$	
$\frac{5\pi}{3}$	
$\frac{7\pi}{4}$	
$\frac{11\pi}{6}$	
2π	

Observe mais detalhadamente o gráfico da função seno, ou seja, para f(x) = sen x.



3. De acordo com o gráfico, escreva os conjuntos domínio e imagem:

____

A função f(x) = sen x é periódica, pois sen x = sen (x + 2π), e seu período é 2π. Para uma função f(x) = sen (mx + n), o período é igual a $\frac{2\pi}{|m|}$.

ATIVIDADE 3:

Habilidade relacionada: Transitar pelo ciclo trigonométrico reconhecendo a função cosseno.

Tempo de duração: 100 minutos.

Pré-requisito: Conceito de ângulo, radiano, circunferência trigonométrica e funções.

Recursos educacionais: Projetor, quadro branco e caneta para quadro branco.

Organização da turma: Duplas.

Objetivo: Compreender o conceito de função cosseno.

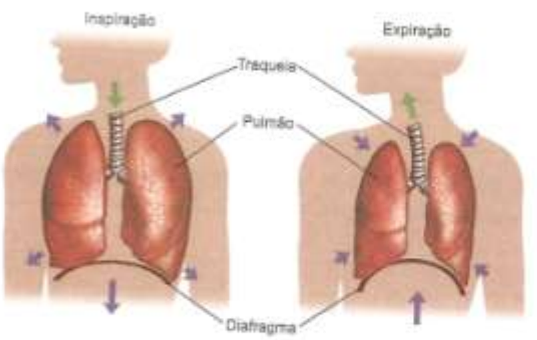
Metodologia:

Iniciaremos exibindo as imagens abaixo:

Função cosseno

O volume máximo de ar, nos pulmões e nas vias respiratórias, é de aproximadamente 5 L para uma inspiração forçada e, após uma expiração forçada, resta nas vias aéreas 1,2 L de ar. A frequência respiratória de uma pessoa que esteja em relativo repouso é da ordem de 10 a 15 movimentos por minuto. Como, normalmente, a respiração é um movimento periódico, pode-se representá-la por uma função trigonométrica. Observe:

$$v(t) = 3,1 + 1,9 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$$



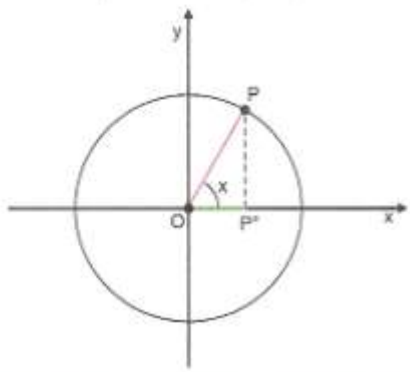
Nessa função, **v** é o volume de ar, em litros, nos pulmões e nas vias respiratórias; **t** é o tempo em segundos.

1. Complete, na tabela, os valores de **v** que estão faltando:

Tempo (segundos)	Volume (litros)
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

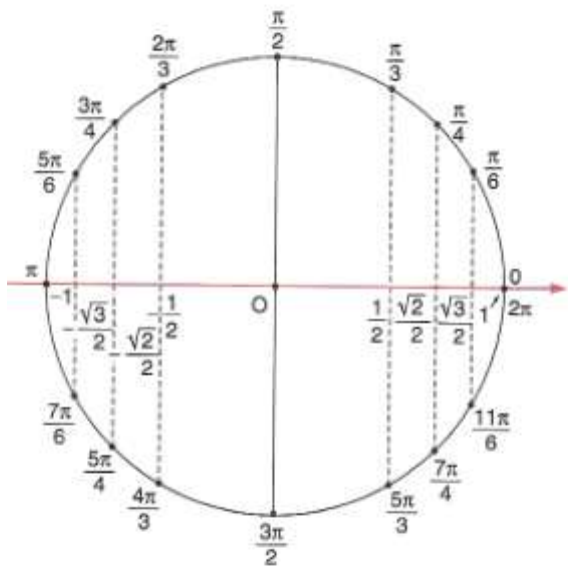
Formalizando o conceito de função cosseno. O professor poderá dar explicações no quadro.

