Reforço escolar · Matemática ·

Professor

Qual é o número?

Dinâmica 2

3ª Série | 1º Bimestre

DISCIPLINA	SÉRIE	CAMPO	CONCEITO
Matemática	3ª do Ensino Médio	Numérico Aritmético	Análise Combinatória

DINÂMICA	Qual é o número?
HABILIDADE BÁSICA	H51 – Resolver problemas com números racionais, envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão).
HABILIDADES PRINCIPAL	H60 – Resolver problemas de contagem, utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjos simples e/ou combinações simples.
CURRÍCULO MÍNIMO	Resolver problemas de contagem, utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples.

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Professor, nesta dinâmica, você irá desenvolver as seguintes etapas com seus alunos.

ETAPAS		ATIVIDADE	TEMPO	ORGANIZAÇÃO	REGISTRO
1	Compartilhando ideias	Iguais ou diferentes?	15 a 20 min	Formação de 2 grupos	Individual
2	Um novo olhar	É mais ou é menos?	15 a 20 min	Nos 2 grupos formados na etapa anterior	Individual
3	Fique por dentro	Qual é mesmo o número do telefone?	25 a 35 min	Em grupos de 4 alunos, com discussão final coletiva	Individual
4	Quiz	Quiz	10 min	Individual	Individual
5	Análise das respostas ao Quiz	Análise das respostas ao Quiz	15 min	Coletiva	Individual
FLEX	Para Saber +	Esta é uma seção de aprofundamento, para depois da dinâmica. O aluno pode realizar, quando desejar, mas o professor precisa ler antes da aula.			
	Agora, é com você!	Para o aluno resolver em casa ou noutra ocasião e consultar o professor, se tiver dúvidas.			

Apresentação

O foco desta dinâmica é a resolução de problemas de contagem que envolvam o Princípio Multiplicativo e permutações simples. Primeiro, pretende-se fazer o aluno relembrar as regras de sinais na multiplicação e divisão de números reais. Em seguida, é trabalhado um exemplo em que se calcula o número de permutações simples, sem recorrer a fórmulas. A resolução deste problema, porém, pode inspirar a busca de uma expressão geral que sirva para esse cálculo.

Primeira Etapa
Compartilhando Ideias

Atividade • Iguais ou diferentes?

Objetivo

Apresentar a regra de sinais para a multiplicação e divisão de números reais.

Descrição da atividade

Por meio de um sorteio, a turma será dividida em 2 grupos para a execução da etapa seguinte. A ideia é começar o trabalho só pelos sinais, deixando os cálculos para a próxima etapa.

A questão é a seguinte:

Você se lembra da regra de sinais para a multiplicação ou divisão?

Ela é bem fácil! Ao multiplicar ou dividir 2 números:

sinais iguais dão resultado com sinal +,

sinais diferentes dão resultado com sinal –.

Observe que a operação a ser realizada é sempre aquela indicada, de multiplicar ou dividir. Os sinais não alteram a operação a ser realizada, só indicam o sinal do resultado.

Quando for chamado pelo seu professor, você vai sortear 2 cartões e vai se colocar ao lado do sinal + ou do sinal – de acordo com a regra acima.

Recursos necessários

- 25 cartões com sinais + e 25 cartões com sinais –, disponíveis para recorte em anexo.
- Um envelope ou pacote opaco, onde caibam os 50 cartões para sorteio.

Procedimentos Operacionais

- *Professor, é importante que você recorte os cartões com antecedência e, ATENÇÃO: você vai precisar de um envelope ou pacote opaco para o sorteio dos cartões.*
- *Você vai organizar a turma para que cada aluno sorteie 2 cartões com sinais + ou – e se coloquem em 2 alas na sala de aula: aqueles que estão com sinais iguais ficam de um lado e os que sortearam sinais diferentes ficam do outro lado.*
- *Esses 2 grupos vão participar de um jogo na próxima etapa nessa mesma posição.*

- *No caso da multiplicação e da divisão, a regra de sinais é muito simples e os exemplos que as ilustram são, em geral, artificiais. Então, neste nível de escolaridade, a opção foi lembrar a regra diretamente. Uma justificativa para estas definições está na extensão de propriedades que valiam para números positivos aos números em geral, positivos ou negativos. Esse fato se repete, por exemplo, na extensão da definição de potência a expoentes negativos. Essa informação pode ser passada ao estudante sem que se gaste muito tempo com isso. Só mesmo a título de informação.*

Segunda Etapa

Um novo olhar...

