Curso de Aperfeiçoamento de professores de matemática.

9° ano do ensino fundamental

1° Bimestre/2013

Plano de trabalho refeito

Números reais e radiciação.

Cursista: Israel de Souza Barbosa.

Tutor: Emilio Rubem

Avaliação da implementação do plano de trabalho.

Pontos positivos:

A metodologia aplicada foi desenvolvida ao longo tempo, isso facilita a aprendizagem. A forma de abordagem gera a curiosidade dos alunos e isso facilita a aprendizagem e o trabalho em grupo. O resultado final foi bem satisfatório.

Pontos negativos:

As dúvidas não sanadas e os conteúdos que não ficaram bem claros para os alunos geraram um pouco de transtorno. Eu tive que voltar a falar de conteúdos de séries anteriores.

Tive que falar de radiciação, potenciação e, principalmente, a regra de sinais que os alunos já deveriam saber. Isso atrasou um pouco o meu trabalho e agora eu vou ter que me preparar para colocar algum tempinho a mais para uma revisão dos conteúdos.

Alterações:

Não vou fazer alterações significativas em meu plano de trabalho, pois o resultado final estava de acordo com o que eu esperava. O que vou fazer é acrescentar mais três tempos de aula, um para cada etapa das três iniciais, onde este tempo extra me possibilitará lidar com esses tópicos de séries anteriores que me obrigam a relembrá-los.

Impressões dos alunos:

Os alunos reagiram bem e não tiveram aquela velha opinião de que a matemática não serve para nada. Só o que os desestimulou um pouco foi o fato de que as dúvidas de conteúdos de séries anteriores acabaram criando dúvidas nos conteúdos de agora. Mas eu lidei com isso voltando a falar sobre tais conteúdos e sanando suas dúvidas.

Introdução

Este plano de trabalho traz um novo ponto de vista sobre alguns tópicos matemáticos. Os conceitos sobre o conjunto **R** e a radiciação são apresentados de um novo jeito, procurando abordar temas cotidianos e apresentando, de uma forma intuitiva, os conceitos teóricos algébricos.

Procuramos mostrar neste plano um novo jeito de abordar este assunto, com questões mais contextualizadas e apresentando alguns tópicos algébricos, não como uma regra matemática que devemos seguir a risca, e sim como uma consequência de problemas cotidianos que vivemos.

Começamos com uma introdução sobre os conjuntos já estudados e acabamos nos deparando com um novo conjunto, o conjunto **R**, e tivemos que determinar o seu lugar e sua representatividade.

Este plano foi dividido em cinco etapas, sendo a última reservada para as considerações sobre a avaliação.

Como se procurou contextualizar os conteúdos e criar uma relação de consequência entre eles e levando-se em consideração de que terei que fazer revisão de conteúdos de séries anteriores, serão necessários quatro tempos de 50 minutos para as três etapa iniciais e três tempos de 50min para as demais etapas do nosso plano de trabalho. A revisão citada não será dada em um momento específico e sim ao longo das aulas como se fosse parte do próprio conteúdos lecionado.

Desenvolvimento

1°etapa

Habilidade:
D39 - Identificar a localização de números inteiros na reta numérica.
D42 - Identificar a localização de números racionais na reta numérica.
D45 - Efetuar cálculos com números inteiros, envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).

Pré-requisito: Saber identificar números racionais.

Duração da aula: 200 minutos.

Recursos didáticos: Quadro e caneta esferográfica.

Organização da turma: individual.

Objetivos da etapa 01: Revisar os conjuntos já estudados e entender a transformação de números naturais e inteiros em números fracionários.

Metodologia adotada:
Desenvolvimento:

Observemos a reta numérica a seguir:

1 2 3 4 5 6 7 8 +∞

Esta é a reta que contém os números naturais, ou seja, o conjunto **N**.

Mais a frente, vimos a seguinte reta:

-∞ -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 +∞

Que conhecemos por conter os números inteiros, ou seja, o conjunto **Z**.

Posteriormente, conhecemos uma nova reta numérica:

-∞   -3   -2,5   -2 $-\frac{1}{5}$ -1   -0,7   -0,3   0   0,5   0,9   1 $\frac{3}{2}$ 2 $\frac{5}{2}$ 3   +∞

Esta reta abrange os números fracionários e decimais, sendo conhecidos como conjunto dos números racionais e representado por **Q**.