Dado um número real x, no ciclo trigonométrico, tal que:



A abscissa $\overline{OP''}$ do ponto **P** é o cosseno de **x**, ou seja, $\overline{OP''}$ = cos x. Dessa forma, denomina-se de **função cosseno** a toda função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada **x** real, a $\overline{OP''}$ por meio da relação f(x) = cos x.

Em seguida, o aluno deve ser levado a construção do ciclo abaixo e identificar, com a orientação do professor, as propriedades da função cosseno:



9. Complete as tabelas com o valor do cosseno do ângulo **x**:

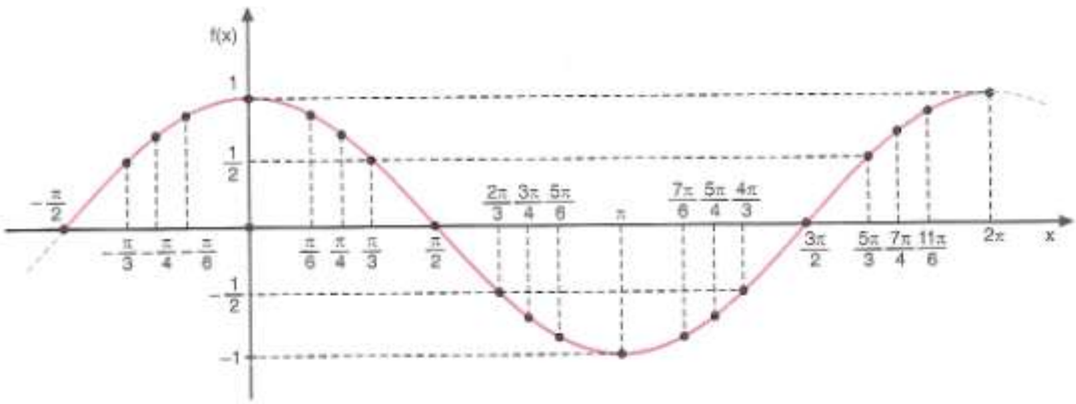
x	y = cos x
0	
$\frac{\pi}{6}$	
$\frac{\pi}{4}$	
$\frac{\pi}{3}$	

x	y = cos x
$\frac{\pi}{2}$	
$\frac{2\pi}{3}$	
$\frac{3\pi}{4}$	
$\frac{5\pi}{6}$	

x	y = cos x
π	
$\frac{7\pi}{6}$	
$\frac{5\pi}{4}$	
$\frac{4\pi}{3}$	

x	y = cos x
$\frac{3\pi}{2}$	
$\frac{5\pi}{3}$	
$\frac{7\pi}{4}$	
$\frac{11\pi}{6}$	
2π	

Observe, mais detalhadamente, o gráfico da função cosseno, para f(x) = cos x:



ATIVIDADE 4:

Habilidade relacionada: Transitar pelo ciclo trigonométrico e reconhecer a função tangente.

Tempo de duração: 100 minutos.

Pré-requisito: Conceito de ângulo, radiano, circunferência trigonométrica e funções.

Recursos educacionais: Projetor, quadro branco e caneta para quadro branco.

Organização da turma: Duplas.

Objetivo: Compreender o conceito de função tangente.

Metodologia:

Iniciaremos exibindo as imagens abaixo:

Esta expressão "sair pela tangente" é muito comum em nosso vocabulário, mas a verdadeira origem está na Física.

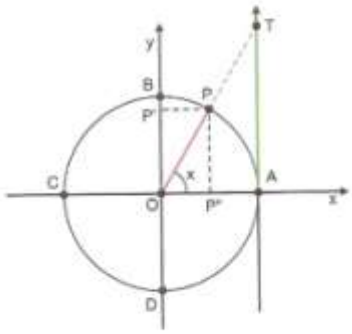
Segundo o conceito físico de inércia, um corpo tende a manter o seu estado de movimento (repouso ou movimento retilíneo uniforme). Um motociclista, por exemplo, ao derrapar em uma curva, sem nenhuma força resultante agindo sobre ele, tende a continuar o seu movimento em linha reta, conforme mostra a ilustração.

Uma reta tangente é aquela que toca uma curva em um único ponto, sem cortá-la. Repare que a reta em vermelho atinge a curva em apenas um local, "escapando" dela em seguida. Por isso, diz-se que o corpo sai pela tangente.

Ao ler o trecho da letra da música, é possível supor que o autor anseia muito pela volta de sua amada, prevendo que, se ela não o fizer logo, ele pode mudar a trajetória da sua vida, saindo pela tangente.

