

Formação continuada em MATEMÁTICA

Fundação CECIERJ /Consortia CEDERJ

Matemática 3º Ano – 4º Bimestre/2013

Plano de Trabalho

Polinômios e equações algébricas

Tarefa 1

Cursista: Rodrigo da Costa Miranda

Tutor: **MARIA CLÁUDIA PADILHA TOSTES**

Sumário

INTRODUÇÃO.....	2
DESENVOLVIMENTO ativ. 1	3
DESENVOLVIMENTO ativ. 2	7
DESENVOLVIMENTO ativ. 3	11
DESENVOLVIMENTO ativ. 4	14
AVALIAÇÃO.....	17
FONTES DE PESQUISA.....	18

INTRODUÇÃO

Neste plano de trabalho o objetivo será mostra aos alunos conceitos polinômios, operações com polinômios (adição, subtração, multiplicação e divisão), dispositivo de Briot-Ruffini, teorema de da composição e relações de Girard .

Pretendo fazer o uso dos roteiro de ação 2, 3, 5 e 10, para desenvolver os conteúdos neles descritos, pois além de muito bem elaborados, tendem a despertar o interesse do aluno, pois apresenta o conteúdo de uma forma gradativa e bem elaborada, chamando assim o aluno a participar.

O plano de trabalho será desenvolvido em cima destes roteiros de ação, por exemplo numero 2 , explorando o ensino por algoritmo, o de numero 3, traz vários “probleminhas” que tem um desenrolar muito interessante, o roteiro de numero 5, que mostra após o aluno calcular, com auxilio do Geogebra, mostra onde ficaria as raízes de forma muito precisa e ilustrando aos alunos o objetivo, e também o uso do roteiro 10, que mostra ao aluno como pode ser usado de forma pratica , em calculo contextualizado de matemática financeira .

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1

Roteiro de ação – Algoritmos por analogia

Duração prevista: 100 minutos

Área de conhecimento: Matemática

Assunto: Reconstrução de imagens

Objetivos: Apresentar a alguns algoritmos de soma, subtração, multiplicação e divisão de polinômios.

Pré-requisitos: Os algoritmos dessas operações com números inteiros.

Material necessário: folha de atividade, lápis e borracha.

Organização da classe: em duplas.

Roteiro de Ação 2 – Algoritmos por analogia

1. Você lembra o motivo de ao somarmos 134 com 256 dispormos os números um abaixo do outro respeitando as classes de unidades? Tente descrever tal motivo em uma linha.

2. É possível aproveitar a ideia do algoritmo da soma e da subtração de números naturais para realizar somas e subtrações de polinômios. Veja o exemplo inacabado a seguir e complete o que falta sob a linha pontilhada.

$$\begin{array}{r}
 2x^4 - 3x^3 \quad + 2x \\
 + \underline{\quad 2x^3 - x^2 \quad + 1} \\
 \dots\dots\dots - x^2 + 2x + 1
 \end{array}$$

3. Considere o que você observou no item anterior e calcule utilizando o mesmo algoritmo, o valor de

a) $p(x) + q(x)$, sabendo que $p(x) = 3x^5 - 4x^3 + x^2 - 2x + 1$ e $q(x) = -x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3$.

b) $p(x) - q(x)$, sabendo que $p(x) = 3x^5 - 4x^3 + x^2 - 2x + 1$ e $q(x) = -x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3$.

4. Você se recorda das propriedades comutativas e associativas válidas na soma de números naturais? Elas também são válidas para as operações com polinômios! Utilize-as para refazer os cálculos indicados no item 3, sem o algoritmo do item 2.

COMUTATIVIDADE	$2 + 5 = 5 + 2$
ASSOCIATIVIDADE	$3 + (7 + 4) = (3 + 7) + 4$

5. Para realizar a subtração indicada no item (b) da questão 3 não foi possível operar exatamente como fazemos no algoritmo de subtração de números naturais. Descreva com suas palavras o que mudou.

6. Observe o cálculo disposto na primeira coluna (à esquerda) abaixo. Inspire-se nele para sugerir um algoritmo para a multiplicação de polinômios como o que aparece incompleto no lado direito da tabela abaixo.