Atividade • É mais ou é menos?

Objetivo

Destacar a diferença entre as regras de sinais na adição e subtração e na multiplicação e divisão.

Descrição da atividade

Agora os dois grupos formados na etapa anterior vão jogar o jogo do Mais ou Menos.

As regras do jogo são as seguintes:

- Cada grupo escolhe um líder, um relator e um escriba: o líder faz os sorteios, o relator anota os pontos do seu grupo e o escriba anota os cálculos na lousa para que todos os alunos possam acompanhá-los.
- Os 2 líderes tiram par ou ímpar para ver quem é o 1º.
- Os elementos do 1º grupo sorteiam um sinal de operação e 2 números.
- O outro grupo faz o cálculo.
- Se o resultado for positivo, o “Grupo +” ganha 1 ponto, se o resultado for negativo, o “Grupo -” ganha 1 ponto.
- Se um grupo errar o cálculo, perde 2 pontos, se o outro grupo corrigir e acertar o cálculo, ganha 1 ponto.

Terminada essa fase, o 2º grupo faz o sorteio e o 1º deve fazer o cálculo, com a mesma contagem de pontos.

O jogo termina numa jogada completa (número par de sorteios) e ganha aquele grupo que acumulou mais pontos. Seu professor irá determinar quantos sorteios serão feitos.

Cartões para sorteio disponíveis em anexo:

+	+	–	–	–
×	×	×	÷	÷
– 1	– 2	– 3	– 4	– 5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
– 16	– 17	– 18	– 19	– 20

Recursos necessários

- Cartões com números e sinais de operações para recorte em anexo.
- Dois envelopes ou pacotes opacos, onde caibam os cartões para sorteio, um para os números outro para os sinais de operação.
- Lousa para registro dos cálculos pelos escribas e dos resultados pelos relatores dos grupos.
- Encarte do aluno.

Procedimentos Operacionais

- *Professor, os grupos para esta competição já foram formados na etapa anterior.*
- *É preciso recortar os cartões para sorteio e providenciar mais um envelope ou pacote opaco para os sorteios, com antecedência.*
- *Os grupos escolhem o líder por votação ou aclamação, como for melhor, mas o líder geral é você, tanto na organização dos sorteios quanto na correção dos resultados dos cálculos e na anotação dos pontos de cada grupo.*
- *Para que a turma toda acompanhe os cálculos e a evolução dos pontos, é interessante que as anotações sejam feitas na lousa, embora haja espaço para cálculos e anotações no Encarte do aluno.*
- *É importante observar que o sorteio começa pela operação, pois se for sorteada a divisão ou subtração será importante a ordem dos 2 números sorteados a seguir.*

- *Os cartões estão programados para 10 sorteios, 5 de cada grupo, mas você pode encerrar o jogo ou prolongá-lo, de acordo com o tempo gasto, com as necessidades da sua turma e com o material que você tenha preparado.*

Intervenção Pedagógica

- *Professor, a regra de sinais para a multiplicação e divisão é muito mais fácil do que aquela para a adição ou subtração. É comum que os alunos confundam-se e apliquem sempre a regra mais fácil. É frequente o erro em cálculos como – 8 – 3, em que os alunos consideram o resultado com sinal + porque os sinais das parcelas são iguais. Este jogo foi imaginado para apresentar as quatro operações numa mesma atividade, a fim de quebrar este obstáculo.*