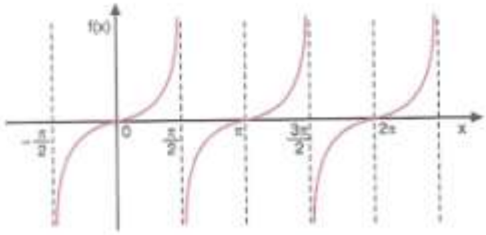
Função tangente

Dado um número real **x**, no ciclo trigonométrico, tal que:



A medida do segmento $\overline{AT}$ é a tangente de **x**, ou seja, $\overline{AT} = \text{tg}\,x$. Dessa forma, denomina-se **função tangente** toda função $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada **x** real à medida de $\overline{AT}$, por meio da relação $f(x) = \text{tg}\,x$.

O gráfico da função tangente está representado neste plano cartesiano:



1. Ao observar o gráfico da função, responda:

a) Em quais quadrantes ela é positiva? E negativa?

____

____

b) Em quais quadrantes ela é crescente? E decrescente?

____

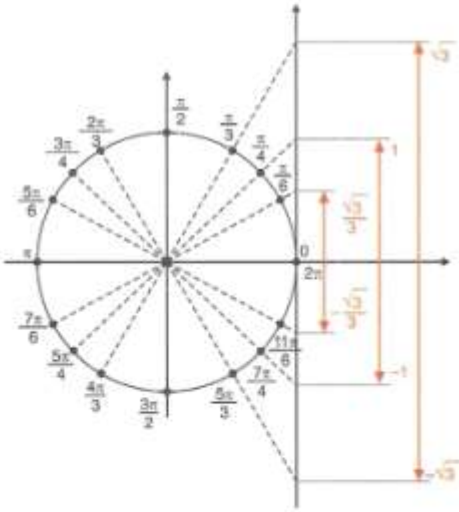
2. Complete as tabelas com o valor da tangente do ângulo **x**:

x	y = tg x
0	
$\frac{\pi}{6}$	
$\frac{\pi}{4}$	
$\frac{\pi}{3}$	

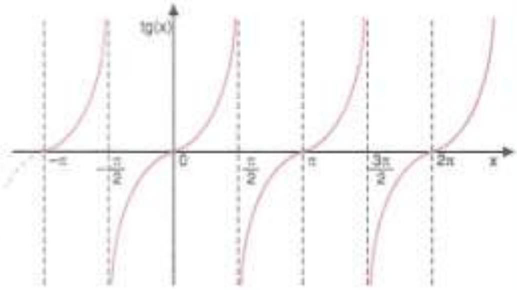
x	y = tg x
$\frac{\pi}{2}$	
$\frac{2\pi}{3}$	
$\frac{3\pi}{4}$	
$\frac{5\pi}{6}$	

x	y = tg x
π	
$\frac{7\pi}{6}$	
$\frac{5\pi}{4}$	
$\frac{4\pi}{3}$	

x	y = tg x
$\frac{3\pi}{2}$	
$\frac{5\pi}{3}$	
$\frac{7\pi}{4}$	
$\frac{11\pi}{6}$	
2π	



Observe, mais detalhadamente, o gráfico da função tangente, ou seja, para $f(x) = \text{tg } x$:

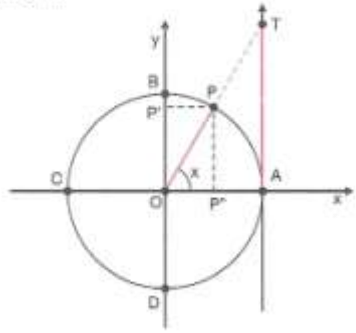


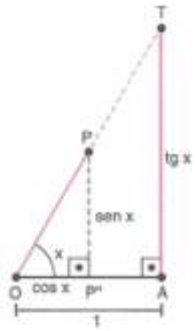
3. De acordo com o gráfico, escreva os conjuntos domínio e imagem:

____

A função $f(x) = \text{tg } x$ é periódica, pois $\text{tg } x = \text{tg } (x + \pi)$ e seu período é π. Para uma função $f(x) = \text{tg } (mx + n)$, o período é igual a $\frac{\pi}{|m|}$.