$\begin{array}{r} 125 \\ \times 12 \\ \hline 250 \\ 125 \\ \hline 1500 \end{array}$	$\begin{array}{r} -x^3 + 2x - 1 \\ \times \quad x^2 - 3x \\ \hline 3x^4 \quad - 6x^2 + \\ -x^3 \end{array}$
---	---

7. O cálculo de $p(x) \cdot q(x)$ também pode ser realizado utilizando a distributividade, como assinalado na ilustração abaixo. Utilize esta propriedade para realizar:

$$p(x) \cdot q(x) = (x^2 - 3x)(-x^3 + 2x - 1)$$

e compare com o resultado anterior.

8. Indique algoritmo de sua preferência para a realização da multiplicação de dois polinômios. Pense no que pode acontecer em outros casos para certificar o seu gosto.

9. Observe agora o algoritmo de divisão de números naturais abaixo e tente completar o algoritmo sugerido ao lado.

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 3x - 2 & x^2 - 1 \\
 -x^4 & + 1x^2 \\
 \hline
 -2x^3 + x^2 + 3x & \\
 +2x^3 & + 2x \\
 \hline
 & 2x - 1
 \end{array}$$

10. Agora, considere que:

$$p(x) = 2x + 1, \quad t(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1, \quad u(x) = x^4 - 5x + 2 \quad \text{e} \\
 v(x) = -x^3 - x - 1.$$

E, quando possível, calcule as operações indicadas abaixo, indicando o resultado, quociente e resto, quando for o caso. Se a operação não for possível justifique!

- $p(x) - u(x)$
- $v(x) \cdot u(x)$
- $p(x) + u(x) - v(x)$
- $p(x) \div v(x)$
- $u(x) \div t(x)$
- $v(x) \cdot p(x) - v(x) \cdot u(x)$
- $v(x) \cdot u(x) + p(x)$
- $u(x) + p(x)$
- $[p(x)]^2 - [u(x)]^2$
- $[v(x)]^2$

DESENVOLVIMENTO

Atividade 2

Roteiro de Ação 3 – Resolvendo Problemas de Aritmética com Polinômios

Duração prevista: 150 minutos

Área de conhecimento: Matemática

Assunto: Polinômios

Objetivos: Utilizar o desenvolvimento, simplificação e expansão de polinômios para resolução de problemas matemáticos.

Pré-requisitos: Propriedades operatórias com polinômios.

Material necessário: folha de atividade, lápis e borracha.

Organização da classe: Disposta em grupos de 4 alunos

Roteiro de Ação 3 – Resolvendo Problemas de Aritmética com Polinômios

1. Realize mentalmente a seguinte brincadeira. Nela, a exceção da primeira instrução, cada uma das outras deve ser executada com o resultado obtido na instrução imediatamente anterior.

- 1 Pense em um número;
- 2 Multiplique-o por 2
- 3 Some 4
- 4 Multiplique-o por 3
- 5 Subtraia 2
- 6 Divida por 2
- 7 Subtraia 5
- 8 Divida-o por 3

Se você fez todas as operações sem errar nenhum cálculo, o resultado da última etapa é . . . o número que você pensou inicialmente!

Sabe como seu professor inventou esta brincadeira? Escrevendo as operações para uma variável x que representasse o número que você imaginou na primeira instrução. Veja:

$$1 \text{ Pense em um número} \rightarrow x$$

$$2 \text{ Multiplique-o por 2} \rightarrow 2x$$

$$3 \text{ Some 4} \rightarrow 2x + 4$$

$$4 \text{ Multiplique-o por 3} \rightarrow 3(2x + 4)$$

$$5 \text{ Subtraia 2} \rightarrow 3(2x + 4) - 2$$

$$6 \text{ Divida por 2} \rightarrow \frac{3(2x + 4) - 2}{2}$$

$$7 \text{ Subtraia 5} \rightarrow \left(\frac{3(2x + 4) - 2}{2} \right) - 5$$

$$8 \text{ Divida-o por 3} \rightarrow \frac{\left(\frac{3(2x + 4) - 2}{2} \right) - 5}{3}$$

$$\text{Mas, } \frac{\left(\frac{3(2x + 4) - 2}{2} \right) - 5}{3} = \frac{\left(\frac{6x + 12 - 2}{2} \right) - 5}{3} = \frac{6x + 10 - 10}{3} = \frac{6x}{3} = 2x = x.$$

Observe que as instruções também poderiam ser escritas como o seguinte polinômio:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (3(2x+4) - 2) - 5 \right).$$

Simplificando-o obtemos x.