- *É importante chamar a atenção para o estudante que a regra de sinais na multiplicação e na divisão só determina o sinal do resultado porque a operação a ser realizada com os módulos é sempre aquela indicada: multiplicação ou divisão.*

- *Já no caso da adição, a verificação de sinais iguais ou diferentes é também importante, mas para saber qual é a operação entre os módulos, se adição ou subtração. Para saber o sinal do resultado, o que conta é o sinal daquele de maior módulo.*

- *Um outro problema que vai surgir é o da divisão que não seja exata. Os números escolhidos são simples para que a atenção seja dirigida às regras de sinais, mas ao incluir a divisão, o resultado pode não ser um número inteiro. Você pode dizer a eles que, neste caso, podem formar a fração e dar a resposta dessa forma.*

- *Você decide se vale a pena cobrar alguma simplificação ou redução à forma decimal, mas cremos que talvez seja melhor aceitar qualquer resposta fácil: por exemplo, se o sorteio for de divisão e os números sorteados foram + 3 e – 6, nesta ordem, é válida qualquer representação do número* $-\frac{3}{6}$*, como, por exemplo,* $-\frac{3}{6}$*,* $-\frac{1}{2}$ *ou – 0,5.*

- *Uma outra dificuldade que este jogo pretende focalizar é aquela provocada pela dupla função do sinal de menos: ele tanto pode indicar a operação de subtração quanto que o número seja negativo. Esse duplo significado é utilizado, pois não causa confusão: dá sempre para saber do que se trata. Por outro lado, às vezes, pode causar confusão no estudante. É importante que ele saiba que não se escrevem 2 sinais seguidos. Se numa operação forem necessários 2 sinais, é importante que haja uma*

Professor

separação por meio de parênteses, ou equivalente. Por exemplo, o produto de + 5 por – 3 é indicado por: +5 × (– 3), a diferença entre – 5 e – 3 é indicada por – 5 – (– 3) e calcula-se como: – 5 + 3 = – 2, pois subtrair um número é o mesmo que somar o seu simétrico. Espera-se que todos esses casos surjam nos sorteios. Lembre aos alunos que, em alguns contextos, os números negativos não são indicados pelo sinal – mas de outro modo, por exemplo, sendo escritos em vermelho. As máquinas de escrever de antigamente tinham, por isso, uma fita com as cores preta e vermelha e, em geral, as planilhas eletrônicas oferecem esta opção quando se trata de moeda.

Terceira Etapa

Fique por dentro!

35 MINUTOS

Atividade • Qual é mesmo o número do telefone?

Objetivo

Introduzir a noção de permutação simples e seu cálculo, utilizando o Princípio Aditivo e o Princípio Multiplicativo.

Descrição da atividade

Num dia desses, indo para o trabalho, Carol viu o número de telefone de uma loja de roupas com peças interessantes. Reparou que ele começava com os mesmos 4 dígitos do seu próprio telefone e que os 4 dígitos finais eram números divisíveis por 3, sem repetição. No final do dia, quando chegou a casa e pensou em telefonar para a loja, percebeu que não se lembrava da ordem em que os múltiplos de 3 estavam no número. Ela pensou que poderia ligar para todos aqueles que começassem com os mesmos 4 dígitos do telefone dela e terminassem com os dígitos 0, 3, 6 e 9, em alguma ordem. Foi aí que ela pensou: seriam quantas essas tentativas?

Vamos ajudar Carol a fazer esse cálculo? Quantos seriam?

Este é um problema de contagem e, como você sabe, nesses casos o importante é contar todos os casos e cada caso uma única vez. Essa observação parece simples, mas os erros na contagem são exatamente por uma dessas falhas.

Para ter certeza de que todos os casos são contados e uma só vez cada um, você vai precisar de uma certa organização. Combine com seus colegas de grupo qual a organização que vocês vão adotar e, se acharem necessário, usem os cartões disponíveis para recorte no anexo do seu encarte.

Mãos à obra!