Da circunferência trigonométrica, pode-se destacar o triângulo OAT:





4. Utilizando os catetos dos triângulos retângulos, estabeleça a semelhança entre eles.

ATIVIDADE 5:

Habilidade relacionada: Fornecer maior significado aos conceitos trabalhados.

Tempo de duração: 100 minutos.

Pré-requisito: Função seno, função cosseno e função tangente.

Recursos educacionais: Projetor, quadro branco e caneta para quadro branco.

Organização da turma: Duplas.

Objetivo: Possibilitar um maior envolvimento dos alunos com o tema estudado, explorando seus conhecimentos sobre os conteúdos abordados.

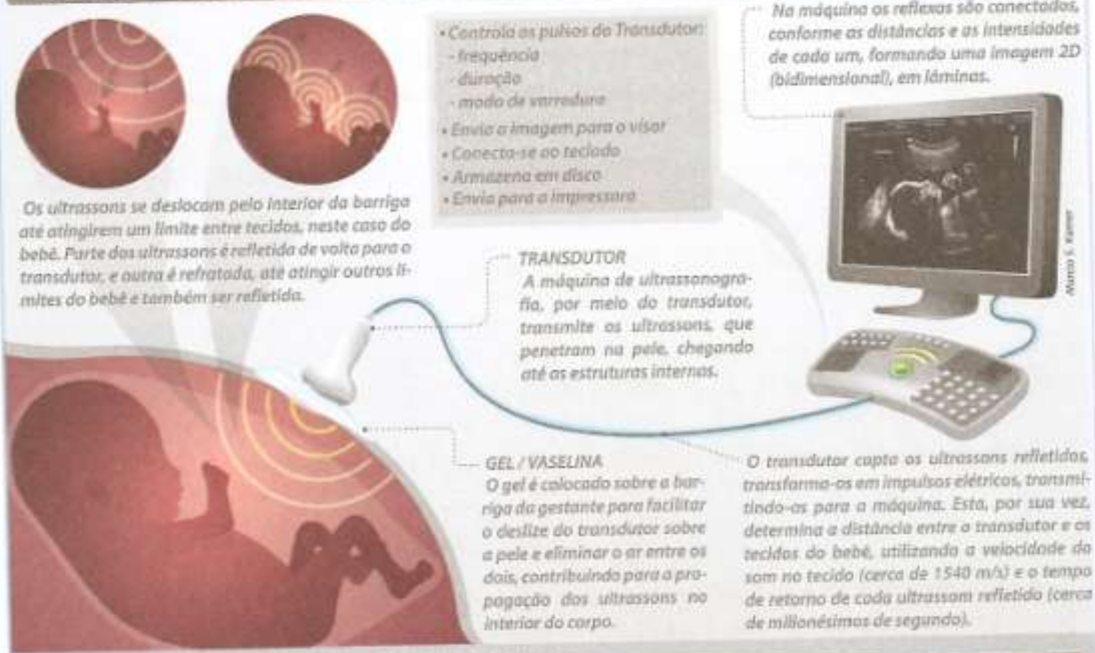
Metodologia:

Iniciaremos exibindo as imagens abaixo, e em seguida, serão finalizadas as atividades sobre funções trigonométricas com uma revisão dada pelo professor recordando as aulas anteriores, respondendo o questionário em duplas e os exercícios.

Conectando ideias

PROPAGAÇÃO ULTRASSÔNICA

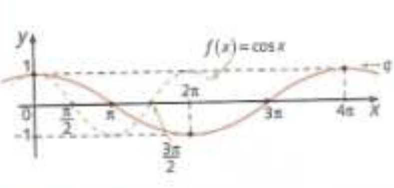
A medicina a cada dia procura desenvolver meios que visam fazer investigações no interior do corpo humano. Dentre eles, está a ultrassonografia, que por meio da emissão e reflexão (eco) de ultrassons, vibrações com frequências acima de 20 000 Hz (hertz), permite algumas dessas investigações de maneira não invasiva ou minimamente invasiva. No caso da ultrassonografia, os equipamentos trabalham com frequências entre 1 e 5 MHz (megahertz), imperceptíveis ao ouvido humano.