Agora veja se você aprendeu realmente o que está por trás da brincadeira fazendo os itens 2, 3 e 4 a seguir.

2. Descubra o resultado da brincadeira abaixo.

- 1 Pense em um número;
- 2 Some o seu dobro
- 3 Subtraia 3
- 4 Divida por três
- 5 Some 1
- 6 Subtraia o número que você pensou inicialmente

A resposta é sempre o número...

3. Um professor pediu para seu aluno realizar as seguintes instruções:

- 1 Pense em um número;
- 2 Multiplique por 4
- 3 Some sua metade
- 4 Divida por 3

4. Invente uma dessas brincadeiras cujo resultado seja o dobro do número que a pessoa escolheu inicialmente.

As brincadeiras que vimos até aqui nos dizem que se pudermos escrever sob a forma de polinômio uma sequência de operações podemos entender o resultado final desta sequência de operações. E isto, não para aí!

Vamos brincar de desvendar curiosidades?

5. Considere a afirmação abaixo:

Se você somar 1 ao produto de quatro inteiros consecutivos quaisquer o resultado será sempre um número quadrado perfeito!

Agora experimente verificar se ela é verdadeira fazendo os cálculos a seguir:

- a) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 =$
- b) $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1} =$
- c) $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 + 1 =$
- d) $\sqrt{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 + 1} =$
- e) $10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 + 1 =$
- f) $\sqrt{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 + 1} =$

6. Agora, para cada caso do item anterior faça o seguinte:

- 1 Multiplique o primeiro pelo último dos quatro números consecutivos;
- 2 some 1
- 3 calcule o seu quadrado

A resposta encontrada é a mesma que a do produto dos quatro números somado ao número 1?

7. Vamos explicar:

- 1 Considere $n, n+1, n+2$ e $n+3$ os quatro números consecutivos;
- 2 No papel, multiplique-os e some 1
- 3 Registre o polinômio encontrado
- 4 No papel, desenvolva $[n \cdot n+3 + 1]^2$
- 5 Registre o polinômio encontrado

- a) O que acontece com os dois polinômios encontrados?
- b) O que isso significa?
- c) A afirmação de que se somarmos 1 ao produto de quatro inteiros consecutivos quaisquer o resultado será sempre um número quadrado perfeito é verdadeira?
- d) Compartilhe com seus colegas de classe.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 3

Roteiro de Ação 5 – O Zero com raiz de um polinômio.

Duração prevista: 100 minutos

Área de conhecimento: Matemática

Assunto: Fórmulas para solução de equações polinomiais

Objetivos: Despertar o interesse pela visão generalista da construção de resultados em matemática.

Pré-requisitos: Fórmulas de solução das equações polinomiais do 1º e 2º grau.

Material necessário: folha de atividade, lápis e borracha.

Organização da classe: Disposta em grupos de 4 alunos

Roteiro de Ação 5 – O Zero com raiz de um polinômio.

1. Calcule $p(0)$ em cada caso abaixo.

a) $p(x) = 4x^5 - 3x^2 + 5x$

b) $p(x) = 2x^2 - 7x - 1$

c) $p(x) = x^3 - 2x^2 + x$

2. Verifique se é verdade a seguinte afirmação: " $a_n x^n = 0$ sempre que $x = 0$ ".
Explique:

3. Agora considerando a afirmação acima e os cálculos feitos no item 1 identifique dentre os polinômios listados abaixo aqueles que $p(x)=0$, ou seja, aqueles que o número 0 é raiz.

$p(x) = 3x^{10} - \frac{2}{3}x^7 + 3$	$p(x) = 5x^{1024} + 53x^{1023} + x^{19}$	$p(x) = \frac{1}{2}x^{12} + \frac{2}{3}x^{23} + \frac{3}{4}x^{34}$
$p(x) = x^5 - x^3 + x - 1$	$p(x) = x - 2 - x - 3 + x$	$p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$
$p(x) = x^8 + x^5 + x^4 + x^2$	$p(x) = 1 + i x^7 - ix^5 + x^4$	$p(x) = 1x^{11} - 2x^8 - 3x^5 + 4x - \frac{1}{6}$

4. Com o Software Geogebra construa o gráfico de cada função polinomial REAL que tem como expressão um dos polinômios do item anterior. Note que não estamos pedindo para você fazer o gráfico da função polinomial COMPLEXA de expressão $1 + i x^7 - ix^5 + x^4$.