Espera-se que o grupo escolha uma organização para apresentar todas as possibilidades de sequências de 4 dígitos, 0, 3, 6 e 9, sem repeti-los. A diferença entre uma possibilidade e outra está, portanto, na ordem em que esses dígitos são considerados. Juntando os cartões de cada aluno do grupo, eles terão mais condições de iniciar a montagem da lista dessas sequências.

Uma organização possível será considerar as 4 posições e irem colocando as possibilidades. Começando por aquelas em que o 0 ocupa a 1ª posição, vão trocando as posições dos demais a partir dos últimos:

0	3	6	9
0	3	9	6
0	6	3	9
0	6	9	3
0	9	3	6
0	9	6	3

Essas foram as 6 possibilidades que começam com o 0. Não é possível construir nenhuma outra começando por 0 e essas 6 são todas distintas.

Da mesma forma, poderiam ser construídas as possibilidades começando por 3 ou por 6 ou por 9. Em cada um desses casos, seria possível formar 6 novas possibilidades. Estas novas possibilidades não coincidem entre elas, pois cada um dos grupos de 6 tem números diferentes como 1º termo.

A quantidade total de possibilidades é, portanto, a soma de todos esses casos, ou seja:

6 + 6 + 6 + 6 = 24. (Princípio Aditivo = as quantidades de casos se somam, pois não existe possibilidade de repetição em cada uma dessas coleções.)

Uma outra forma de organização seria a seguinte:

Colocado o 0 na 1ª posição, há outros 3 números que podem ocupar a 2ª posição. Escolhidos esses 2 primeiros números, há ainda outros 2 que podem ocupar a 3ª posição. Fixadas essas 3 posições, não há mais escolha possível, pois sobrou um só número para a 4ª posição:

1ª posição	4 escolhas possíveis.
2ª posição	Escolhido o número anterior, só há 3 escolhas possíveis.
3ª posição	Escolhidos os dois números anteriores, só há 2 escolhas possíveis.
4ª posição	Já foram escolhidos três números, só há 1 para ocupar esta posição.

Ora, se são possíveis 4 escolhas na 1ª posição e, para cada escolha há ainda 3 escolhas para a 2ª posição, até aí, temos 4 × 3 escolhas. Continuando para cada uma dessas escolhas até a 2ª posição, há 2 escolhas para a 2ª posição, o que significa 4 × 3 × 2 escolhas possíveis até a 3ª posição. Agora, não há mais escolhas, só há 1 número sobrando em cada um desses casos para completar o número de telefone que a Carol procura. Só por questão de estética, escreve-se, então, o número máximo de ligações que a Carol precisa fazer como: 4 × 3 × 2 × 1 = 24.

Resposta

Com, no máximo 24 ligações, Carol iria chegar ao número de telefone da loja procurada.

Recursos necessários

- Encarte do aluno
- Cartões numerados para recorte no anexo do Encarte do Aluno
- Tesoura para cada aluno ou cada grupo

Procedimentos Operacionais

Professor, para o desenvolvimento desta etapa, será bom que a turma trabalhe em grupos menores do que aqueles das primeiras etapas. O material de 4 anexos é suficiente para a montagem das 24 possibilidades procuradas, assim, a sugestão é para que a turma seja dividida em grupos de 4 estudantes.

Intervenção Pedagógica

Professor, é pouco provável que os grupos organizem suas listas por algum dos critérios aqui expostos, logo de início. Talvez alguns deles cheguem a uma dessas configurações aos poucos. Seu papel será tanto de catalisador do processo em cada grupo, como de sintetizador final do processo.

Nessa síntese final, você pode pedir aos grupos que tenham chegado a organizações análogas às aqui expostas que apresentem sua organização para toda a turma. Se nenhum grupo chegou a um desses procedimentos, você pode levar a turma a perceber os benefícios de cada um deles. Se algum grupo usou uma outra organização eficaz, é hora de apresentar a toda a turma também essa estratégia.