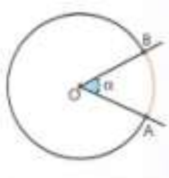


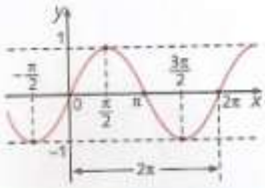
a) Existe relação entre os conteúdos abordados neste capítulo e a propagação das vibrações? Justifique.
b) Os conhecimentos que você possui sobre funções trigonométricas o ajudaram a entender as informações apresentadas? Justifique.

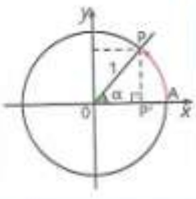
Finalizando a conversa

a) O que você entendeu acerca das funções trigonométricas?
b) As funções seno e cosseno são periódicas? Justifique.
c) O que diferencia a função seno da função cosseno?
d) Em que situações são utilizadas funções trigonométricas?
e) Você considerou importante o estudo deste capítulo? Por quê?
f) As imagens a seguir foram apresentadas ao longo do capítulo. Escolha duas delas e escreva, de maneira resumida, o que elas representam em relação ao que você estudou neste capítulo.









Exercícios:

1) um pêndulo movimenta-se horizontalmente, e seu deslocamento pode ser expresso pela função $d(t) = 8sen(3\pi t)$, em que t é o tempo em segundos, e d é o deslocamento em centímetros. Determine a amplitude e o período do movimento realizado por esse pêndulo.

2) Durante o mês de janeiro, a quantidade de litros de sorvete vendida por dia em certa sorveteria pode ser descrita pela função $s(d) = 80\text{-}40\cos\left(\frac{\pi}{15}(t-1)\right)$, em que d é o dia do mês, e s é a quantidade de litros de sorvete.

a) Em qual dia do mês foi vendida maior quantidade de sorvete? Quantos litros foram vendidos?

b) Determine o período da função s.

3) O lucro mensal de uma empresa foi descrito, aproximadamente, por uma função trigonométrica. Na função a seguir, L é o lucro expresso em centenas de reais e t é o dia do mês (t=0 é o ultimo dia do mês anterior). Considere o mês com 24 dias, isto é, excluindo os finais de semana

$$L(t) = 40sen\left(\frac{\pi}{12}.t\right)$$

a) Determine o lucro máximo e mínimo d empresa.

b) Trace o gráfico que representa essa função.

c) Em quais dias do mês o lucro é nulo?

4) Nas funções representadas a seguir, com $x \in R$, determine o maior e o menor valor de y:

a) $y = \frac{2}{4-cosx}$

b) $f(x) = \frac{1}{3+4cosx}$

5) Qual o valor numérico da função $f(x) = sen(2x) - tg\ x + \sqrt{2}.\ cos(3x)$ para x=135°?

3. AVALIAÇÃO:

Para que a avaliação seja feita de forma satisfatória deve ser constante e contínua. Ao longo da feitura das atividades, o professor deve ser capaz de perceber e, a partir daí, avaliar a participação dos alunos na resolução dos exercícios propostos, seja de modo individual e/ou em grupo.

Além da avaliação do professor também é interessante que os alunos se autoavaliem, a fim de estabelecer um julgamento crítico sobre a própria aprendizagem, verificando as atividades que efetivamente realizaram, o nível de empenho que empregaram nelas, as dificuldades que apresentaram e por que acham que as tiveram.

As avaliações podem ser informais (trabalhos, exercícios, debates etc.) trabalhadas no dia-a-dia da sala de aula e juntamente, também podemos ter uma avaliação formal, onde se pode utilizar uma aula para uma prova contendo questões do Saerj, Enem, vestibulares etc. e, posteriormente, ser corrigida em sala com os alunos.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

BARROSO, J. B. (Org.) *Conexões com a matemática.* São Paulo: Ed. Moderna, 2010.

CÂNDIDO, S. L., SCORDAMAGLIO, M. T., VASCONCELLOS, M. J. C. *Matemática.* São Paulo: Editora do Brasil, /s.d./ (*Coleção matemática*.)

FARAGO, J. L., *Ensino Médio: 1º série*. Vol. III. Curitiba: Positivo, 2010.

PAIVA, M. *Matemática.* São Paulo: Ed. Moderna, 2009.

RIBEIRO, J. *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia*. Vol. I: Ensino médio. São Paulo: Scipione, 2010.

SILVA, C. X. *Matemática aula por aula.* São Paulo: Ed. FTD, 2005. (*Coleção matemática aula por aula*.)