5. Quais funções tiveram o ponto (0,0) como um ponto de seu gráfico?

6. As funções que você indicou no item 5 são as que tem como expressão os polinômios assinalados no item 3? Explique.

7. Escreva com suas palavras uma característica algébrica de um polinômio $p(x)$ para que este tenha o zero como raiz.

8. Agora escreva com suas palavras uma característica do gráfico de qualquer função polinomial cuja expressão é um polinômio com a característica que você descreveu no item anterior.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 4

Roteiro de Ação 10 – Utilizando polinômios para negócios.

Duração prevista: 100 minutos

Área de conhecimento: Matemática

Assunto: Polinômios

Objetivos: Contribuir para a construção do conhecimento do estudo dos polinômios por meio da resolução de problemas.

Pré-requisitos: Ser capaz de operar com expressões algébricas, resolver uma equação do 1º e 2º grau e de calcular valores numéricos de um polinômio.

Material necessário: Folha de atividade, computador com o software Geogebra instalado.

Organização da classe: Disposta em grupos de 4 alunos

Roteiro de Ação 10 – Utilizando polinômios para negócios.

ENUNCIADO. A empresa CAMPUTER, especializada em montagem, manutenção e venda de micro computadores, tem uma capacidade de produção semanal, de no máximo 25 micros computadores. A função que determina custo semanal de produção dessa empresa, em reais, é dada por $C(x) = 2x^3 - 58x^2 + 380x + 600$ onde x são as unidades produzidas de micro computadores.

No mês de julho de 2012, a produção de micro computadores dessa empresa foi a seguinte:

1ª semana → 15 unidades

2ª semana → 25 unidades

3ª semana → 20 unidades

2ª semana → 20 unidades

Sabendo que o preço de venda em função das unidades produzidas é dado por

$p_v = 500 - x$, pergunta-se:

1. Qual foi o custo total de produção da COMPUTER, em cada semana do referido mês?
2. Qual foi a Receita total da COMPUTER, em cada semana do referido mês?
3. Qual seria a quantidade de produção necessária para se obter a receita máxima?
4. Qual seria a receita máxima?
5. Qual seria o preço de venda a ser cobrado para se obter a receita máxima?
6. Determine a função Lucro Total dessa empresa, obtido através da expressão

$$L(x) = R(x) - C(x).$$

7. Qual foi o lucro dessa empresa na venda desse produto, em cada semana do referido mês?

8. Qual foi o lucro total da COMPUTER, em cada semana do referido mês?

9. Qual será a quantidade mínima de produção necessária para que essa empresa não tenha prejuízo?

10. Determine o intervalo de vendas para que essa empresa não tenha prejuízo? Justifique sua resposta. Abra o arquivo Lucro.ggb. Observe que a medida que o valor de x é alterado o ponto no plano cartesiano, referente ao lucro da empresa COMPUTER, varia. Altere os valores do parâmetro x para obter a produção necessária que resulta no maior lucro possível da COMPUTER.

11. Qual seria a quantidade de produção necessária para se obter o lucro máximo?

12. Qual seria o lucro máximo?

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM: Os alunos já tiveram cerca de 50% da avaliação de acordo com a participação na discussão posterior ao vídeo.

Os outros 50%, a resolução correta dos exercícios.

Bibliografia:

Roteiro de Ação 2 – Algoritmos por analogia

Fonte: <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/mod/resource/view.php?id=14342> ,
Acessado em 02/11/2013 às 19:50.

Roteiro de Ação 3 – Resolvendo Problemas de Aritmética com Polinômios

Fonte: <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/mod/resource/view.php?id=14343> ,
Acessado em 02/11/2013 às 19:57.

Roteiro de Ação 5 – O Zero com raiz de um polinômio.

Fonte: <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/mod/resource/view.php?id=14345> ,
Acessado em 02/11/2013 às 20:12.

Roteiro de Ação 10 – Utilizando polinômios para negócios.

Fonte: <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/mod/resource/view.php?id=14350> ,
Acessado em 02/11/2013 às 20:19.

Fonte: <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/mod/resource/view.php?id=14354> ,
Acessado em 02/11/2013 às 20:22.