Vimos que cada conjunto anterior está inserido no conjunto posterior, ou seja, o conjunto **N** está contido em **Z** e o conjunto **Z** está contido em **Q**, logo temos que N está contido em Q. Em linguagem matemática temos:

(**N** c **Z** ^ **Z** c **Q**) → (**N** c **Q**)

Com o conjunto Q temos uma reta numérica completa, mas será que esta reta realmente está completa? Bem! Diremos que sim até que se prove o contrário.

Falemos um pouco dos números racionais.

Entre as várias definições, tomaremos uma bem tradicional.

Todo número que pode ser escrito sob forma de fração é chamado de número racional. Lembrando que é todo número que pode ser escrito e não, necessariamente, tem que estar escrito sob a forma de fração.

Exemplificação:

$\frac{5}{2}$ equivale a 2,5.

Tanto o a fração quanto o número decimal são números racionais.

Exemplificação:

$\frac{1}{3}$ equivale a 0,333....

Como a dízima periódica 0,333... pode ser representada por uma fração, dizemos que ele também é um número racional.

Com isso, vemos que todo número fracionário ou que pode ser escrito sob a forma de uma fração, como os decimais ou dízimas periódicas, são números racionais.

Os números naturais e inteiros também podem ser considerados números racionais, pois podem ser escrito sob forma de fração.

Exemplificação:

2 equivale a $\frac{2}{1}$

-7 equivale a $\frac{-7}{1}$

35 equivale a $\frac{35}{1}$

E assim sucessivamente.

Atividades

1° parte.

Apresentar diversos números naturais, inteiros e racionais e pedir aos alunos que identifiquem a que conjunto cada valor pertence.

2° parte.

Apresentar diversos números fracionários e pedir que os alunos transformem em dízimas ou decimais tais números.

2°etapa

Habilidade:
D53 – Reconhecer/identificar diferentes representações de um mesmo número racional
D65 – Efetuar cálculos simples com valores aproximados de radicais.

Pré-requisito: Conhecer o teorema de Pitágoras.

Duração da aula: 200 minutos.

Recursos didáticos: Compasso, régua.

Organização da turma: Grupo de dois ou três alunos.

Objetivos da etapa 02: Conhecer o conjunto dos números irracionais e saber a sua localização na reta numérica.

Metodologia adotada:
Desenvolvimento:

Tudo que vemos até aqui nos mostrou que o conjunto **Q** completa a reta numérica, mas vamos analisar a seguinte situação:

Temos uma mesa quadrada de 1m de lado e precisamos medir a sua diagonal. Uma questão simples que podemos resolver usando o conceito básico do teorema de Pitágoras.

Vamos lá:

Quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos. Em termos matemáticos:

$a^2+b^2=c^2$

Sendo **a** e **b** os catetos e **c** a hipotenusa e aplicando no problema inicial, temos:

$a^2+b^2=c^2 \rightarrow 1^2+1^2 = C^2 \rightarrow 1 + 1 = C^2 \rightarrow C^2 = 2$

C = $\sqrt[2]{2}$

Vemos que a diagonal desta mesa mede $\sqrt[2]{2}$ m, mas como saber exatamente o valor exato da $\sqrt[2]{2}$. E como representar este valor sob a forma de fração?

Usaremos uma calculadora para nos auxiliar.

Quando pedimos que a calculadora faça os cálculos, ela dará o seguinte resultado:

$\sqrt[2]{2}$ = 1,4142135623730950488016887242097...

Vemos que este tipo de dízima não apresenta um período e, por mais que tentemos, nunca conseguiremos representar este valor sob a forma de fração.

O mesmo acontece para outras raízes quadrada como veremos a seguir:

$\sqrt[2]{3}$ = 1,7320508075688772935274463415059...

$\sqrt[2]{5}$ = 2,2360679774997896964091736687313...

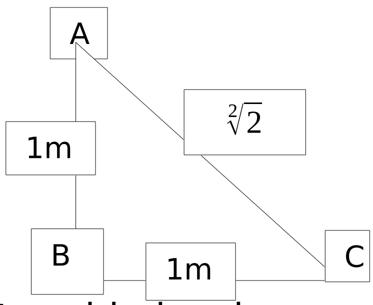
$\sqrt[2]{7}$ = 2,6457513110645905905016157536393...