É importante que sejam mencionados entre os grupos e para toda a turma os seguintes fatos:

- *Onde foi aplicado o Princípio Aditivo e porque ele pôde ser aplicado.*
- *Onde foi aplicado o Princípio Multiplicativo e porque ele pôde ser aplicado.*

Pode ser lançado, então, à toda a turma o seguinte desafio:

Se a Carol só se lembrasse de que o número do telefone da loja começava por 2, que não havia nem o 0, nem o 1 e que não havia dígito repetido, qual seria a quantidade de números que ela teria que tentar? (Use o Princípio Multiplicativo)

Espera-se que a turma perceba que teria que usar os 7 dígitos: 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 e que, por raciocínio análogo ao que foi feito para 4 posições, estes ocupariam 7 posições. Teríamos assim, $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5.040$ possibilidades.

A resolução deste desafio é uma oportunidade para você introduzir a notação de fatorial, que, talvez eles já conheçam, mas nunca é demais repetir: se n é um número inteiro maior ou igual a 2, o produto de todos os números inteiros entre 1 e n se chama fatorial de n e indica-se por n!.

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

Outra informação que pode ser dada ao estudante é que essas possibilidades de agrupamentos estudadas nesta dinâmica, em que são considerados todos os elementos em cada agrupamento e a diferença entre um e outro está só na ordem dos elementos, chamam-se permutações simples desses elementos.

Se houve tempo para responder ao desafio, eles mostraram que as permutações de 7 elementos são exatamente 7!.

Quarta Etapa

Quiz

Questão • (Saerjinho, 2º bimestre de 2011, 3ª Série do Ensino Médio, Questão 18, ligeiramente adaptada)

Ana comprou um conjunto ornamental para jardins, composto pela Branca de Neve e os sete anões e pretende organizá-lo em fila. De quantas maneiras diferentes esses enfeites podem ser organizados no jardim (considerando como maneiras diferentes aquelas em que a ordem das estátuas seja diferente)?

a. 8

b. 16

c. 64

d. 20 160

e. 40 320

Quinta Etapa
Análise das Respostas ao Quiz

15 MINUTOS

Resposta

A resposta correta é a alternativa (e).

Se Ana quer colocá-los em fila, basta utilizar o Principio Multiplicativo, para o cálculo das permutações de 8 elementos. Acrescentando uma etapa ao argumento usado no cálculo das ligações que Carol teria de dar se só se lembrasse do primeiro dígito do telefone da loja, o resultado será:

$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 56 \times 24 \times 3 \times 10 = 40.320.$

Se não houve tempo para propor o desafio dos 7 dígitos do telefone, você pode partir do caso com 4 dígitos para chegar a 8.

Distratores

A alternativa (a), poderia ser escolhida pelo aluno que considerasse somente o número de elementos. A alternativa (b) seria escolhida pelo aluno que considerasse o dobro do número de elementos. A opção (c) seria escolhida pelo aluno que considerasse o quadrado do número de elementos e o aluno que optou pela letra (d) provavelmente aplicou o princípio multiplicativo, esquecendo-se de multiplicar por 2.

Etapa Flex
Para saber +

Esta dinâmica apresentou um caso simples de permutações, sem a preocupação de nomenclatura ou dedução de fórmulas. A aplicação do Princípio Multiplicativo, entretanto, já dá uma boa ideia do que seria uma prova geral para o cálculo do número de permutações de n elementos. Os raciocínios utilizados não dependeram da natureza dos elementos, se eram números ou flores, não importou para a contagem. Além disso, a extensão desse raciocínio de 4 para 7 algarismos pode ser repetida de n para n+1 elementos, o que provaria a fórmula por indução.

1. O link a seguir é de um aplicativo que pode ser utilizado como uma ferramenta útil para explorar o conceito inicial e intuitivo do Princípio Multiplicativo aplicado ao cálculo de possibilidades:

- http://ambiente.educacao.ba.gov.br/conteudos-digitais/conteudo/exibir/id/994

2. Também no vídeo indicado a seguir você poderá assistir a uma aula interessante do professor Luciano Monteiro de Castro sobre os princípios multiplicativo e aditivo:

- http://www.youtube.com/watch?v=TgNauOQoiiw

Agora, é com você!