$\sqrt[2]{8}$ = 2,8284271247461900976033774484194...

Todas estas raízes não apresentam período e nem podem ser representados sob a forma de fração. Então não podemos chamá-los de números racionais. Estamos encontrando uma nova classe de números, os chamados números irracionais.

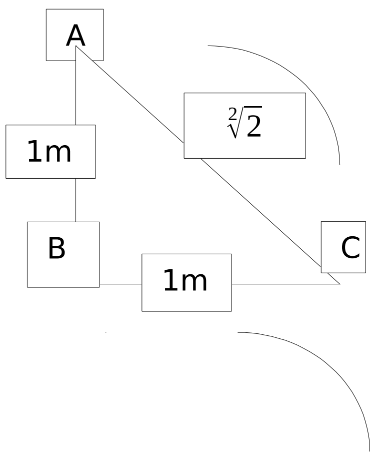
Se temos uma nova classe de números ela pode ser representada por uma reta numérica, mas como representar com exatidão tais números na reta?

Para o problema da mesa, temos o valor e a figura:



Colocaremos as extremidades de um compasso nos vértices A e C do triângulo. Pronto, esta medida é a $\sqrt[2]{2}$. Agora colocaremos uma das extremidades do compasso no ponto zero da reta numérica e veremos onde a outra irá atingir:

Exemplificação:



-∞ -2 -1 0 1 2

+∞

$\sqrt[2]{2}$ =

1,414213562373095...

Deste modo conseguimos marcar, com exatidão, o número irracional na reta numérica.

Bem!

Se temos uma nova classe de números e uma nova reta numérica, precisamos classificar este conjunto com uma letra.

O conjunto dos números irracionais é representado pela letra **I**.

A este conjunto temos todos os números irracionais como $\sqrt[2]{2}$, $\sqrt[2]{3}$, $\sqrt[2]{7}$, π, 1,732050... , 2,758694... , etc...

Para os conjuntos anteriores, vimos que (N c Z → Z c Q) (N c Q)

Mas o conjunto **I** é um conjunto exclusivo e quando unificamos o conjunto **I** com o conjunto **Q** formamos um novo conjunto que chamaremos de conjunto dos números reais e representaremos pela letra **R**.

O conjunto dos números reais abrange todos os números estudados até aqui. A nova representação numérica e apresentada a seguir:

-∞ -1 -0,5 0 $\frac{1}{2}$ 1 $\sqrt[2]{2}$ 2

2,4578714596... 3 π +∞

Atividades

1° parte.

Apresentar diversos números e pedir que os alunos identifiquem a que conjunto eles pertencem.

2° parte.

Apresentar uma reta numérica e diversos números, racionais e irracionais, e pedir que os alunos identifiquem sua posição na reta.

3° parte.

Pedir aos alunos que criem triângulos retângulos que apresentem uma hipotenusa cujo valor seja irracional e, com a ajuda de um compasso, determine a sua posição na reta numérica.

3°etapa

Habilidade:
D65 – Efetuar cálculos simples com valores aproximados de radicais.

Pré-requisito: Saber calcular raiz quadrada exata.

Duração da aula: 200 minutos.

Recursos didáticos: Quadro e caneta esferográfica.

Organização da turma: individual.

Objetivos da etapa 03: Calcular raízes enésimas.

Metodologia adotada:
Desenvolvimento:

Quando falamos sobre radiciação lembramos de raiz quadrada e vêm em mente algo do tipo $\sqrt[2]{9}$ = ±3.

Dizemos que $\sqrt[2]{9}$ = ±3, pois pensamos em um número que multiplicado por ele mesmo duas vezes dá o valor do radicando.

Devemos, ainda, lembrarmos de algumas propriedades da radiciação:

$$\sqrt[2]{a} * \sqrt[2]{b} = \sqrt[2]{a*b}$$

$$\frac{\sqrt[2]{a}}{\sqrt[2]{b}} = \sqrt[2]{\frac{a}{b}}$$

E assim por diante. Mas agora vamos generalizar o tema radiciação.

Antes, pensemos na resposta da seguinte questão:

Qual o valor da $\sqrt[3]{8}$?

Bem!

Se $\sqrt[2]{9}$ = ±3, pois devemos pensar em um número que multiplicado por ele mesmo duas vezes dá o valor do radicando, então para calcular $\sqrt[3]{8}$, eu devo pensar em número que multiplicado por ele mesmo três vezes dá o valor do radicando.

$\sqrt[3]{8}$ = 2, pois 2*2*2 = 8.

Pelo mesmo pensamento temos:

$\sqrt[3]{1}$ = 1, pois 1*1*1 = 1.

$\sqrt[3]{27}$ = 3, pois 3*3*3 = 27.

$\sqrt[3]{125}$ =5, pois 5*5*5 = 125.

Da mesma forma, podemos generalizar o conceito, ou seja:

$\sqrt[4]{16}$ = 2, pois 2*2*2*2 = 16.

$\sqrt[5]{243}$ = 3, pois 3*3*3*3*3 = 243.

$\sqrt[6]{4096}$ = 4, pois 4*4*4*4*4*4 = 4096.

Mas vamos trabalhar um pouco mais as raízes cúbicas.

Um método bem prático que podemos utilizar para descobrir as raízes cúbicas exatas dos valores é usar a tabuada.

O método consiste na construção de uma pequena multiplicação dos valores.

Exemplificação:

1*1*1 = 1

2*2*2 = 8

3*3*3 = 27

4*4*4 = 64

5*5*5 = 125

6*6*6 = 216

7*7*7 = 343

8*8*8 = 512

9*9*9 = 729

10*10*10 = 1000

Com este método, sabemos que entre os valores 1 e 1000 só os valores (1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000) tem raízes cúbicas exatas, os demais valores não apresentam raízes exatas.

O mesmo processo servirá para raízes quadradas, raízes cúbicas, raízes quartas, etc...

Atividades

1° parte.

Passar vários exercícios sobre radiciação para reforçar os conteúdos aplicados em sala e trabalhar as propriedades de potenciação.

4°etapa

Habilidade:
D65 – Efetuar cálculos simples com valores aproximados de radicais.

Pré-requisito: Saber calcular raiz enésima.

Duração da aula: 150 minutos.

Recursos didáticos: Quadro e caneta esferográfica.

Organização da turma: individual.

Objetivos da etapa 04: Simplificar raízes não exatas e aproximar o seu valor, representando-o na reta numérica.

Metodologia adotada:
Desenvolvimento:

Nesta aula de radiciação iremos tratar daqueles valores que não apresentam raízes exatas.

Apresentaremos um processo chamado de Simplificação de radicais através da fatoração.

Exemplificação:

Calcular $\sqrt[2]{12}$

Inicialmente, diríamos que este valor não apresenta raiz quadrada exata, mas podemos reduzir este valor através da fatoração.

Iremos fatorar o valor do radicando.

12	2
6	2
3	3
1	

Podemos dizer que 12=2*2*3 $\rightarrow$ 12 = 2^2*3

Então:

$\sqrt[2]{12} = \sqrt[2]{2^2 * 3}$

Pela propriedade $\sqrt[n]{a^n * b} = a\sqrt[n]{b}$

$\sqrt[2]{12} = \sqrt[2]{2^2 * 3} \rightarrow \sqrt[2]{12} = 2\sqrt[2]{3}$

Essa é a forma simplificada da radiciação.

O mesmo procedimento serve para a simplificação das demais raízes.

Exemplificação:

$\sqrt[3]{250}$

Podemos dizer que 250 = 5*5*5*2 $\rightarrow$ 250 = 5^3*2

Então:

$\sqrt[2]{250} = \sqrt[3]{5^3 * 2}$

Pela propriedade $\sqrt[n]{a^n * b} = a\sqrt[n]{b}$

$\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{5^3 * 2} \rightarrow \sqrt[3]{250} = 5\sqrt[3]{2}$

E este processo serve para reduzir todas as raízes não exatas.

.

Aproximação de raízes não exatas.

Bem!

Se tivéssemos que determinar uma posição, na reta numérica, de uma raiz não exata. Como faríamos?

Vamos usar o método parecido com aquele que usamos para encontrar os números que têm raízes exatas. Multiplicando os valores iguais e construindo a tabela.

Exemplificação:

$\sqrt[2]{15}$ está entre os números?