1. Calcule os resultados das seguintes operações:

Resposta

a) $2 \times 5 = 10$ b) $-2 \times 5 = -10$ c) $-2 \times (-5) = 10$ d) $2 \times (-5) = -10$	e) $2 \times 5 \times 3 = 30$ f) $-2 \times 5 \times (-3) = 30$ g) $-2 \times (-5) \times 3 = 30$ h) $2 \times (-5) \times (-3) = 30$	i) $2 \times (-5) \times 3 = -30$ j) $-2 \times (-5) \times (-3) = -30$ k) $-2 \times 5 \times 3 = -30$ l) $2 \times 5 \times (-3) = -30$

m) $(-6)^2 = (-6) \times (-6) = +36$ n) $(-5)^3 = (-5)^2 \times (-5) = +25 \times (-5) = -125$ o) $(-3)^4 = (-3)^3 \times (-3) = (-3)^2 \times (-3) \times (-3) = +9 \times (+9) = +81$	p) $1{,}5 \times (-2) = -3$ q) $-\left(\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{5} = -\frac{2 \times 1}{3 \times 5} = -\frac{2}{15}$ r) $-\left(\frac{\pi}{123}\right) \times 0 \times (-7)^{12} = 0$

s) $(-40) \div 5 = -8$ t) $35 \div (-5) = -7$ u) $(-30) \div (-5) = +6$ v) $25 \div (-5) = -5$ w) $56 \div (-8) = -7$	x) $\frac{-81}{9} = -9$ y) $\frac{-72}{-9} = +8$ z) $\frac{63}{-9} = -7$

2. Calcule $(-1)^2$, $(-1)^3$, $(-1)^4$.

Ora, $(-1)^2 = (-1) \times (-1) = +1$ *(sinais iguais);*

$(-1)^3 = (-1)^2 \times (-1) = +1 \times (-1) = -1$ *(sinais diferentes)*

$(-1)^4 = (-1)^3 \times (-1) = (-1) \times (-1) = +1$ *(sinais iguais).*

3. Dado um número n, o que é preciso saber sobre n para que se possa calcular $(-1)^n$? Por quê?

Resposta

Espera-se que o estudante perceba que, se no produto, sinais iguais dão + e sinais diferentes dão –, então um número par de sinais − dá sinal + e um número ímpar dará sinal – (fatos que se provam por indução, levando em conta a associatividade da multiplicação).

Assim, conhecida a paridade de n, é possível dizer que:

$$(-1)^n = \begin{cases} +1, \text{ se } n \text{ é par} \\ -1, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$\text{Ou seja, } \begin{cases} (-1)^{2k} = +1 \\ \quad e \qquad \text{para qualquer } k \text{ inteiro.} \\ (-1)^{2k+1} = -1 \end{cases}$$

• • • • •

4. Você pode explicar porque um número negativo não pode ter raiz quadrada real?

Resposta

Ora, no produto de um número por ele mesmo, os sinais dos 2 fatores são sempre iguais, logo o sinal do produto será sempre +. Não há número real que multiplicado por ele mesmo dê um resultado negativo. Mas a raiz quadrada de um número é exatamente um número que multiplicado por ele mesmo reproduza o número dado, logo, se o número dado for negativo, ele não admite raiz quadrada real.

• • • • •

+	+	+	+	+
+	+	+	+	+
+	+	+	+	+
+	+	+	+	+
+	+	+	+	+
−	−	−	−	−
−	−	−	−	−

$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\times$	$\times$	$\times$	$\div$	$\div$
-1	-2	-3	-4	-5

<u>6</u>	7	8	<u>9</u>	10
11	12	13	14	15
– 16	– 17	– 18	– 19	– 20

Anexo 1