Pensemos o seguinte:

1*1=1

O número 1 é menor que 15, logo $\sqrt[2]{15}$ >1

2*2 = 4

O número 4 é menor que 15, logo $\sqrt[2]{15}$ >2

3*3 = 9

O número 9 é menor que 15, logo $\sqrt[2]{15}$ >3

4*4 = 16

O número 16 é maior que 15, logo $\sqrt[2]{15}$ <4

Como $\sqrt[2]{15}$ >3 e $\sqrt[2]{15}$ <4, dizemos que $\sqrt[2]{15}$ é um número que está entre os números 4 e 5.

Este método não determina, com exatidão, os valores das raízes não exatas, mas nos ajuda a identificar o seu lugar na reta numérica.

Para a questão anterior, poderíamos ir mais adiante.

Vejamos:

Sabemos que $\sqrt[2]{15}$ é maior que 3 e menor que 4 e que 3*3 = 9 e 4*4 = 16.

Observemos estes valores 9 e 16. Seu ponto médio é 12,5 e 15>12,5. Como 15>12,5 podemos dizer que $\sqrt[2]{15}$ >3,5.

Isso permite que aproximemos, mais ainda, o valor de $\sqrt[2]{15}$ na reta numérica.Podemos dizer, agora, que $\sqrt[2]{15}$ é um número que esta entre 3,5 e 4.

Pelo mesmo processo, temos que o ponto médio entre 12,5 e 16 é 14,25 e 15>14,25, podemos dizer que $\sqrt[2]{15}$ está além do ponto médio entre 3,5 e 4, ou seja, está entre 3,75 e 4. Podemos dizer, agora, que $\sqrt[2]{15}$ é um número que esta entre 3,75 e 4.

Seguindo este mesmo processo podemos aproximar cada vez mais o valor de uma raiz não exata.

atividades

1° parte.

Apresentar diversas raízes, não exatas, e pediremos aos alunos que façam a simplificação dos radicais.

2° parte.

Apresentar diversas raízes, não exatas, e pediremos aos alunos que aproximem, ao máximo, o valor das raízes e faça sua represenação na reta numérica.

5° etapa

Avaliação

Considerações:

A avaliação da aprendizagem deverá ser um processo, feito ao longo das aulas e assim poderemos identificar as dúvidas e dificuldades que os alunos passam a ter.

Consideraremos os descritores citados, em cada etapa do processo, e procuraremos contextualizar as questões, trazendo-as para o cotidiano do aluno.

1° etapa:

Habilidade:

D39 - Identificar a localização de números inteiros na reta numérica.
D42 - Identificar a localização de números racionais na reta numérica.
D45 - Efetuar cálculos com números inteiros, envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).

Na primeira etapa iremos ter um contato com os conjuntos já estudados até aqui. Será mais uma revisão, onde apararemos algumas rebarbas que ficaram no ensino de tais conjuntos.

2° etapa:

Habilidade:
D53 – Reconhecer/identificar diferentes representações de um mesmo número racional
D65 – Efetuar cálculos simples com valores aproximados de radicais.

Nesta etapa iremos apresentar o conjunto do números irracionais e a sua unificação com o conjunto do números racionais, formando o conjunto dos números reais. Iremos entender o que é um número irracional e seus conceitos básicos.

3° etapa:

Habilidade:
D65 – Efetuar cálculos simples com valores aproximados de radicais.

Nesta etapa iremos conhecer as raízes enésimas, ou seja, iremos além das raízes quadradas e cúbicas e ensinaremos a trabalhar com raízes exatas de ordens superiores.

4° etapa:

Habilidade:
D65 – Efetuar cálculos simples com valores aproximados de radicais.

Nesta etapa final iremos continuar a falar sobre as raízes enésimas não exatas. Iremos aprender a fazer a simplificação dos radicais e a aproximação de seus valores, fazendo sua representação na reta numérica.

Após a conclusão de todas essas etapas, poderemos passar um teste individual para que posamos avaliar o entendimento e dificuldades dos alunos, quando eles estiverem sob pressão e após, apresentar os erros e acertos.

Referências bibliográficas:

Os fundamentos da matemática, IEZZI, Gelson – 10° Edição – São Paulo: Moderna, 2009.

Piaget.j. O possível e o necessário na criança. [trad. Bernadinha Machado de Albuquerque]. Porto Alegre: Artes médicas, 1986.

www.mathematikos.com.br

www.somatemática.com.br